



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Volume 6 — Serie

Il sesto volume: le serie. Serie numeriche, serie a termini non negativi e criteri di convergenza, serie a termini di segno variabile, serie di funzioni. Definizioni, teoremi con dimostrazione ed esempi svolti; gli esercizi sulle serie e su primitive e integrali, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 6.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Serie numeriche	2
1.1	Serie numeriche	2
2	Serie numeriche a termini non negativi	17
2.1	Serie numeriche a termini non negativi	17
3	Serie numeriche a termini di segno variabile	30
3.1	Serie a termini di segno variabile	30
4	Serie di funzioni	37
4.1	Serie di funzioni	37
4.2	Serie nel campo complesso	42



Serie numeriche

1.1 Serie numeriche

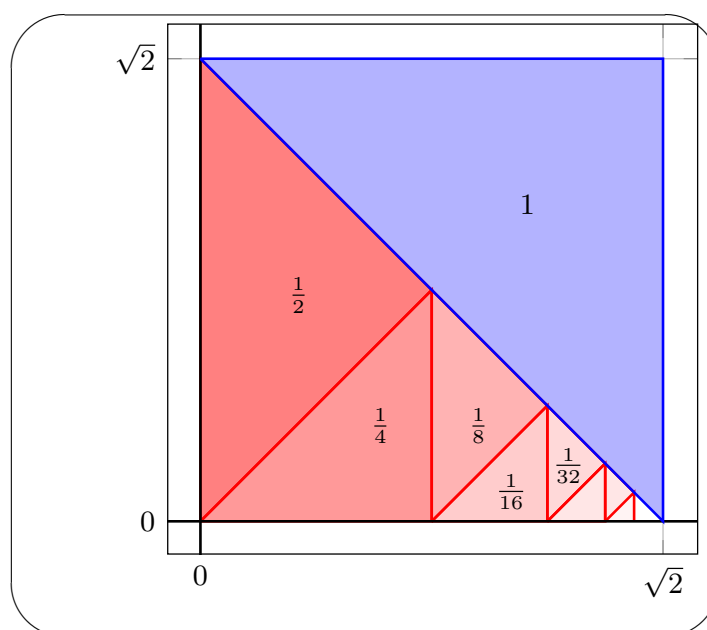
- Introduciamo ora le serie numeriche, che estendono l'operazione di somma a un numero infinito di addendi.

La somma di infiniti termini, anche tutti positivi, può dare un risultato finito.

- Immaginiamo di misurare un quadrato di area 2 usando questo procedimento: dividiamo il quadrato a metà usando la diagonale e misuriamo il primo triangolo rettangolo: otterremo 1; poi dividiamo a metà il secondo triangolo rettangolo e misuriamone il primo triangolo rettangolo: otterremo $\frac{1}{2}$; il rimanente triangolo rettangolo è diviso ancora a metà... e così via indefinitamente. Otteniamo la somma infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

che, per come è stata costruita, deve dare come risultato 2.



Definizione 1.1: di serie numerica

Data una successione $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, chiamiamo **serie numerica** dei termini a_k la scrittura:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

- Si legge “serie (ma anche somma) per k da 0 a $+\infty$ di a_k ”. I valori a_k prendono il nome di **termini generali della serie**.

Definizione 1.2: di successione delle somme parziali

I numeri

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

vengono detti **somme parziali n -esime** della serie e definiscono **la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali**.

Il **carattere della serie** è determinato dal limite della successione $\{s_n\}$ per n che tende all'infinito. Diremo che una serie è **convergente**, **divergente**, **irregolare**, se la **successione $\{s_n\}$** delle somme parziali è **convergente**, **divergente** o **irregolare**, rispettivamente.

Definizione 1.3: di somma della serie

Se la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è **convergente**, ovvero se

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{R} \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

diciamo che s è **la somma della serie**, e scriviamo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

Quindi se la successione $\{s_n\}$ è **convergente** abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$$

La serie traduce con precisione l'idea di somma di infiniti addendi, ovvero si calcola il limite per $n \rightarrow +\infty$ della somma finita dei primi n addendi.

- Se invece di sommare a partire da 0 si parte da un indice $n_0 > 0$, scriviamo $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$
- Per indicare una generica serie numerica senza indicare l'indice di partenza n_0 utilizzeremo il simbolo $\sum a_k$

Una generica serie numerica $\sum a_k$ coinvolge sempre **due diverse successioni**:

1. la successione $\{a_k\}$ dei **termini della serie**
2. la successione $\{s_n\}$ delle **somme parziali**

Esempio 1.1: carattere di una serie

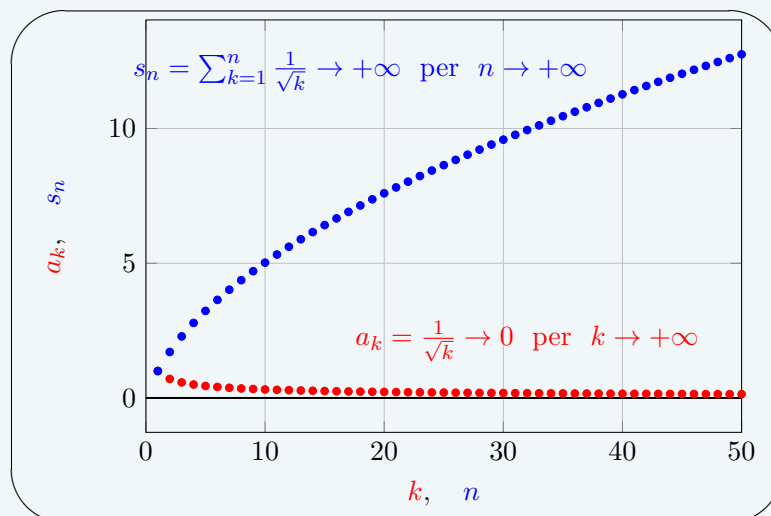
Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Abbiamo:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ addendi, ciascuno } \geq \frac{1}{\sqrt{n}}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Quindi la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è divergente per il teorema del confronto per le successioni e, di conseguenza, la serie è divergente.



1.1.1 Principali proprietà delle serie numeriche

Osservazione 1.4

Se una successione $\{a_k\}$ è a termini non-negativi, ovvero $a_k \geq 0, \forall k$, allora la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente e regolare.

Dimostrazione. Data una successione $\{a_k\}$ a termini non negativi, la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente dato che:

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n, \quad \forall n, \quad \text{quindi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{s_n\}$$

per il teorema di monotonìa delle successioni. Di conseguenza la successione $\{s_n\}$ non può essere irregolare. È quindi regolare ovvero o converge o diverge. $\square$

Data una successione $\{a_k\}$ a termini non negativi:

- Se $\{s_n\}$ è **crescente e limitata** allora ammette limite finito e $\sum a_k$ converge.
- Se $\{s_n\}$ è **crescente e illimitata** allora $\sum a_k$ diverge a $+\infty$.
- Questa osservazione è valida anche per successioni a termini definitivamente non-negativi, positivi o definitivamente positivi.

Teorema 1.5

Se una serie $\sum a_k$ è convergente allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

Dimostrazione. Per definizione di serie convergente, la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge a un numero reale s , cioè $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$ per $n \rightarrow +\infty$. Senza perdita di generalità consideriamo $n_0 = 0$.

Osserviamo che la successione $\{s_n\}$ può essere definita in maniera ricorsiva:

$$s_0 = a_0, \quad s_n = s_{n-1} + a_n, \quad \forall n \geq 1$$

Di conseguenza abbiamo:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

$\square$

La convergenza di una serie implica quindi che $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, ovvero:

$$\sum a_k \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0 \quad (1.1)$$

ma il viceversa non è vero (l'esempio 1 è un controesempio):

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0 \not\Rightarrow \sum a_k \text{ convergente} \quad (1.2)$$

Quindi il fatto che $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ è condizione necessaria ma non sufficiente alla convergenza di una serie.

- Dalla contronominale o implicazione inversa di (1.1) abbiamo:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k \text{ è divergente o irregolare}$$

ovvero se il limite non è uguale a zero allora la serie non è convergente.

1.1.2 Code delle serie

Se si modifica un numero finito di termini di una serie, il valore della somma può cambiare, ma il carattere della serie resta immutato.

- Se si modifica il valore di un termine, per esempio a_{n_0} , per $n \geq n_0$ le successioni delle somme parziali, originale e modificata, differiscono solo per tale termine: quindi entrambe convergono, divergono o sono irregolari. Lo stesso vale se si modificano un numero finito di termini.

I risultati sul carattere delle serie valgono quindi anche se le ipotesi sono verificate “definitivamente”, cioè da un certo indice n_0 in poi.

Definizione 1.6: di coda di una serie

Data una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e un valore $m \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ viene detta **coda della serie**.

- Data una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $m \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\sum_{k=m+1}^n a_k = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) - \left(\sum_{k=0}^m a_k \right) = s_n - s_m, \quad \forall n > m \quad (1.3)$$

quindi per ogni coda (ovvero per ogni m) l'associata successione delle somme parziali è uguale a quella della serie di partenza meno una costante. Abbiamo di conseguenza la seguente osservazione:

Ogni coda di una serie ha lo stesso carattere della serie di partenza.

- Data una serie convergente, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ nella (1.3) si ottiene la relazione:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) - \left(\sum_{k=0}^m a_k \right) = s - s_m \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (1.4)$$

Abbiamo di conseguenza la seguente osservazione:

Dato $m \in \mathbb{N}$, ogni coda $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ di una serie convergente, può essere interpretata come l'**errore** che si commette approssimando la somma s con la somma parziale s_m .

Teorema 1.7

Se una serie $\sum a_k$ è convergente allora

$$\underbrace{s - s_m}_{\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k} \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione. Per ogni $n > m$, la somma parziale n -esima della serie vale:

$$s_n = s_m + \sum_{k=m+1}^n a_k$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, abbiamo:

$$\begin{aligned} s &= s_m + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n a_k \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Passando ora al limite per $m \rightarrow +\infty$, abbiamo:

$$s = s + \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = 0$$

ovvero la tesi del teorema. □

Questo teorema ci dice che, se una serie è convergente, allora il valore $s - s_m$, ovvero l'errore che si commette approssimando la somma s con la somma parziale s_m , tende a zero per $m \rightarrow +\infty$. In altre parole, la coda di una serie convergente tende a zero per m che tende a infinito.

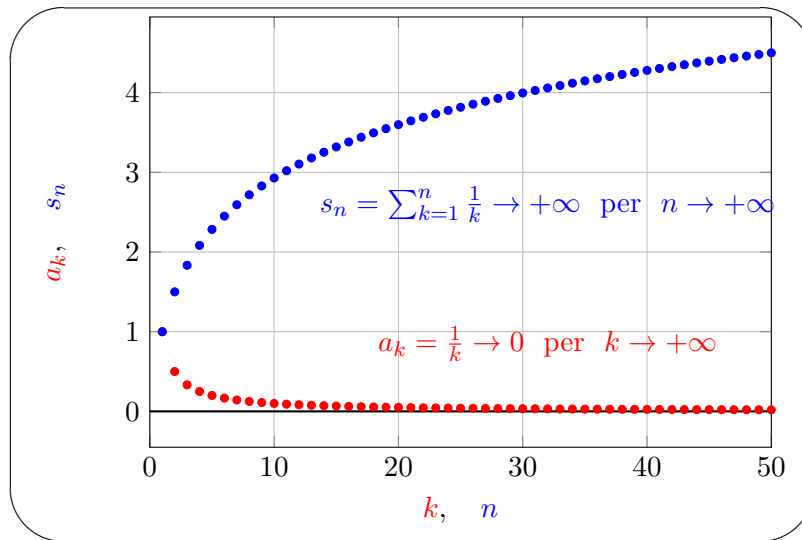
1.1.3 Serie armonica**Definizione 1.8: di serie armonica**

Si dice **serie armonica** la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Teorema 1.9: del carattere della serie armonica

La serie armonica è divergente a $+\infty$

- Graficamente abbiamo:



La serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è un controesempio che dimostra la (1.2), dato che:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{è divergente a } +\infty$$

- Prima di dimostrare il teorema, osserviamo che per determinati valori di n le somme parziali sono:

$$\underbrace{s_1}_{=s_{2^0}} = 1 + \frac{0}{2}, \quad \underbrace{s_2}_{=s_{2^1}} = s_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2},$$

$$\underbrace{s_4}_{=s_{2^2}} = s_2 + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$\underbrace{s_8}_{=s_{2^3}} = s_4 + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$\underbrace{s_{16}}_{=s_{2^4}} = s_8 + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{\geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su 2^n che

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Primo passo dell'induzione. Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa $s_{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2}$ cioè $1 \geq 1$ che è evidentemente vero.

Passo induttivo. Supponiamo che sia vero per 2^{n-1} e proviamolo per 2^n . Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$s_{2^{n-1}} \geq 1 + \frac{n-1}{2}$$

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= s_{2^{n-1}} + \underbrace{\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \left(\frac{1}{k}\right)}_{\geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} \quad \text{quindi} \quad s_{2^n} \geq 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \\ &\geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto per 2^n .

Abbiamo quindi:

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

e $\{s_n\}$ è illimitata superiormente e anche monotona crescente, visto che $a_k = 1/k > 0, \forall k > 1$. Di conseguenza $\{s_n\}$ diverge a $+\infty$ per il teorema di monotonia delle successioni e la serie armonica diverge a $+\infty$. □

La successione $a_k = 1/k, \forall k \geq 1$, della serie armonica è a termini positivi quindi la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente e divergente dato che è illimitata.

1.1.4 Serie geometrica

Definizione 1.10: di serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, si dice **serie geometrica di ragione q** la serie $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Teorema 1.11: del carattere e somma della serie geometrica

Data la ragione $q \in \mathbb{R}$,

$$\text{la serie geometrica } \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Se la serie geometrica è convergente, la somma s vale $\frac{1}{1-q}$

Dimostrazione. Dati $q \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, la somma parziale n -esima della serie geometrica vale:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{se } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

dato che equivale alla somma dei primi $n + 1$ termini della progressione geometrica. Inoltre, abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Quindi, se $q \neq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - q^{n+1}) = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

e se $q = 1$ abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$$

□

- Dati la ragione $q \in \mathbb{R}$ e un primo termine $a \in \mathbb{R}$, il risultato si estende alla serie $\sum_{k=0}^{\infty} a q^k$ dei termini della progressione geometrica:

$$\text{la serie } \sum_{k=0}^{\infty} a q^k \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{convergente, con somma } 0 & \text{se } a = 0 \\ \text{convergente, con somma } \frac{a}{1-q} & \text{se } a \neq 0 \text{ e } |q| < 1 \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } a > 0 \text{ e } q \geq 1 \\ \text{divergente a } -\infty & \text{se } a < 0 \text{ e } q \geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } a \neq 0 \text{ e } q \leq -1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Infatti, se $a = 0$ tutti i termini della serie sono nulli e quindi $s_n = 0$ per ogni n . Se invece $a \neq 0$, per il prodotto per una costante delle sommatorie la somma parziale n -esima è:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a q^k = a \sum_{k=0}^n q^k$$

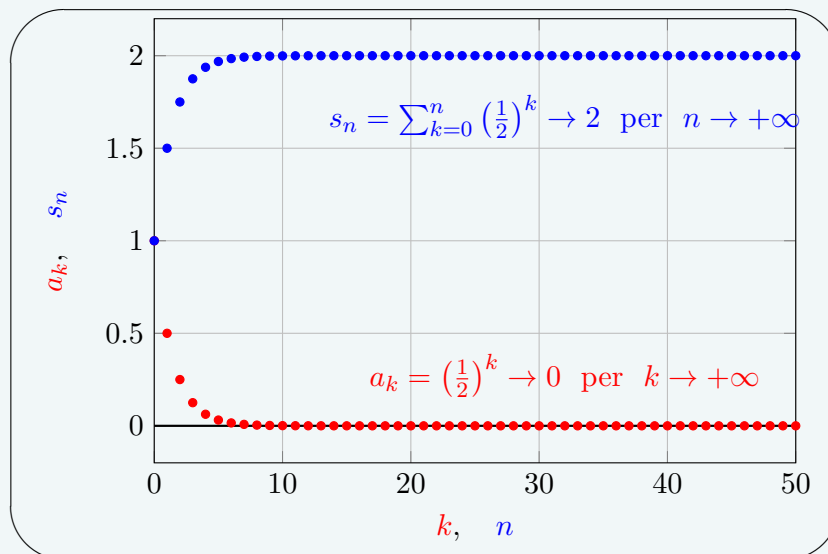
e quindi, per il teorema sul limite del prodotto di una costante per una successione, $\{s_n\}$ ha lo stesso carattere della successione delle somme parziali di $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, con il limite moltiplicato per a (nei casi divergenti il segno di a decide fra $+\infty$ e $-\infty$).

Esempio 1.2: di serie geometrica

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

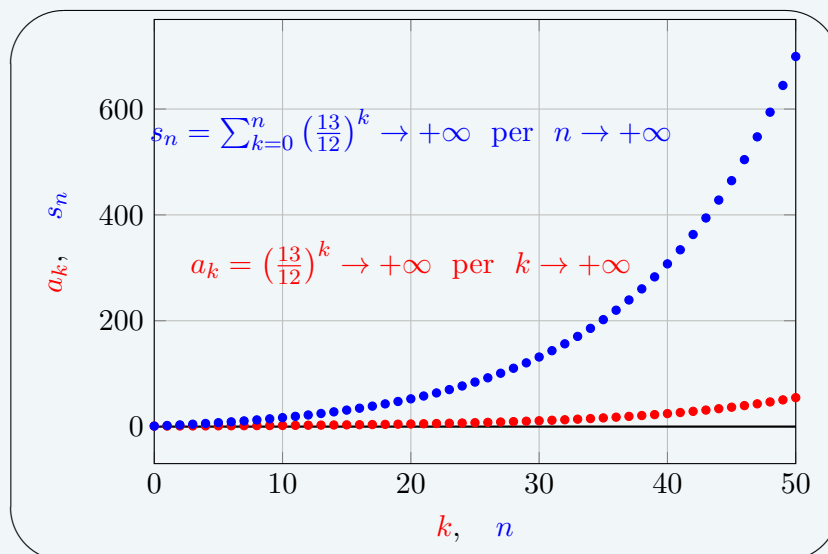
È una serie geometrica di ragione $q = 1/2$ quindi è convergente e la somma s vale $1/(1 - 1/2) = 2$.



Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{13}{12}\right)^k$$

È una serie geometrica di ragione $q = 13/12$ quindi è divergente.



1.1.5 Serie aritmetica

Definizione 1.12: di serie aritmetica

Dati il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $d \in \mathbb{R}$, si dice **serie aritmetica** la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (a + k d)$

- I termini della serie aritmetica sono i termini della progressione aritmetica di primo termine a e ragione d , cioè $a, a + d, a + 2d, \dots$. Come per la serie geometrica, il primo termine è in posizione $k = 0$.

Teorema 1.13: del carattere e somma della serie aritmetica

Dati il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $d \in \mathbb{R}$,

$$\text{la serie aritmetica } \sum_{k=0}^{\infty} (a + k d) \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & \text{se } d > 0 \\ \text{divergente a } -\infty & \text{se } d < 0 \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } d = 0 \text{ e } a > 0 \\ \text{divergente a } -\infty & \text{se } d = 0 \text{ e } a < 0 \\ \text{convergente} & \text{se } d = 0 \text{ e } a = 0 \end{cases}$$

Se la serie aritmetica è convergente, la somma s vale 0

Dimostrazione. Dati $a, d \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, la somma parziale n -esima della serie aritmetica vale:

$$s_n = \sum_{k=0}^n (a + k d) = a(n+1) + d \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{d}{2} n^2 + \left(a + \frac{d}{2} \right) n + a$$

dato che equivale alla somma dei primi $n + 1$ termini della progressione aritmetica. Quindi, se $d \neq 0$, raccogliendo il termine di grado massimo abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{2} n^2 \left(1 + \underbrace{\frac{2a+d}{dn}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{2a}{dn^2}}_{\rightarrow 0} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \end{cases}$$

e se $d = 0$ abbiamo $s_n = a(n+1)$ e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a(n+1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

□

La serie aritmetica è quindi convergente solo nel caso banale $a = d = 0$, in cui tutti i termini sono nulli, e non è mai irregolare (a differenza della serie geometrica, che è irregolare per $q \leq -1$).

- Che la serie aritmetica non possa convergere, tranne nel caso banale, si vede anche dalla condizione necessaria di convergenza (1.1). Il termine generale è $a_k = a + k d$ e abbiamo:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a + k d) = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \\ a & \text{se } d = 0 \end{cases}$$

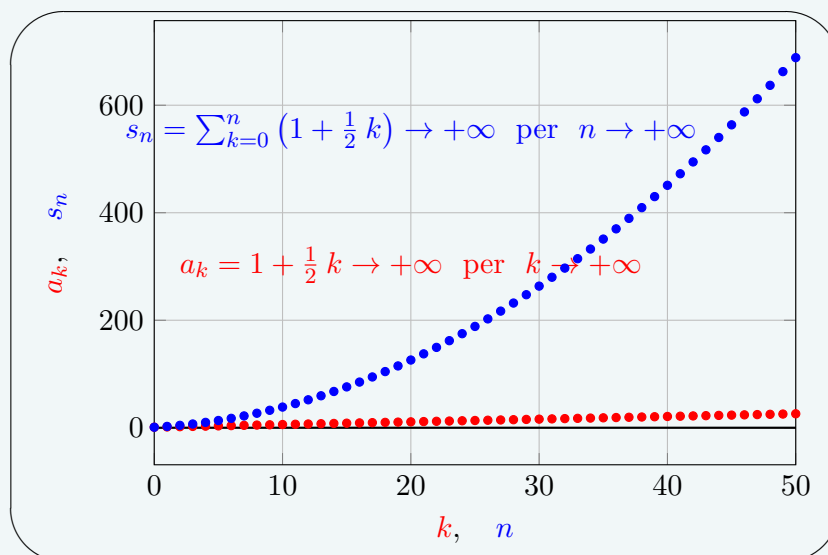
cioè $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ solo se $d = 0$ e $a = 0$. In tutti gli altri casi la contronominale di (1.1) assicura che la serie non è convergente. La condizione necessaria non dice però *quale* sia il carattere: a stabilire che la serie è divergente, e con quale segno, è il calcolo delle somme parziali fatto nella dimostrazione.

Esempio 1.3: di serie aritmetica

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} k \right)$$

È una serie aritmetica di primo termine $a = 1$ e ragione $d = 1/2$. Dato che $d > 0$, la serie è divergente a $+\infty$.



1.1.6 Serie telescopica

Definizione 1.14: di serie telescopica

Si dice **serie telescopica** una serie con la forma:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \quad \text{dove } \{b_k\} \text{ è una successione}$$

Teorema 1.15: del carattere e somma della serie telescopica

Una serie telescopica converge, diverge o è irregolare a seconda che la successione $\{b_k\}$ rispettivamente converga, diverga o sia irregolare.

$$\text{Se } \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \ell \in \mathbb{R}^* \quad \text{allora} \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_{n_0} - \underbrace{\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k}_{=\ell \in \mathbb{R}^*}$$

Inoltre, se $\ell \in \mathbb{R}$, allora la serie telescopica è convergente e la somma s vale $b_{n_0} - \ell$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=n_0}^{n_0+n} (b_k - b_{k+1}) \\ &= (b_{n_0} - b_{n_0+1}) + (b_{n_0+1} - b_{n_0+2}) + \dots + (b_{n_0+n} - b_{n_0+n+1}) \\ &= b_{n_0} - b_{n_0+n+1} \end{aligned}$$

quindi:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_{n_0} - b_{n_0+n+1}) = b_{n_0} - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

□

Osservazione 1.16

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, detta **serie di Mengoli**, è convergente e la somma s è uguale a 1.

Dimostrazione. Abbiamo:

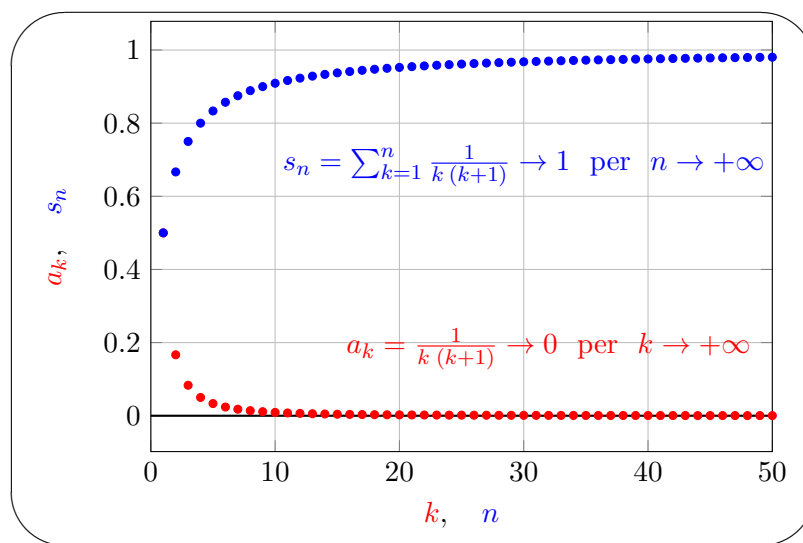
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{=b_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{=b_{k+1}}$$

La serie di Mengoli ha quindi la forma:

$$b_k - b_{k+1} \quad \text{con} \quad b_k = \frac{1}{k} \quad \text{e inoltre} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

quindi è una serie telescopica convergente ($n_0 = 1$) e inoltre $s = b_1 = 1$. $\square$

- Graficamente abbiamo:



Dimostrazione. **Dimostrazione alternativa**

Per ogni $n \geq 1$, il valore della somma parziale della serie di Mengoli è:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Di conseguenza la serie di Mengoli è convergente e la sua somma s vale 1. $\square$

Esempio 1.4: serie telescopica

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} &= \frac{\alpha}{3k+2} - \frac{\beta}{3k+5} = \frac{\alpha(3k+5) - \beta(3k+2)}{(3k+2)(3k+5)} \\ &= \frac{3(\alpha - \beta)k + 5\alpha - 2\beta}{(3k+2)(3k+5)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(\alpha - \beta) = 0 \\ 5\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta, \quad 3\alpha = 1 \quad \text{quindi} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

di conseguenza:

$$\frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+5} \right) = \frac{1}{3} \left(\underbrace{\frac{1}{3k+2}}_{=b_k} - \underbrace{\frac{1}{3(k+1)+2}}_{=b_{k+1}} \right)$$

La serie ha quindi la forma:

$$b_k - b_{k+1} \quad \text{con} \quad b_k = \frac{1}{3k+2} \quad \text{e inoltre} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3k+2} = 0$$

ovvero una serie telescopica ($n_0 = 1$) e abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{1}{3} \left(b_1 - \underbrace{\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{1}{3} b_1 = \frac{1}{15}$$

Quindi è una serie telescopica convergente e la somma s vale $\frac{1}{15}$.

Serie numeriche a termini non negativi

2.1 Serie numeriche a termini non negativi

Una serie $\sum a_k$ a **termini non negativi** (o positivi) è **regolare**, ovvero o è convergente o è divergente a $+\infty$ (non può essere irregolare come abbiamo dimostrato). Tale serie converge se e solo se la successione delle somme parziali è limitata.

2.1.1 Criterio del confronto

Teorema 2.1: del criterio del confronto

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ due successioni a termini non negativi tali che $a_k \leq b_k$, definitivamente, allora:

$$\begin{aligned} i) \quad \sum b_k \text{ convergente} &\Rightarrow \sum a_k \text{ convergente} \\ ii) \quad \sum a_k \text{ divergente} &\Rightarrow \sum b_k \text{ divergente} \end{aligned}$$

- La serie $\sum b_k$ viene detta **maggiorante** mentre la serie $\sum a_k$ viene detta **minorante**.

Dimostrazione. Dato che $a_k \leq b_k$, definitivamente, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_k \leq b_k, \quad \forall k \geq m$$

Consideriamo ora le somme parziali n -esime delle code delle due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ con $n > m$:

$$s_n^a = \sum_{k=m+1}^n a_k \quad \text{e} \quad s_n^b = \sum_{k=m+1}^n b_k$$

Poiché $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq m$, abbiamo

$$0 \leq s_n^a \leq s_n^b, \quad \forall n \geq m \tag{2.1}$$

Le successioni $\{s_n^a\}$ e $\{s_n^b\}$ sono regolari, dato che $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono a termini non negativi. Dunque le tesi *i)* e *ii)* sono logicamente equivalenti, perciò basta dimostrare la

seconda.

Affermare $\sum a_n$ divergente, per definizione di serie divergente, significa che $s_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Inoltre dato che ogni coda ha lo stesso carattere della serie di partenza abbiamo $s_n^a \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$.

Dalla (2.1), per il teorema del confronto per le successioni, anche $s_n^b \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi la coda di $\{b_k\}$ è divergente e di conseguenza $\sum b_n$ è divergente. $\square$

Osservazione 2.2

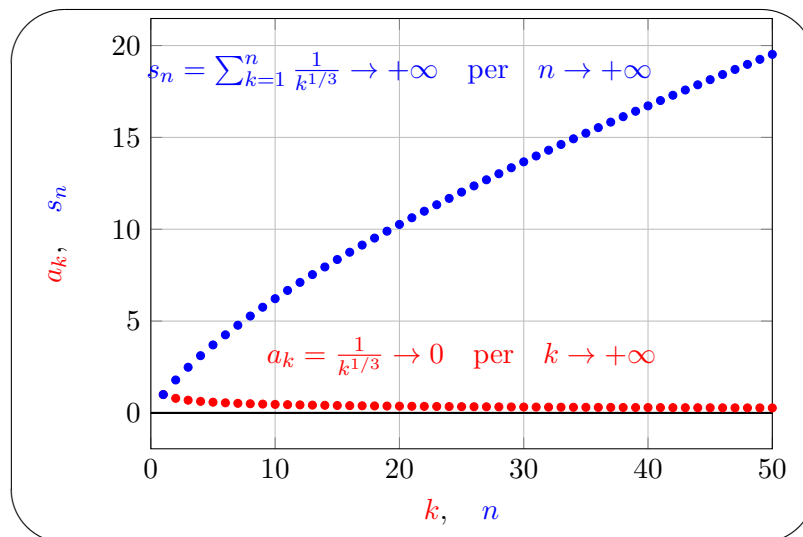
Dato $\alpha \leq 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è divergente a $+\infty$.

Dimostrazione. Con $\alpha = 1$ abbiamo la serie armonica che diverge a $+\infty$. Con $\alpha < 1$, la serie è maggiorante della serie armonica, dato che:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad \text{e} \quad \alpha < 1$$

quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è divergente per il criterio del confronto. $\square$

- Graficamente, ad esempio con $\alpha = \frac{1}{3}$, abbiamo:



2.1.2 Criterio del confronto asintotico

Teorema 2.3: del criterio del confronto asintotico

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ due successioni a termini positivi. Se le successioni sono asintotiche, ovvero se:

$$a_k \sim b_k \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono regolari e hanno lo stesso carattere, cioè o sono entrambe convergenti o sono entrambe divergenti.

Dimostrazione. Le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono regolari perché le successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono a termini positivi. Dato che $a_k \sim b_k$ per $k \rightarrow +\infty$, allora:

$$\frac{a_k}{b_k} \rightarrow 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq m$ abbiamo:

$$1 - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < 1 + \varepsilon \quad \text{e quindi} \quad (1 - \varepsilon) b_k < a_k < (1 + \varepsilon) b_k \quad \text{dato che } b_k > 0, \forall k$$

Abbiamo quindi dimostrato che $(1 - \varepsilon) b_k < a_k < (1 + \varepsilon) b_k$, definitivamente. Quindi per il teorema del criterio del confronto le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere.

La prima delle due disuguaglianze implica che se $\sum a_k$ è convergente anche $\sum b_k$ è convergente, mentre la seconda implica che se $\sum a_k$ è divergente anche $\sum b_k$ è divergente. $\square$

Osservazione 2.4

Dato $\alpha \geq 2$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è convergente.

Dimostrazione. Con $\alpha = 2$ abbiamo:

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

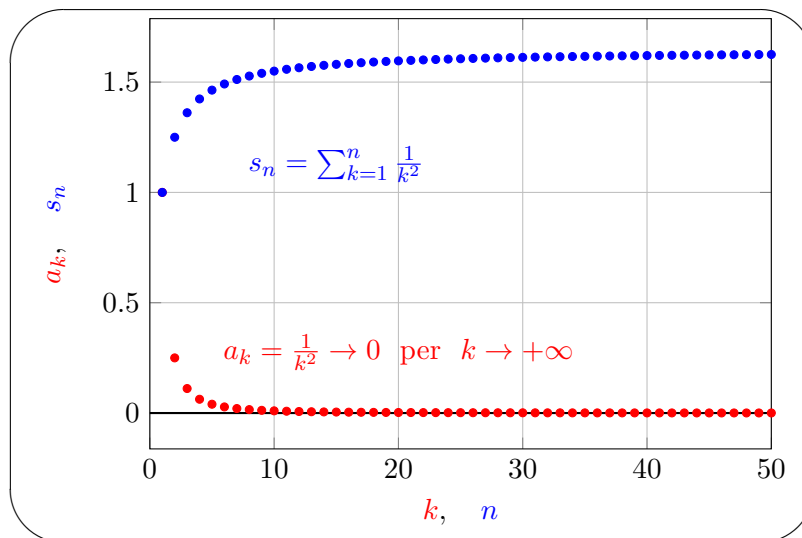
e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ converge (serie di Mengoli). Quindi per il criterio del confronto asintotico anche $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

Con $\alpha > 2$, la serie è minorante della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, dato che:

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad \text{e} \quad \alpha > 2$$

quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è convergente per il criterio del confronto. $\square$

- Graficamente, ad esempio con $\alpha = 2$, abbiamo:



Esempio 2.1: criterio del confronto asintotico

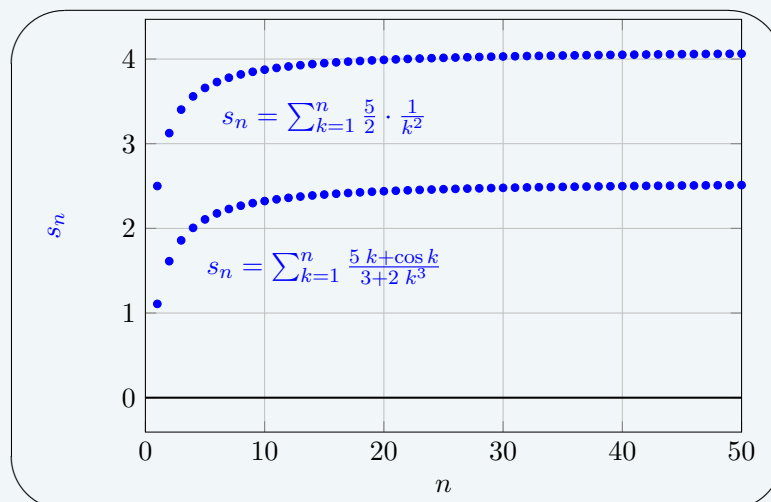
Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k + \cos k}{3 + 2k^3}$$

Abbiamo:

$$\frac{5k + \cos k}{3 + 2k^3} \sim \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{k^2} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{k^2} \quad \text{converge}$$

quindi la serie è convergente per il criterio del confronto asintotico.



Anche se le successioni sono asintotiche le corrispondenti serie potrebbero però non avere la stessa somma.

2.1.3 Criterio di condensazione

Teorema 2.5: del criterio di condensazione

Se $\{a_k\}$ è una successione definitivamente decrescente a termini non negativi, allora le serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ sono regolari e hanno lo stesso carattere cioè o sono entrambe convergenti o sono entrambe divergenti.

- Prima di dimostrare il teorema, consideriamo la successione $\{\tilde{s}_n\}$ delle somme parziali della successione $\{2^k a_{2^k}\}$, ovvero la successione:

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} \quad \forall n \geq 0$$

e deriviamo due importanti relazioni con la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali della successione $\{a_k\}$, ovvero la successione:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \forall n \geq 1$$

- Osserviamo che, per determinati valori di n , le somme parziali s_n sono:

$$\begin{aligned} \underbrace{s_1}_{= s_{2^1-1}} &= a_1, & \underbrace{s_3}_{= s_{2^2-1}} &= s_1 + a_2 + \underbrace{a_3}_{\leq a_2} \leq a_1 + 2 a_2 \\ \underbrace{s_7}_{= s_{2^3-1}} &= s_3 + a_4 + \underbrace{a_5}_{\leq a_4} + \underbrace{a_6}_{\leq a_4} + \underbrace{a_7}_{\leq a_4} \leq a_1 + 2 a_2 + 4 a_4 \\ \underbrace{s_{15}}_{= s_{2^4-1}} &= s_7 + a_8 + \underbrace{a_9}_{\leq a_8} + \underbrace{a_{10}}_{\leq a_8} + \underbrace{a_{11}}_{\leq a_8} \\ &\quad + \underbrace{a_{12}}_{\leq a_8} + \underbrace{a_{13}}_{\leq a_8} + \underbrace{a_{14}}_{\leq a_8} + \underbrace{a_{15}}_{\leq a_8} \leq a_1 + 2 a_2 + 4 a_4 + 8 a_8 \end{aligned}$$

Osservazione 2.6

Data una successione $\{a_k\}$ definitivamente decrescente a termini non negativi, abbiamo:

$$s_{2^n-1} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}}_{=\tilde{s}_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su 2^n che

$$s_{2^n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \quad \forall n \geq 1$$

Primo passo dell'induzione. Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa $s_{2^1-1} \leq 2^0 a_1$ cioè $a_1 \leq a_1$ che è evidentemente vero.

Passo induttivo. Supponiamo che sia vero per 2^{n-1} e proviamolo per 2^n . Per ipotesi induttiva, abbiamo $s_{2^{n-1}-1} \leq \sum_{k=0}^{n-2} 2^k a_{2^k}$. Abbiamo inoltre:

$$s_{2^n-1} = s_{2^{n-1}-1} + \underbrace{\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i}_{\leq 2^{n-1} a_{2^{n-1}}} \quad \text{quindi} \quad s_{2^n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-2} 2^k a_{2^k} + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}$$

che è esattamente l'asserto voluto per 2^n . □

- Osserviamo ora che i valori di $\tilde{s}_n$ sono:

$$\tilde{s}_0 = a_1 \leq 2 a_1 = 2 \underbrace{s_1}_{=s_{2^0}}, \quad \tilde{s}_1 = \tilde{s}_0 + 2 a_2 \leq 2 s_1 + 2 a_2 = 2 \underbrace{s_2}_{=s_{2^1}}$$

$$\tilde{s}_2 = \tilde{s}_1 + 4 a_4 \leq 2 s_2 + 2 a_3 + 2 a_4 = 2 \underbrace{s_4}_{=s_{2^2}} \quad (\text{dato che } a_4 \leq a_3)$$

$$\tilde{s}_3 = \tilde{s}_2 + 8 a_8 \leq 2 s_4 + 2 a_5 + 2 a_6 + 2 a_7 + 2 a_8 = 2 \underbrace{s_8}_{=s_{2^3}}$$

(dato che $a_8 \leq a_7 \leq a_6 \leq a_5$)

Osservazione 2.7

Data una successione $\{a_k\}$ definitivamente decrescente a termini non negativi, abbiamo:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}}_{=\tilde{s}_n} \leq 2 s_{2^n} \quad \forall n \geq 0 \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su 2^n che

$$\tilde{s}_n \leq 2 s_{2^n} \quad \forall n \geq 0$$

Primo passo dell'induzione. Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa $\tilde{s}_0 \leq 2 s_{2^0} = 2 s_1$ cioè $a_1 \leq 2 a_1$ che è evidentemente vero.

Passo induttivo. Supponiamo che sia vero per $n - 1$ e proviamolo per n . Per ipotesi induttiva, abbiamo $\tilde{s}_{n-1} \leq 2 s_{2^{n-1}}$. Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n &= \tilde{s}_{n-1} + \underbrace{2^n a_{2^n}}_{2^n} \quad \text{quindi} \quad \tilde{s}_n \leq 2 s_{2^{n-1}} + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} 2 a_i = 2 s_{2^n} \\ &\leq \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} 2 a_i \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto per n . □

- Siamo ora in grado di dimostrare il teorema.

Dimostrazione. Dalla relazione (2.2) abbiamo:

$$s_{2^n-1} \leq \tilde{s}_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

Quindi se $\{\tilde{s}_n\}$ è convergente, ovvero se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è convergente, la sottosuccessione $\{s_{2^n-1}\}$ è limitata. Dato che $\{s_n\}$ è monotona tutta la successione $\{s_n\}$ risulta limitata e convergente per il teorema di monotonia delle successioni. Di conseguenza, se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è convergente anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente.

Dalla relazione (2.3) abbiamo:

$$\tilde{s}_n \leq 2 s_{2^n}, \quad \forall n \geq 0$$

Quindi se $\{s_n\}$ è convergente, ovvero se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora la sottosuccessione $\{s_{2^n}\}$ è convergente (dato che $\{s_n\}$ è monotona). Di conseguenza per confronto anche $\{\tilde{s}_n\}$ è convergente ovvero $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

Inoltre dato che $\{a_k\}$ è a termini non negativi non può essere irregolare, di conseguenza abbiamo anche:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergente} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ divergente}$$

che completa la dimostrazione del teorema. □

Data una successione $\{a_k\}$ definitivamente decrescente a termini non negativi, abbiamo

dimostrato che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergente/divergente} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ convergente/divergente}$$

Quindi la condizione di convergenza/divergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ è una condizione necessaria e sufficiente alla convergenza/divergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2.1.4 Serie armonica generalizzata

Definizione 2.8: di serie armonica generalizzata

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si dice **serie armonica generalizzata** la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Teorema 2.9: del carattere della serie armonica generalizzata

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$,

la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ è $\begin{cases} \text{divergente a } +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{convergente} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

Dimostrazione. Abbiamo stabilito che diverge per $\alpha \leq 1$. Per $\alpha > 1$, la successione $\left\{ \frac{1}{k^\alpha} \right\}$ è una successione decrescente e a termini positivi. Abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$$

ovvero una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$ che converge se e solo se $2^{1-\alpha} < 1$ ovvero se $1 - \alpha < 0$. Quindi per $\alpha > 1$, per il criterio di condensazione, la serie converge. $\square$

2.1.5 Criterio del passaggio dal discreto al continuo

- Gli strumenti utili a stabilire stime asintotiche di funzioni, si possono usare anche per ottenere stime asintotiche di successioni (**passaggio dal discreto al continuo**) e forniscono strumenti utili per lo studio del carattere di una serie a termini positivi.

Esempio 2.2: passaggio dal discreto al continuo

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{k}$$

Dall'equivalenza asintotica

$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) \quad \text{per} \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

abbiamo

$$\frac{e^{1/k} - 1}{k} \sim \frac{1}{k^2} \quad \text{per} \quad k \rightarrow +\infty$$

Perciò la serie, a termini positivi, per confronto asintotico con la serie di $1/k^2$, converge.

Esempio 2.3: passaggio dal discreto al continuo

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k+3}{k+2} \right)$$

Abbiamo

$$\frac{k+3}{k+2} = 1 + \frac{1}{k+2} = 1 + \frac{1}{k+2}$$

Dall'equivalenza asintotica

$$\log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x) \quad \text{per} \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

abbiamo

$$\log \left(1 + \frac{1}{k+2} \right) \sim \frac{1}{k+2} \sim \frac{1}{k} \quad \text{per} \quad k \rightarrow +\infty$$

Dunque si tratta di una serie a termini positivi, il cui termine generale è asintotico a $1/k$. Per confronto con la serie armonica, questa serie diverge a $+\infty$.

Esempio 2.4: passaggio dal discreto al continuo

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} \right)$$

Dallo sviluppo di MacLaurin di terzo grado

$$\sin(\varepsilon(x)) = \varepsilon(x) - \frac{(\varepsilon(x))^3}{3!} + o\left((\varepsilon(x))^3\right) \quad \text{per} \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

abbiamo

$$\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \right) \sim \frac{1}{6k^3} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Perciò la serie, a termini positivi, per confronto asintotico con la serie di $1/(6k^3)$, converge.

2.1.6 Criterio della radice

Teorema 2.10: del criterio della radice

Sia $\{a_k\}$ una successione a termini non negativi. Se esiste il limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{allora la serie } \sum a_k \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \ell < 1 \text{ o } \ell = -\infty \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } \ell > 1 \text{ o } \ell = +\infty \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell < 1$. Poiché $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq m$:

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre, dato che $\ell < 1$, abbiamo $\ell < 1 - \varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$ opportuno. Per questo ε si ha dunque che, definitivamente:

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} < (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{quindi} \quad a_k < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k, \quad \forall k \geq m$$

Abbiamo quindi dimostrato che $a_k < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k$, definitivamente. La serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \quad \text{è convergente dato che } 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$$

Quindi per il teorema del criterio del confronto la serie di partenza converge.

Supponiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell > 1$. Poiché $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq m$:

$$\sqrt[k]{a_k} \geq \ell - \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre, dato che $\ell > 1$, abbiamo $\ell > 1 + \varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$ opportuno. Per questo ε si ha dunque che, definitivamente:

$$\sqrt[k]{a_k} \geq \ell - \frac{\varepsilon}{2} > (1 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{quindi} \quad a_k > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k, \quad \forall k \geq m$$

Abbiamo quindi dimostrato che $a_k > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k$, definitivamente. La serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \quad \text{è divergente dato che } 1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1$$

Quindi per il teorema del criterio del confronto la serie di partenza diverge.

□

Chiaramente questi ragionamenti rimangono rispettivamente validi anche se $\ell = -\infty$ oppure $+\infty$.

Osservazione 2.11

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} \cdot b^k$ con $\beta \in \mathbb{R}, b \geq 0$ è

convergente	se $b < 1$
divergente	se $b > 1$
convergente	se $b = 1$ e $\beta < -1$
divergente	se $b = 1$ e $\beta \geq -1$

Dimostrazione. È una serie a termini non negativi, abbiamo:

$$\sqrt[k]{k^{\beta} \cdot b^k} = b \cdot k^{\beta/k} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^{\beta/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \exp \left(\underbrace{\frac{\beta}{k} \cdot \log k}_{\rightarrow 0} \right) = 1$$

quindi, per il criterio della radice, con $b < 1$ converge e con $b > 1$ diverge. Se $b = 1$, la serie diventa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-\beta}}$$

ovvero una serie armonica generalizzata; con $\beta < -1$ è convergente, mentre con $\beta \geq -1$ è divergente. □

Osservazione 2.12

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} b^k / k^k$ con $b \geq 0$ è convergente

Dimostrazione. È una serie a termini non negativi, abbiamo:

$$\sqrt[k]{\frac{b^k}{k^k}} = \frac{b}{k} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad k \rightarrow +\infty$$

quindi la serie converge per il criterio della radice. □

2.1.7 Criterio del rapporto

Teorema 2.13: del criterio del rapporto

Sia $\{a_k\}$ una successione a termini positivi. Se esiste il limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{allora la serie } \sum a_k \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \ell < 1 \text{ o } \ell = -\infty \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } \ell > 1 \text{ o } \ell = +\infty \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k+1}/a_k = \ell < 1$. Ragionando come nella dimostrazione del criterio della radice, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq m$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

per un opportuno $\varepsilon > 0$. Ciò implica, ragionando iterativamente, che:

$$a_{k+1} < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_k < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{k-1} < \dots < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-m+1} a_m$$

Abbiamo quindi dimostrato che $a_k < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-m} a_m$, definitivamente. La serie geometrica:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-m} a_m \quad \text{è convergente dato che } 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$$

Quindi per il teorema del criterio del confronto la serie di partenza converge.

Supponiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k+1}/a_k = \ell > 1$. Ragionando come nella dimostrazione del criterio della radice, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq m$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

per un opportuno $\varepsilon > 0$. Ciò implica, ragionando iterativamente, che:

$$a_{k+1} > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_k > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{k-1} > \dots > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-m+1} a_m$$

Abbiamo quindi dimostrato che $a_k > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-m} a_m$, definitivamente. La serie geometrica:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-m} a_m \quad \text{è divergente dato che } 1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1$$

Quindi per il teorema del criterio del confronto la serie di partenza diverge. $\square$

Chiaramente questi ragionamenti rimangono rispettivamente validi anche se $\ell = -\infty$ oppure $+\infty$.

Osservazione 2.14

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Perciò la serie a termini non negativi converge per il criterio del rapporto. La dimostrazione che la somma della serie è uguale ad e verrà data in seguito utilizzando le serie di funzioni. $\square$

2.1.8 Serie numeriche a termini non positivi

- Sappiamo che il carattere di una serie non cambia se ne alteriamo un numero finito di termini. Di conseguenza, i criteri per le serie a termini non negativi, si applicano anche alle serie con termini definitivamente non negativi.
- Raccogliendo un segno meno dall'intera serie poi, si vede che questi criteri si possono applicare anche alle serie a termini non positivi, e quindi alle serie a termini definitivamente non positivi.

In sintesi, quindi, i criteri visti si applicano alle serie che hanno tutti i termini (tranne un numero finito) dello stesso segno.

Serie numeriche a termini di segno variabile

3.1 Serie a termini di segno variabile

Definizione 3.1: di serie assolutamente convergente

Una serie $\sum a_k$ è assolutamente convergente se converge la serie $\sum |a_k|$.

Teorema 3.2

Se una serie $\sum a_k$ converge assolutamente allora converge.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, sia $n_0 = 0$ e consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k)$$

È una serie a termini nonnegativi in quanto, per ogni $k \in \mathbb{N}$, abbiamo:

$$\begin{cases} |a_k| - a_k = -2a_k \geq 0 & \text{se } a_k < 0 \\ |a_k| - a_k = 0 & \text{se } a_k \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre per la disuguaglianza triangolare, per ogni $k \in \mathbb{N}$, abbiamo:

$$\underbrace{|a_k| - a_k}_{\geq 0} = ||a_k| - a_k| \leq |a_k| + |a_k| = 2|a_k|$$

Dunque per il criterio del confronto tra serie a termini non negativi, abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ convergente} \implies \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k) \text{ convergente}$$

Dato che per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $a_k = |a_k| - (|a_k| - a_k)$ e che le serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ e $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k)$ convergono, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k)$$

ovvero che la serie è data dalla differenza di due serie convergenti. Di conseguenza anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente. $\square$

- La seguente è una dimostrazione alternativa.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, sia $n_0 = 0$ e decomponiamo la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali in due successioni, la prima contenente solo i termini positivi e la seconda solo i termini negativi:

$$s_n^+ = \sum_{k \in \{0,1,\dots,n\}: a_k > 0} a_k \quad \text{e} \quad s_n^- = \sum_{k \in \{0,1,\dots,n\}: a_k < 0} -a_k \quad \text{quindi} \quad s_n = s_n^+ - s_n^-$$

Di conseguenza è sufficiente mostrare che le successioni $\{s_n^+\}$ e $\{s_n^-\}$ sono convergenti per concludere che $\{s_n\}$ converge, e quindi che la serie $\sum a_k$ converge.

Osserviamo che $\{s_n^+\}$ e $\{s_n^-\}$ sono successioni monotone non decrescenti e inoltre, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo:

$$s_n^+ \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{e} \quad s_n^- \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$$

D'altro canto, per ipotesi la serie $\sum a_k$ converge assolutamente, ossia $\sum |a_k|$ converge, e quindi la quantità $\sum_{k=0}^n |a_k|$ è limitata; perciò le successioni $\{s_n^+\}$ e $\{s_n^-\}$ sono superiormente limitate e non decrescenti, e pertanto convergono, per il teorema di monotonia delle successioni. $\square$

Esempio 3.1: convergenza assoluta

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha > 1$$

Abbiamo:

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right| = \frac{1}{k^\alpha}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k > 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{è convergente per} \quad \alpha > 1$$

Perciò la serie converge assolutamente e quindi converge.

La convergenza assoluta implica la convergenza ordinaria, detta anche convergenza semplice:

$$\sum |a_k| \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum a_k \text{ convergente} \quad (3.1)$$

ma il viceversa non è vero (daremo più avanti un controesempio):

$$\sum a_k \text{ convergente} \quad \nRightarrow \quad \sum |a_k| \text{ convergente} \quad (3.2)$$

Quindi la convergenza assoluta è condizione sufficiente ma non necessaria alla convergenza ordinaria.

3.1.1 Serie a termini di segno alternato e criterio di Leibniz

- Tra le serie a termini di segno variabile, un caso particolarmente semplice è costituito dalle serie a segni alterni, per le quali vale il seguente criterio di convergenza.

Teorema 3.3: del criterio di Leibniz

Sia data la serie

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{con} \quad a_k \geq 0, \forall k$$

Se la successione $\{a_k\}$ è decrescente e $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, allora la serie è convergente. Inoltre:

$$s_{2n} = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k a_k \downarrow s \quad \text{e} \quad s_{2n+1} = \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k a_k \uparrow s \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

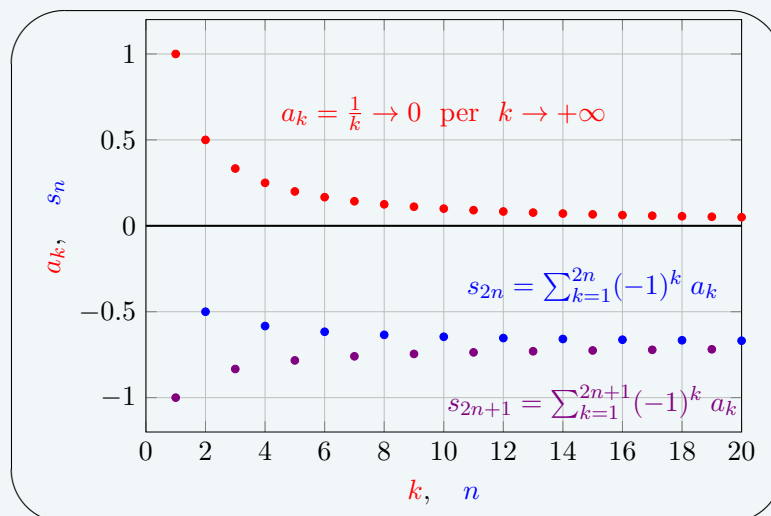
- Le somme parziali di indice pari approssimano la somma s per eccesso e quelle di indice dispari per difetto.
- Il criterio di Leibniz può chiaramente essere applicato anche se i termini sono definitivamente di segno alternato e la successione $\{a_k\}$ è definitivamente decrescente.

Esempio 3.2: criterio di Leibniz

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

La successione $a_k = \frac{1}{k}$ è decrescente e non-negativa. Inoltre $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ quindi rispetta le due condizioni del teorema del criterio di Leibniz. Di conseguenza, la serie è convergente.



La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge ed è un controesempio di (3.2), ovvero di serie che converge ma non converge assolutamente dato che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge (serie armonica)}$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ con $n_0 = 0$ e le due successioni, estratte da questa, $\{s_{2n}\}$, e $\{s_{2n+1}\}$.

Per $\{s_{2n}\}$ abbiamo:

$$s_0 = a_0, \quad s_2 = s_0 - a_1 + \underbrace{a_2}_{\leq a_1} \leq s_0, \quad s_4 = s_2 - a_3 + \underbrace{a_4}_{\leq a_3} \leq s_2, \quad \dots$$

quindi la successione $\{s_{2n}\}$ è monotona decrescente.

Per $\{s_{2n+1}\}$ abbiamo:

$$s_1 = a_0 - a_1, \quad s_3 = s_1 + a_2 - \underbrace{a_3}_{\leq a_2} \geq s_1, \quad s_5 = s_3 + a_4 - \underbrace{a_5}_{\leq a_4} \geq s_3, \quad \dots$$

quindi la successione $\{s_{2n+1}\}$ è monotona crescente.

Inoltre abbiamo:

$$s_1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0$$

perciò $\{s_{2n+1}\}$ è superiormente limitata e $\{s_{2n}\}$ è inferiormente limitata. Le due successioni sono quindi convergenti, per il teorema di monotonia delle successioni.

Le due successioni convergono allo stesso limite, perché

$$0 \leq s_{2n} - s_{2n+1} \leq a_{2n+1} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

Chiamato s questo limite, dato che $\{s_{2n}\}$ è monotona decrescente e $\{s_{2n+1}\}$ è monotona crescente abbiamo:

$$s_{2n} = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k a_k \downarrow s \quad \text{e} \quad s_{2n+1} = \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k a_k \uparrow s \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

Quindi la serie è convergente dato che $s_{2n+1} \rightarrow s$ e $s_{2n} \rightarrow s$ per $n \rightarrow +\infty$ e di conseguenza abbiamo:

$$s_n \rightarrow s \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

□

Corollario 3.4: del teorema del criterio di Leibniz

Data una serie che rispetta le ipotesi del teorema del criterio di Leibniz, abbiamo:

$$\underbrace{|s - s_m|}_{=|\sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k a_k|} \leq a_{m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- Per ogni m , l'errore che si commette approssimando s con s_m è, in valore assoluto, maggiore del valore del primo termine omissso. In altre parole, la coda della serie tende a un valore minore o uguale a a_{m+1} .

Dimostrazione. Poiché

$$s_{2n+1} \uparrow s \quad \text{e} \quad s_{2n} \downarrow s \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

abbiamo quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{2n-1} \leq s \leq s_{2n} \quad \text{e} \quad s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}$$

da cui si deduce

$$0 \leq s - s_{2n-1} \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \quad \text{e} \quad 0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$$

Perciò per ogni m , sia pari che dispari, si ha:

$$|s - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{m+1}$$

□

Esempio 3.3: criterio di Leibniz

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k-1}{k^2+k}$$

Abbiamo:

$$a_k = \frac{k-1}{k^2+k} = \frac{k-1}{k(k+1)} \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{k-1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

quindi la serie non converge assolutamente. La serie però è decrescente per $k \geq 2$ dato che:

$$\underbrace{\frac{k}{(k+1)(k+2)}}_{=a_{k+1}} \leq \underbrace{\frac{k-1}{k(k+1)}}_{=a_k} \iff k^2 \leq k^2 + k - 2 \iff k \geq 2$$

quindi la serie converge per il criterio di Leibniz dato che è decrescente definitivamente.

Esempio 3.4: criterio di Leibniz

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\log k}{k}$$

Abbiamo:

$$a_k = \frac{\log k}{k} \geq 0, \forall k \geq 2 \quad \text{e} \quad \frac{\log k}{k} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

inoltre

$$\frac{\log k}{k} > \frac{1}{k} \quad \text{per } k \geq 3 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge}$$

quindi la serie non converge assolutamente. Dimostrare che la successione $\{a_k\}$ è decrescente per via algebrica è complicato, eseguiamo invece il passaggio dal discreto al continuo. Abbiamo, per $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 2$:

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \leq 0 \quad \text{per } x \geq e$$

Ne segue che f è decrescente per $x \geq e$; di conseguenza la successione $a_k = f(k)$ è decrescente per $k \geq 3$ (il primo intero $> e$). Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

se $\sum a_k$ converge e $\sum b_k$ converge allora $\sum (a_k + b_k)$ converge

se $\sum a_k$ converge e $\sum b_k$ diverge allora $\sum (a_k + b_k)$ diverge

si verifica vedendo la serie come limite della successione delle somme parziali, e applicando il teorema sul limite della somma.

Esempio 3.5: criterio di Leibniz

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1 + (-1)^k k^2}{k^3}$$

Scomponiamo nella somma di due serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1 + (-1)^k k^2}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Per la prima serie abbiamo:

$$\frac{k+1}{k^3} \geq 0, \forall k \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{k+1}{k^3} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

quindi converge per il criterio del confronto asintotico dato che:

$$\frac{k+1}{k^3} \sim \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{converge}$$

La seconda serie converge per il criterio di Leibniz; quindi la serie di partenza converge.

Esempio 3.6: criterio di Leibniz

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sqrt{k} + (-1)^k}{k} \right)$$

Scomponiamo nella somma di due serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sqrt{k} + (-1)^k}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

La prima serie converge per il criterio di Leibniz; la seconda diverge (serie armonica); quindi la serie di partenza diverge.

Esempio 3.7: criterio di Leibniz

Determiniamo il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Abbiamo:

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^k}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k > 1$$

inoltre la successione $a_k = \frac{1}{k}$ è decrescente e $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ quindi rispetta le due condizioni del teorema. Di conseguenza la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

Serie di funzioni

4.1 Serie di funzioni

- Le **serie di funzioni** sono serie numeriche dipendenti da un parametro x : quando queste serie convergono per ogni valore x appartenente a un certo intervallo, rappresentano delle **funzioni di nuovo tipo**
- Esistono due importanti classi di serie di funzioni: ovvero le serie trigonometriche e le serie di potenze. Tratteremo solo le **serie di potenze**, dette anche **serie di Taylor**, che si possono vedere come una estensione naturale degli sviluppi di Taylor.

4.1.1 Serie di Taylor delle funzioni trascendenti elementari

- Lo sviluppo/formula di Taylor con resto secondo Lagrange si può riscrivere nella forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + E_n(x) \quad (4.1)$$

dove l'errore di approssimazione secondo Lagrange è

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (4.2)$$

e c è un opportuno punto tra x_0 e x .

Definizione 4.1: serie di Taylor

Se una funzione f ha derivate di ogni ordine, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

è detta **serie di Taylor** della funzione f centrata in x_0 .

In un certo punto $x \in (a, b)$, se l'errore

$$E_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

allora la serie di Taylor è convergente e la sua somma equivale a $f(x)$. Ciò equivale a dire

che la somma parziale n -esima della serie ammette limite finito e tale limite è precisamente $f(x)$. In formule:

$$\underbrace{T_{n,x_0}(x)}_{\text{polinomio di Taylor}} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \rightarrow f(x) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Definizione 4.2: funzione sviluppabile in serie di Taylor in un intervallo

Data una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con derivate di ogni ordine, se

$$E_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty, \quad \forall x \in I \subseteq D$$

diremo che $f(x)$ è **sviluppabile in serie di Taylor** nell'intervallo I .

- Esistono funzioni (infinitamente differenziabili) che sono sviluppabili in serie di Taylor su tutta la retta dei reali, altre che lo sono solo su un intervallo limitato, altre per le quali l'intervallo si riduce a un punto solo (il punto x_0).
- Ci occupiamo ora delle tre funzioni trascendenti elementari:

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad f(x) = \cos x$$

che mostreremo essere sviluppabili in serie di Taylor su tutto $\mathbb{R}$. Sono tre funzioni trascendenti e non algebriche.

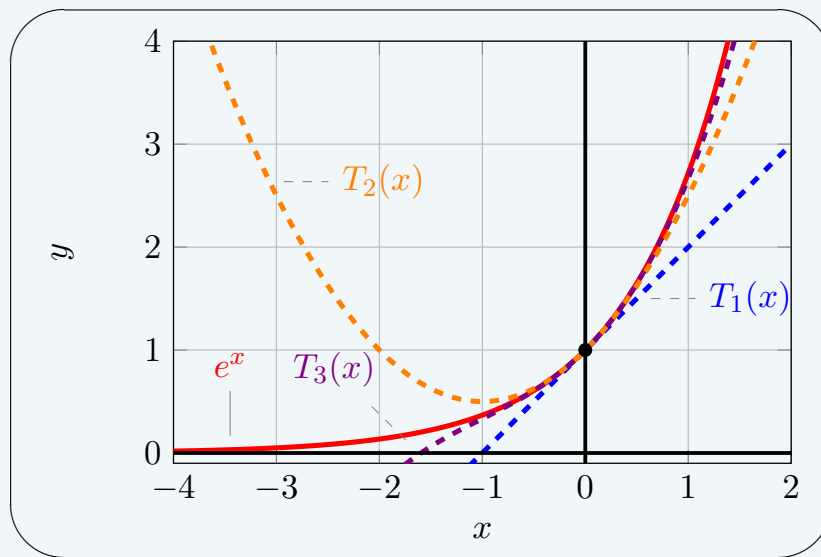
- Le funzioni reali di variabile reale si classificano in **funzioni algebriche** e **funzioni trascendenti**. Le funzioni algebriche sono costruite attraverso un numero finito di applicazioni delle quattro operazioni dell'aritmetica, dell'elevamento a potenza e dell'estrazione della radice n -esima. Le funzioni trascendenti sono tutte le funzioni non algebriche.

4.1.1.1 La serie di Taylor della funzione esponenziale

Esempio 4.1: formula/sviluppo di MacLaurin dell'esponenziale

Formula/sviluppo di MacLaurin con resto secondo Lagrange di ordine n dell'esponenziale:

$$e^x = T_n(x) + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{con } c \in [0, x]$$


Osservazione 4.3: serie di Taylor della funzione esponenziale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Dimostrazione. Dallo sviluppo di MacLaurin con resto secondo Lagrange all'ordine n di e^x , abbiamo che per ogni intero n ed $x \in \mathbb{R}$ esiste un punto c , compreso tra 0 e x , tale che:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Fissiamo x e facciamo tendere n a $+\infty$. Il punto c può variare con n ma, essendo sempre compreso tra 0 e x , abbiamo:

$$e^c \leq \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e $e^0 = 1$, quindi e^c si mantiene limitato. Dal teorema della gerarchia di infiniti abbiamo:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

quindi l'errore tende a zero, ovvero:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

dato che è un prodotto di una successione infinitesima per una limitata. Abbiamo quindi dimostrato che la funzione e^x si può scrivere come somma di una serie di potenze, la sua serie di Taylor, convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Osservazione 4.4

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (4.3)$$

Dimostrazione. Basta settare x uguale a 1 nella serie di Taylor della funzione esponenziale. $\square$

- Abbiamo derivato una seconda definizione del numero di Nepero, la prima era:

$$e = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \quad (4.4)$$

- Di conseguenza abbiamo due metodi per il calcolo approssimato del valore di e :

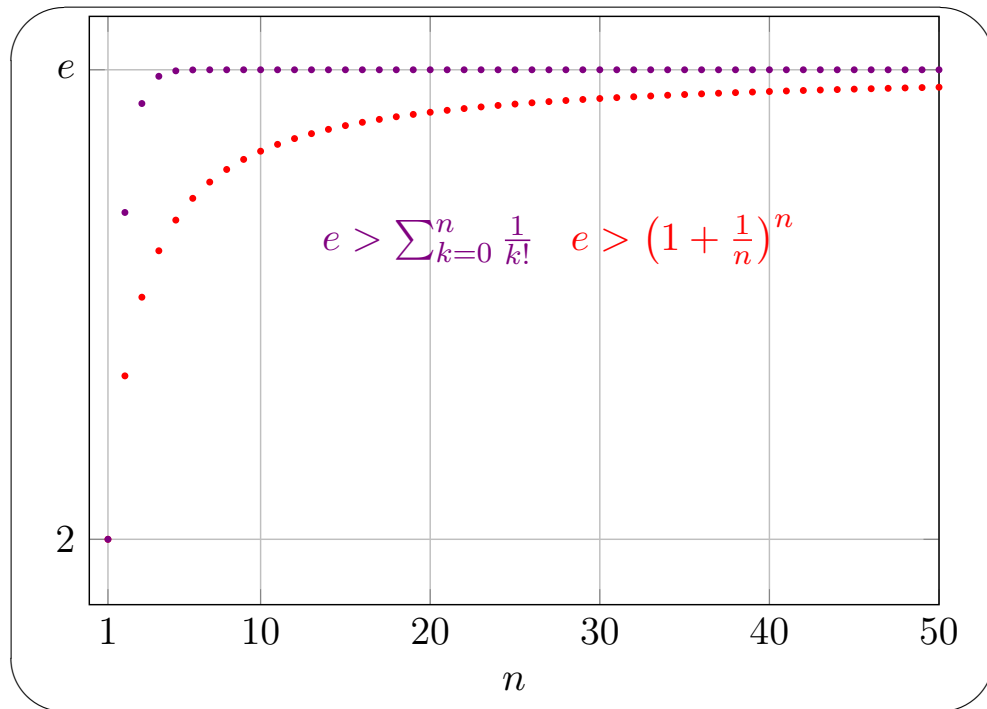
1. Il primo metodo si basa sulla formula (4.4), e fissando $k = n$ abbiamo l'approssimazione:

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. Il secondo metodo si basa sulla formula (4.3), e calcolando la somma parziale n -esima abbiamo l'approssimazione:

$$e \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$	e
$n = 1$	2,0000000000...	2,0000000000...	2,7182818284...
$n = 2$	2,2500000000...	2,5000000000...	2,7182818284...
$n = 3$	2,3703703704...	2,6666666666...	2,7182818284...
$n = 4$	2,4414062500...	2,7083333333...	2,7182818284...
$n = 5$	2,4883200000...	2,7166666666...	2,7182818284...



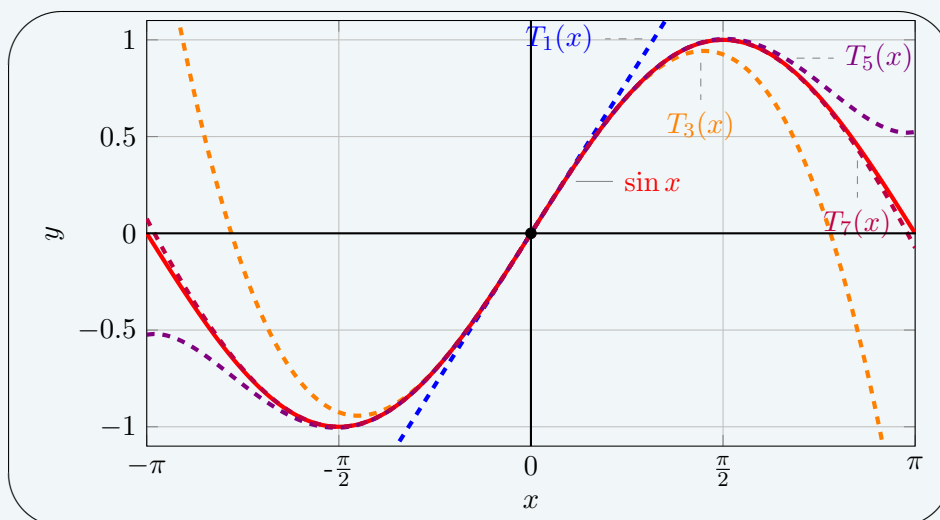
- Il secondo metodo è quindi molto più efficiente ad approssimare il valore di e

4.1.1.2 Le serie di Taylor delle funzioni trigonometriche elementari

Esempio 4.2: formula/sviluppo di MacLaurin del seno e del coseno

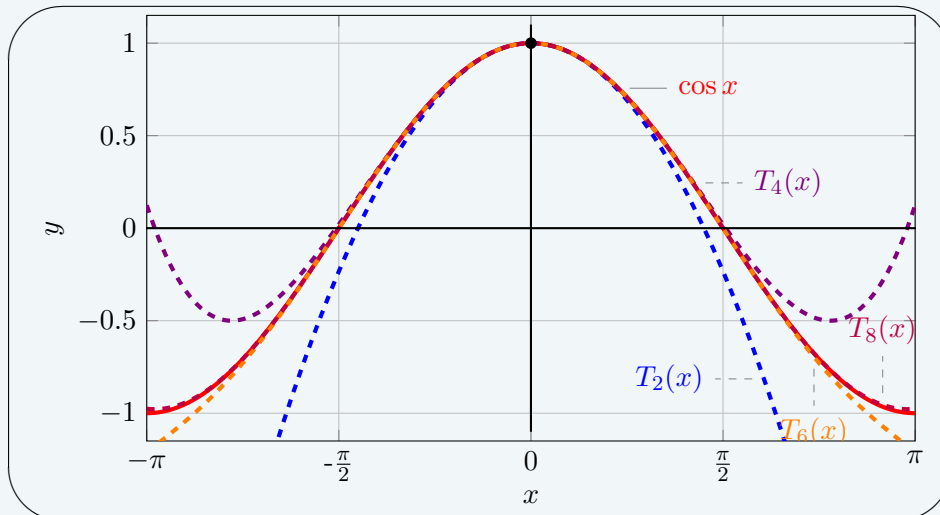
Formula/sviluppo di MacLaurin con resto secondo Lagrange di ordine dispari del seno:

$$\begin{aligned} \sin x &= T_{2k+1}(x) + \frac{\sin^{(2k+2)}(c)}{(2k+2)!} x^{2k+2} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin^{(2k+2)}(c)}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad \text{con } c \in [0, x] \end{aligned}$$



Formula/sviluppo di MacLaurin con resto secondo Lagrange di ordine pari del coseno:

$$\begin{aligned}\cos x &= T_{2k}(x) + \frac{\cos^{(2k+1)}(c)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos^{(2k+1)}(c)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{con } c \in [0, x]\end{aligned}$$



Osservazione 4.5: serie di Taylor delle funzioni trigonometriche elementari

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Dimostrazione.



4.2 Serie nel campo complesso