



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Volume 5 — Derivate

Il quinto volume: il calcolo differenziale. La funzione derivata, derivate delle funzioni elementari, punti angolosi e cuspidi, regole di calcolo, teorema del valor medio, massimi e minimi, teorema di De l'Hospital, derivata seconda, approssimazioni e formula di Taylor, studio di funzioni, metodo di Newton. Definizioni, teoremi con dimostrazione, grafici ed esempi svolti; gli esercizi della parte, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 5.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Funzione derivata	3
1.1	Retta passante per due punti	3
1.2	Retta tangente	5
1.3	Derivata di una funzione in un punto e funzione derivata	8
2	Derivate di funzioni elementari	15
2.1	Funzioni derivate di funzioni elementari	15
3	Punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale/orizzontale	21
3.1	Derivata destra e derivata sinistra	21
3.2	Punti angolosi	21
3.3	Punti a tangente verticale/orizzontale	22
3.4	Cuspidi	25
4	Regole di calcolo delle derivate	29
4.1	Regole di calcolo delle derivate	29
5	Teorema del valore medio, massimi e minimi	46
5.1	Massimi/minimi locali e globali	46
5.2	Teorema di Fermat e punti stazionari	48
5.3	Teorema del valor medio o di Lagrange	49
5.4	Teorema del criterio differenziale di monotonia	52
5.5	Ricerca di massimi e minimi	55
6	Teorema di De l'Hospital e derivabilità	60
6.1	Teorema di De l'Hospital	60
6.2	Limite della funzione derivata e derivabilità	65
7	Derivata seconda	68
7.1	Derivata seconda e funzione derivata seconda	68
7.2	Derivata seconda, concavità e convessità	71
7.3	Convessità e derivate	77
7.4	Convessità e rette tangenti	79
7.5	Punti di flesso	81
8	Calcolo differenziale e approssimazioni	86
8.1	Sviluppi asintotici al primo ordine	86
8.2	Derivate di polinomi	89
8.3	Formula/sviluppo di Taylor con resto secondo Peano	91

8.4	Formula/sviluppo di Taylor con resto secondo Lagrange	103
9	Studio di funzioni	109
9.1	Grafico di funzioni reali di variabile reale	109
9.2	Esempi	110
10	Metodo di Newton	117
10.1	Metodo di Newton	117
10.2	Stima degli errori del metodo di Newton	124

Funzione derivata

1.1 Retta passante per due punti

- A partire da due punti

$$(x_1, y_1) \text{ e } (x_2, y_2)$$

è possibile calcolare la funzione

$$y = m x + q$$

il cui grafico corrisponde alla retta passante per i due punti (equazione della retta in forma esplicita). Il **coefficiente angolare** o **pendenza** della retta è il valore m e l'**ordinata all'origine** della retta è il valore q .

- Imponendo il passaggio per i due punti abbiamo:

$$\begin{cases} y_1 = m x_1 + q \\ y_2 = m x_2 + q \end{cases}$$

e possiamo determinare m e q come segue (due equazioni in due incognite):

$$\begin{cases} q = y_1 - m x_1 \\ q = y_2 - m x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} q = y_1 - m x_1 \\ y_1 - m x_1 = y_2 - m x_2 \end{cases} \quad \text{che diventa} \quad m x_2 - m x_1 = y_2 - y_1$$

$$\begin{cases} q = y_1 - m x_1 \\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \quad \begin{cases} q = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

E otteniamo la retta:

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_m x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1}_q \quad \text{chiaramente} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

La retta passante per due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_m x + y_1 - \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_m x_1 \quad \text{si può riscrivere come} \quad y = m x + y_1 - m x_1.$$

Quindi la retta può essere scritta soltanto in funzione del coefficiente angolare m e del punto (x_1, y_1) come segue:

$$y = y_1 + m (x - x_1) \quad \text{con} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Lo stesso vale per un qualsiasi punto $(\tilde{x}, \tilde{y})$ della retta, in questo caso avremmo:

$$y = \tilde{y} + m(x - \tilde{x})$$

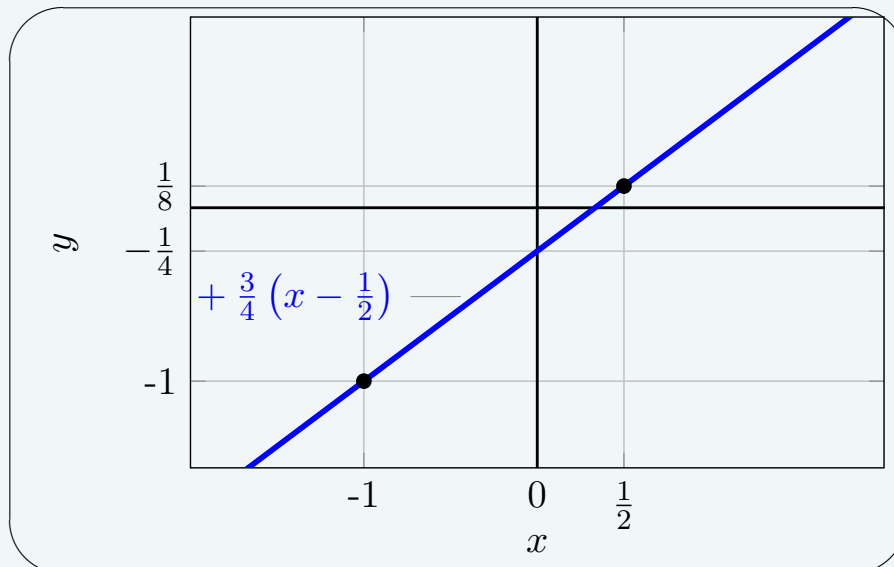
Esempio 1.1: Retta passante per due punti

Calcoliamo la retta passante per i punti: $(x_1, y_1) = (-1, -1)$ e $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. Calcoliamo la pendenza:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{8} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{3}{4}$$

Utilizzando il punto $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ otteniamo:

$$y = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} x - \frac{1}{4}$$



Utilizzando ora il punto $(x_1, y_1) = (-1, -1)$ otteniamo la medesima retta:

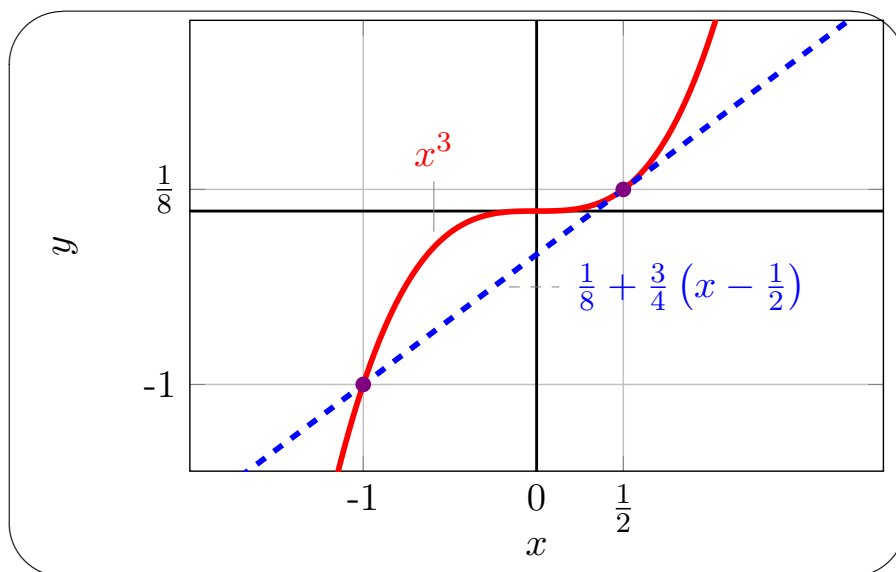
$$y = -1 + \frac{3}{4} (x + 1) = \frac{3}{4} x - \frac{1}{4}$$

1.2 Retta tangente

Che cos'è la retta **tangente** in un punto al grafico di una funzione?

- La definizione intuitiva di una retta tangente al grafico è quella di una retta che “tocca” il grafico senza “tagliarlo” o “secarlo” (immaginando la curva come se fosse un oggetto fisico non penetrabile)
- Questa definizione intuitiva funziona ad esempio per parabole o le iperboli. Però, prendiamo ad esempio la funzione $f(x) = x^3$

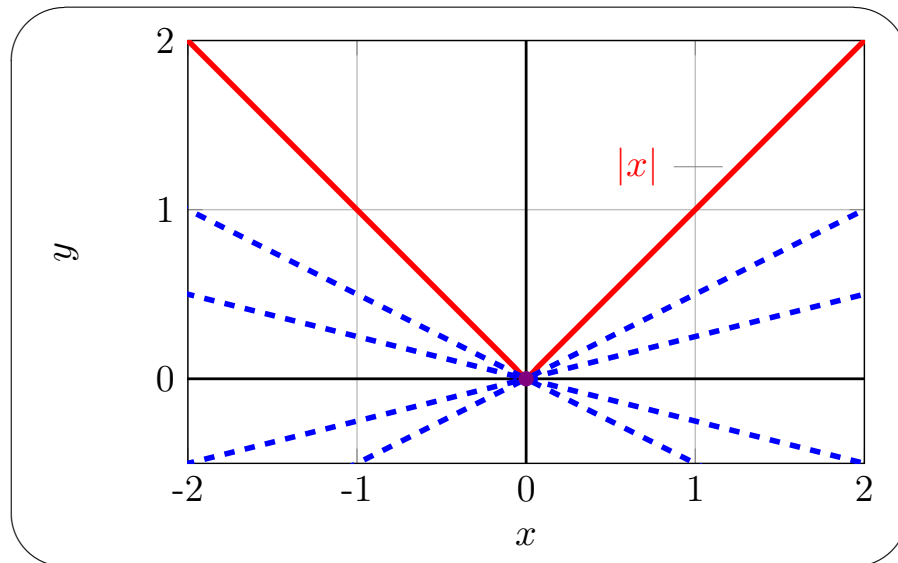
il grafico $y = x^3$ e la retta $y = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{2} \right)$



la definizione intuitiva funziona nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right)$, ma la retta interseca il grafico della funzione anche nel punto $(-1, -1)$.

- Viceversa ci sono funzioni, come $f(x) = |x|$, che ha come grafico

$$y = |x|$$



Questo grafico ha un punto (l'origine) in cui ci sono infinite rette soddisfacenti la definizione intuitiva, ma chiaramente nessuna di esse si può chiamare tangente.

Geometricamente, la retta tangente può essere approssimata dalla **retta che passa per due punti** molto vicini posti sulla curva, il primo **fissato** (il punto di tangenza) e l'altro **“mobile”** (e scelto via via più vicino al punto di tangenza).

- Due punti individuano una retta, più i due punti si avvicinano, più questa retta si avvicinerà alla tangente. Si tratta quindi di capire cosa accade della retta per i due punti quando il secondo punto, mobile, si avvicina sempre più al primo, senza però coincidere con esso. La **“retta limite”** - se esiste - si chiamerà retta **tangente**.

Un ulteriore modo di vedere il concetto di tangenza è pensare la tangente (in un punto a una curva) come la retta che **approssima meglio** la curva in un intorno del punto.

1.2.1 Utilizzo pratico della retta tangente

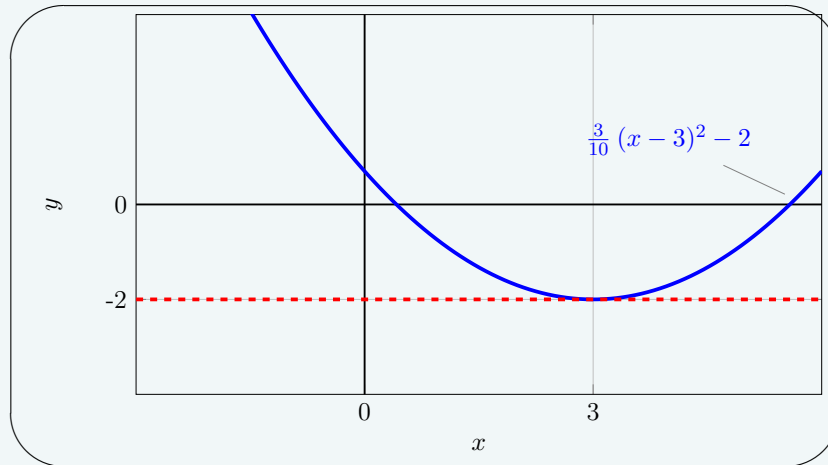
Il calcolo della tangente è importante per determinare i punti in cui il grafico di una funzione ha **tangente orizzontale** (punti di massimo e di minimo locali o globali, ed eventualmente anche in altri punti).

- È quindi utile saper scrivere analiticamente l'equazione della retta tangente alla curva in un punto generico per vedere poi in quali punti essa è orizzontale. Questa idea si deve per primo a Fermat, che la elaborò intorno al 1630.

Esempio 1.2: Grafico di funzione – punto a tangente orizzontale

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{3}{10} (x - 3)^2 - 2$$

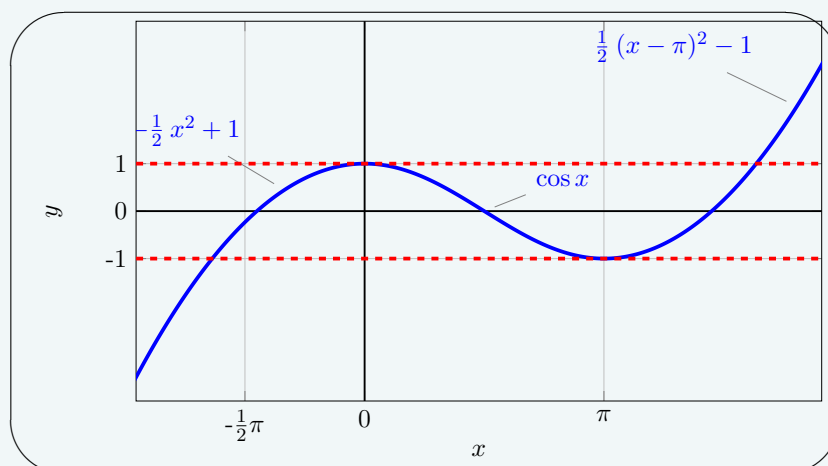


La funzione ha un punto a tangenza orizzontale che è punto di minimo globale.

Esempio 1.3: Grafico di funzione – punti a tangente orizzontale

Consideriamo la funzione (definita a tratti):

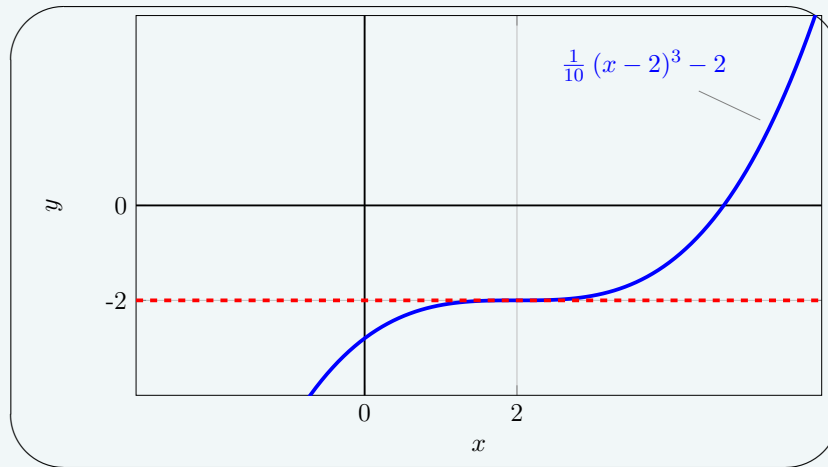
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 1 & x \leq 0 \\ \cos x & 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - 1 & x > \pi \end{cases}$$



La funzione ha due punti a tangenza orizzontale che sono punti di minimo e massimo locali ad esempio nell'intervallo $[-\frac{1}{2}\pi, \pi]$.

Consideriamo ora la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{10} (x - 2)^3 - 2$$



La funzione ha un punto a tangenza orizzontale ma che non è né di massimo né di minimo.

1.3 Derivata di una funzione in un punto e funzione derivata

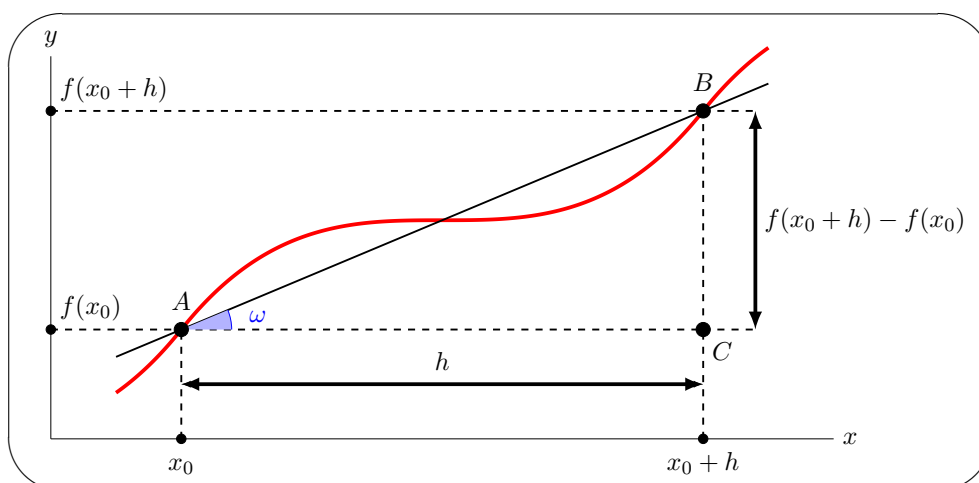
- Il **calcolo differenziale** è lo studio della nozione di derivata, che è parte del calcolo infinitesimale.

1.3.1 Derivata e retta tangente

Cerchiamo l'equazione della **retta tangente** al grafico della funzione in un **generico punto** A del suo grafico.

- Consideriamo il grafico di una generica funzione $y = f(x)$, le coordinate dei punti A e B in figura sono rispettivamente:

$$(x_0, f(x_0)) \quad \text{e} \quad (x_0 + h, f(x_0 + h))$$



- Il **coefficiente angolare o pendenza** della retta passante per il punto A e il punto B è:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si noti che una pendenza positiva indica (in media) innalzamento, mentre una negativa indica abbassamento (in media).

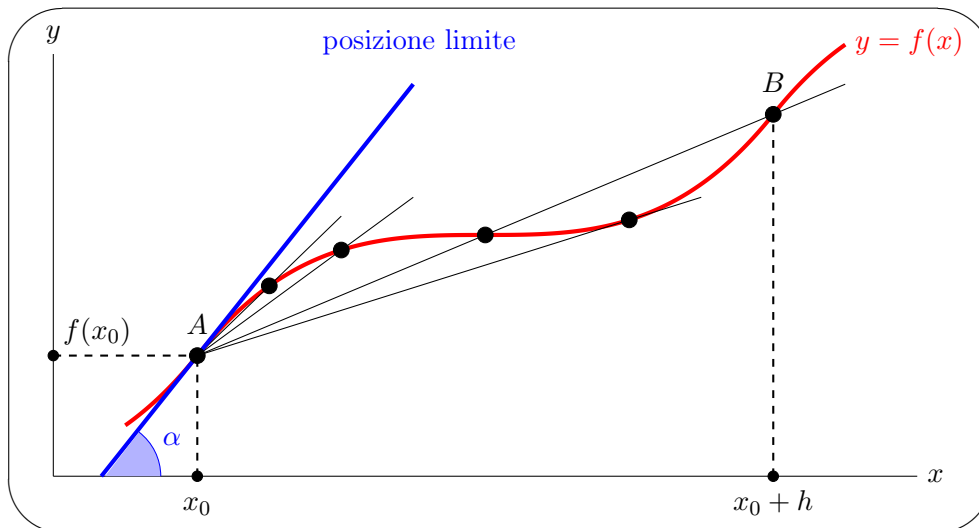
Questo rapporto prende il nome di **rapporto incrementale** della funzione f relativo all'intervallo $[x_0, x_0 + h]$.

- Geometricamente, essendo il triangolo ABC rettangolo, si ha che:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan \omega \quad (\text{coefficiente angolare della retta passante per } A \text{ e } B)$$

- Consideriamo il rapporto incrementale e passiamo al limite (supponendo che esista) per $h \rightarrow 0$. Geometricamente abbiamo:

1. il punto A , di coordinate $(x_0, f(x_0))$, rimane fisso
2. mentre il punto B , di coordinate $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, si muove verso A (mantenendosi sul grafico di f).



- Spostando B verso A sul grafico della funzione, la retta AB varia la sua pendenza assestandosi su una **posizione limite**.

1. la **retta limite** prende il nome di **retta tangente al grafico** della funzione f nel punto di ascissa x_0 ;
2. la sua **pendenza** (o coefficiente angolare) è data da $\tan \alpha$ e prende il nome di **derivata prima** della funzione f nel punto x_0 .
3. L'angolo α è quello tra la retta tangente e l'asse delle ascisse.

Definizione 1.1: di derivata

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f si dice derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tale limite prende il nome di derivata prima (o semplicemente derivata) di f in x_0 .

Con $h = x - x_0$, abbiamo $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow x - x_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$ e $x = x_0 + h$ quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Per indicare la derivata si usano i seguenti simboli:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{notazione di Lagrange}} \quad \underbrace{\dot{f}(x_0)}_{\text{notazione di Newton}} \quad \underbrace{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ e } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}}_{\text{notazione di Leibniz}}$$

Definizione 1.2: retta tangente

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e f derivabile in $x_0 \in (a, b)$, la retta di equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

si chiama **retta tangente** al grafico di una funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

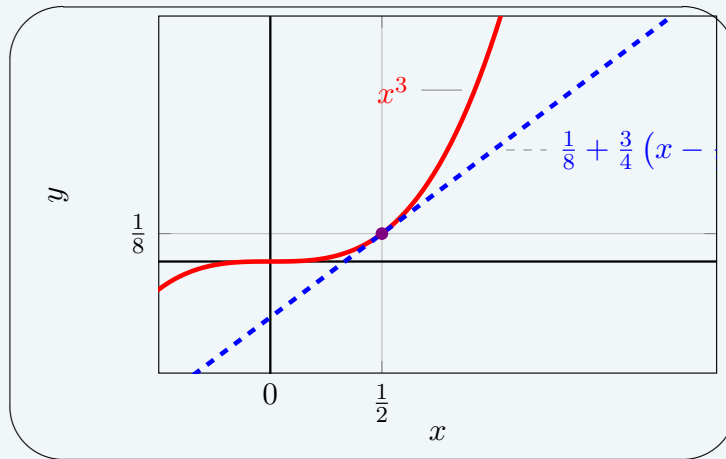
Esempio 1.4: Retta tangente

Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{1}{2}$. La derivata nel punto $x_0 = \frac{1}{2}$ è:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + h\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} + \frac{3}{4}h + \frac{3}{2}h^2 + h^3 - \frac{1}{8}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}h + h^2\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Abbiamo $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ e la retta tangente nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$



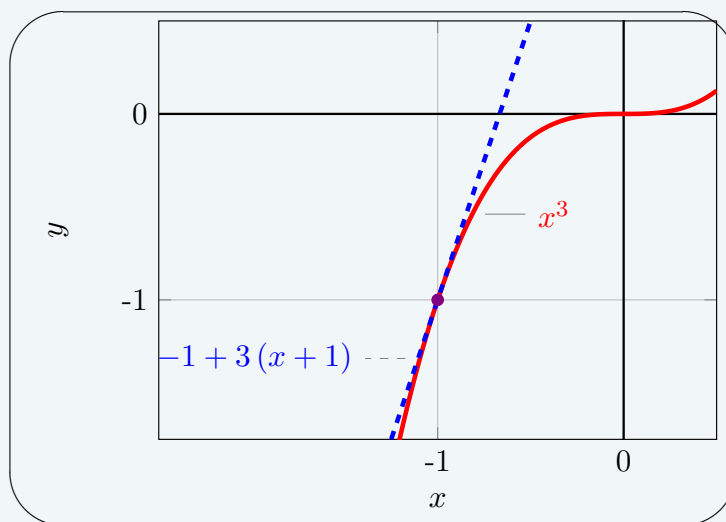
Esempio 1.5: Retta tangente

Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3$ nel punto di ascissa $x_0 = -1$. La derivata nel punto $x_0 = -1$ è:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 + h)^3 - (-1)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + 3h - 3h^2 + h^3 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 3h + h^2) = 3 \end{aligned}$$

Abbiamo $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 3$ e la retta tangente nel punto $(-1, -1)$ è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -1 + 3(x + 1)$$



- Possiamo ora definire una funzione che ad ogni x associ la derivata di una funzione f nel punto x (ovviamente se f è derivabile).

Definizione 1.3: di funzione derivata

Se una funzione f è derivabile in ogni punto di un intervallo (a, b) , la funzione:

$$f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f' : x \mapsto f'(x)$$

si chiama **funzione derivata** di f .

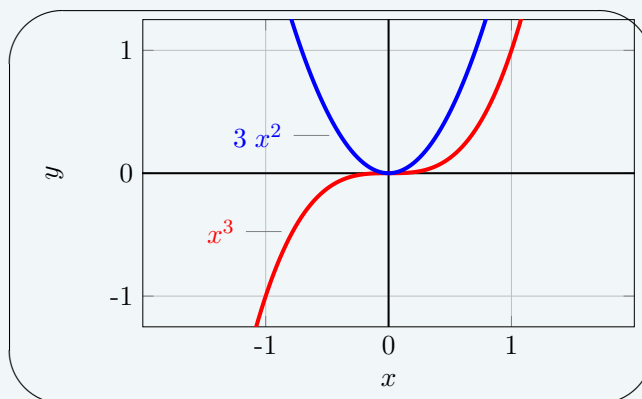
- Per indicare la funzione derivata prima si usano le seguenti notazioni:

$$\underbrace{f'(x)}_{\text{notazione di Lagrange}} \quad \underbrace{\dot{f}(x)}_{\text{notazione di Newton}} \quad \underbrace{\frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx} \text{ e } \frac{dy}{dx}}_{\text{notazione di Leibniz}}$$

Esempio 1.6: funzione derivata

Calcoliamo la funzione derivata della funzione $f(x) = x^3$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \quad \text{quindi} \quad f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$



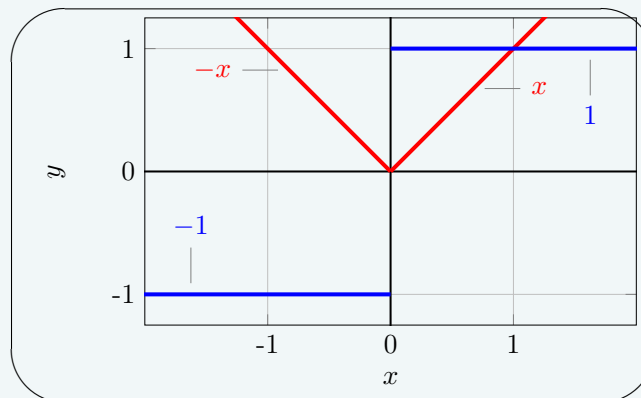
Calcoliamo la funzione derivata della funzione $f(x) = |x|$. Con $x \neq 0$, abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \text{ e} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 & \text{quindi } f'(x) = 1 \\ -x & \text{se } x < 0 \text{ e} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)+x}{h} = -1 & \text{quindi } f'(x) = -1 \end{cases}$$

Per $x = 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \quad \text{quindi} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

dato che se $h \rightarrow 0^+$ allora $|h| = h$ e $h \rightarrow 0^-$ allora $|h| = -h$. Si conclude che, non esistendo il limite del rapporto incrementale, f non è derivabile in $x = 0$. La funzione è continua nell'origine ma la tangente non è ben definita.



1.3.2 Continuità e derivabilità

Teorema 1.4

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se f è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$ allora è continua in x_0 .

Dimostrazione. La funzione è derivabile in $x_0 \in (a, b)$, quindi scriviamo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \sim f'(x_0) \cdot h \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Inoltre abbiamo

$$f'(x_0) \cdot h \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Perciò

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0 \quad \text{quindi} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Ponendo $x_0 + h = x$ abbiamo $h \rightarrow 0$ se e solo se $x \rightarrow x_0$ e di conseguenza abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

- Una possibile dimostrazione alternativa ma equivalente è la seguente:

Dimostrazione. La funzione è derivabile in $x_0 \in (a, b)$, quindi scriviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\rightarrow f'(x_0) \\ \rightarrow 0}} \cdot h + f(x_0) = f(x_0)\end{aligned}$$

Ponendo $x_0 + h = x$ abbiamo $h \rightarrow 0$ se e solo se $x \rightarrow x_0$ e di conseguenza abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Data una funzione f , la derivabilità in un punto x_0 interno al suo dominio implica la continuità nel punto x_0 :

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ è continua in } x_0 \quad (1.1)$$

ma il viceversa non è vero:

$$f \text{ è continua in } x_0 \not\Rightarrow f \text{ è derivabile in } x_0 \quad (1.2)$$

un controesempio è la funzione $f(x) = |x|$ che è continua in $x_0 = 0$ ma non derivabile in $x_0 = 0$. Di conseguenza **se una funzione è continua in x_0 , non necessariamente è anche derivabile in x_0 .**

- Il fatto che f sia derivabile in x_0 è condizione sufficiente ma non necessaria affinché f sia continua in x_0 . Inoltre il fatto che f sia continua in x_0 è condizione necessaria ma non sufficiente affinché f sia derivabile in x_0 .
- Dalla contronominale o implicazione inversa di (1.1) abbiamo:

$$f \text{ non è continua in } x_0 \Rightarrow f \text{ non è derivabile in } x_0$$

ovvero se una funzione è discontinua in x_0 non può essere derivabile in x_0 .

Derivate di funzioni elementari

2.1 Funzioni derivate di funzioni elementari

- Deriveremo nel seguito le funzioni derivate di alcune delle principali funzioni elementari.

Osservazione 2.1

Data la funzione $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ costante, la funzione derivata è $f'(x) = 0$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

quindi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

□

2.1.1 Funzioni derivate di funzioni potenza

Osservazione 2.2

Data la funzione $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la funzione derivata è $f'(x) = n x^{n-1}$.

Dimostrazione. Abbiamo dalla formula del binomio di Newton:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= \frac{x^n + n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= n x^{n-1} + \frac{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h}\end{aligned}$$

quindi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + \underbrace{\frac{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h}}_{\rightarrow 0} = n x^{n-1}$$

□

Dimostrazione. Con $n = 2$, abbiamo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2 x h + h^2 - x^2}{h} = 2 x + h$$

quindi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 x + h = 2 x$$

□

Osservazione 2.3

Data la funzione $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione derivata è $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ per $x > 0$.

Dimostrazione. Sia $x > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{\left(x \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right)^\alpha - x^\alpha}{h} \\ &= x^\alpha \cdot \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} \sim x^\alpha \cdot \frac{\alpha \frac{h}{x}}{h} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{per } h \rightarrow 0\end{aligned}$$

abbiamo usato il limite notevole

$$(1 + \varepsilon(h))^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon(h) \quad \text{per } \varepsilon(h) \rightarrow 0$$

dove

$$\varepsilon(h) = \frac{h}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Quindi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

□

Esempio 2.1: Funzione derivata

$$f(x) = x^{10} \qquad f'(x) = 10 x^9 \quad (\text{per } x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (\text{per } x > 0)$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{per } x > 0)$$

2.1.2 Funzioni derivate di funzioni trigonometriche elementari

Osservazione 2.4

Data la funzione $f(x) = \sin x$, la funzione derivata è $f'(x) = \cos x$.

Dimostrazione. Abbiamo utilizzando le formule di addizione:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x \end{aligned}$$

Usando il limite notevole

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

abbiamo

$$\frac{\cos h - 1}{h} = h \cdot \left(\underbrace{-\frac{1 - \cos h}{h^2}}_{\rightarrow -\frac{1}{2} \text{ per } h \rightarrow 0} \right) \sim -\frac{1}{2} h \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Usando il limite notevole

$$\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1 \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

abbiamo

$$\frac{\sin h}{h} \cos x \sim \cos x \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Allora

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \left(-\frac{1}{2} h \right) + \cos x = \cos x \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.5

Data la funzione $f(x) = \cos x$, la funzione derivata è $f'(x) = -\sin x$.

Dimostrazione. Abbiamo utilizzando le formule di addizione:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \frac{\sin h}{h} \sin x\end{aligned}$$

e, usando i ragionamenti della prova precedente, abbiamo:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \frac{\sin h}{h} \sin x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \left(-\frac{1}{2} h \right) - \sin x = -\sin x\end{aligned}$$

□

2.1.3 Funzioni derivate della funzione esponenziale e logaritmica in base e **Osservazione 2.6**

Data la funzione $f(x) = e^x$, la funzione derivata è $f'(x) = e^x$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \sim e^x \text{ per } h \rightarrow 0$$

usando il limite notevole

$$\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1 \text{ per } h \rightarrow 0.$$

quindi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x = e^x$$

□

Osservazione 2.7

Data la funzione $f(x) = \log x$, la funzione derivata è $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \sim \frac{h}{x} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{x} \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

dove abbiamo usato il limite notevole

$$\log(1 + \varepsilon(h)) \sim \varepsilon(h) \quad \text{per } \varepsilon(h) \rightarrow 0,$$

e

$$\varepsilon(h) = \frac{h}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

quindi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

□

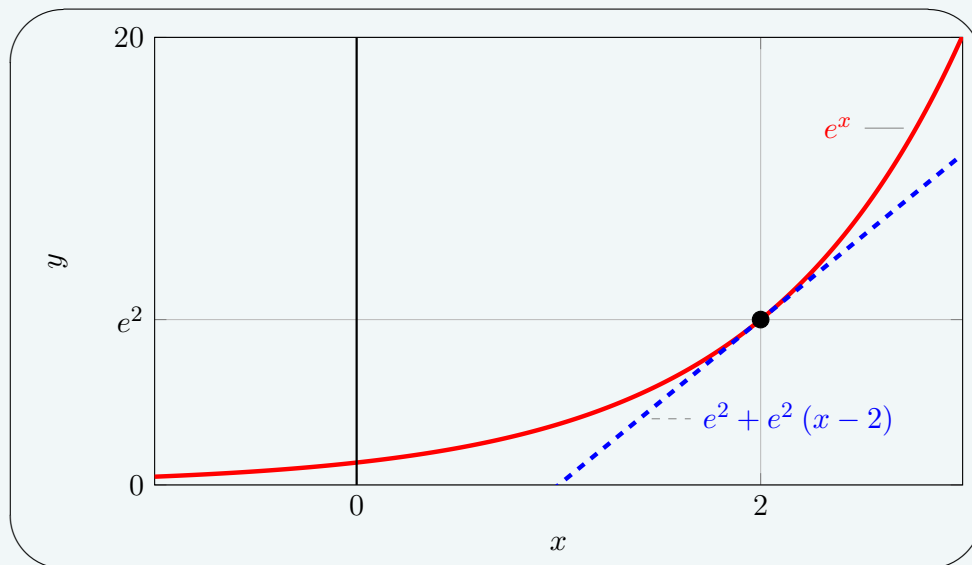
Esempio 2.2: Retta tangente

Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^x \quad \text{nel punto di ascissa } x = 2$$

Abbiamo $f(2) = e^2$, $f'(x) = e^x$, $f'(2) = e^2$, quindi la retta tangente nel punto $(2, e^2)$ è:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = e^2 + e^2(x - 2)$$



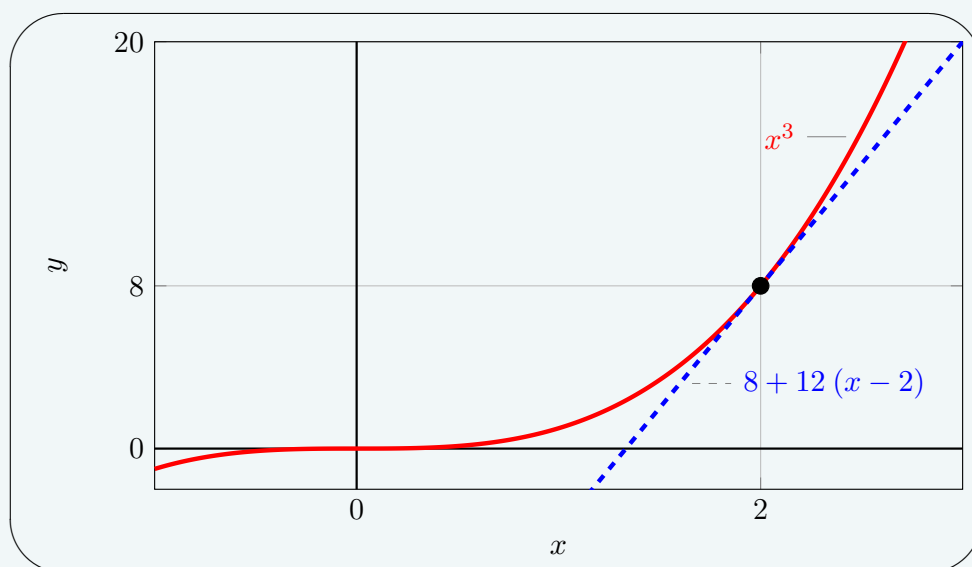
Esempio 2.3: Retta tangente

Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = x^3 \quad \text{nel punto di ascissa } x = 2$$

Abbiamo $f(2) = 8$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$, quindi la retta tangente nel punto $(2, 8)$ è:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 8 + 12(x - 2)$$



Punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale/orizzontale

3.1 Derivata destra e derivata sinistra

Definizione 3.1: di derivata destra (sinistra)

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione f si dice derivabile in $x_0 \in (a, b)$ da destra (da sinistra) se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

allora f è derivabile da destra (da sinistra) e il limite si chiama **derivata destra** (**sinistra**).

- La derivata destra si indica con il simbolo $f'_+(x_0)$ mentre la derivata sinistra si indica con il simbolo $f'_-(x_0)$

3.2 Punti angolosi

Definizione 3.2: di punto angoloso

Nel caso in cui f sia continua e derivabile da destra e da sinistra (ma non derivabile) in x_0 si dice che f abbia un **punto angoloso** in $x = x_0$.

Esempio 3.1: Punti angolosi

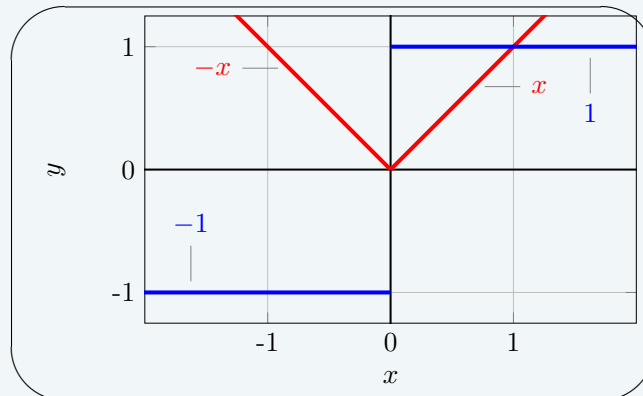
Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ e il punto $x_0 = 0$. Abbiamo:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Non esistendo il limite del rapporto incrementale, f non è derivabile in $x = 0$. La funzione è continua in $x = 0$ nell'origine dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Dato che esistono finiti i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in $x = 0$, il grafico presenta quindi un punto angoloso in $x = 0$.



La formula che esprime sinteticamente la derivata della funzione valore assoluto (fuori dall'origine) è la seguente:

$$f(x) = |x|, \quad f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

3.3 Punti a tangente verticale/orizzontale

- Se f è continua in un punto x_0 e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

allora f non è derivabile in x_0 ma, geometricamente, il grafico di f ha una retta tangente ben definita e parallela all'asse delle ordinate.

Ammetteremo in tal caso la scrittura

$$f'(x_0) = +\infty, \quad f'(x_0) = -\infty$$

e parleremo di **punto a tangente verticale**.

Definizione 3.3: di punto a tangente verticale

Se

$$f'(x_0) = +\infty \quad \text{oppure} \quad f'(x_0) = -\infty$$

si dice che f ha un **punto a tangente verticale** in $x = x_0$.

- Analogamente, se f è continua in un punto x_0 e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

il grafico di f ha una retta tangente ben definita e parallela all'asse delle ascisse. Parleremo in questo caso di **punto a tangente orizzontale**.

Definizione 3.4: di punto a tangente orizzontale

Se

$$f'(x_0) = 0$$

si dice che f ha un **punto a tangente orizzontale** in $x = x_0$.

Esempio 3.2: Punto a tangente verticale

Sia

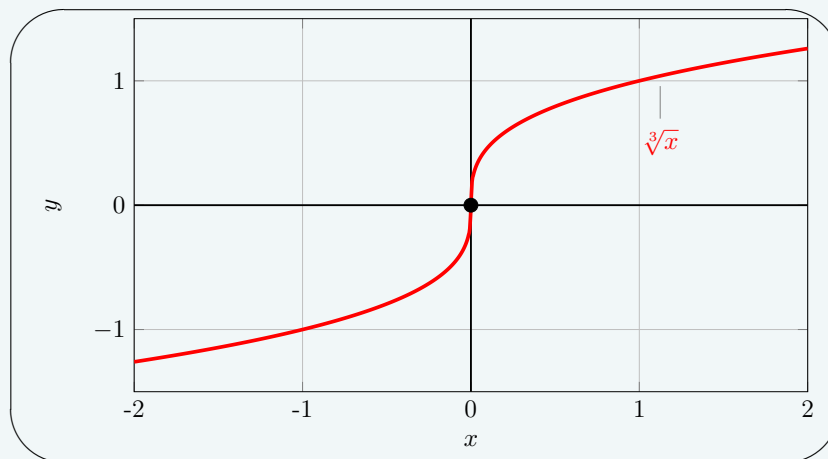
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

allora per $x_0 = 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}$$

e i limiti sono:

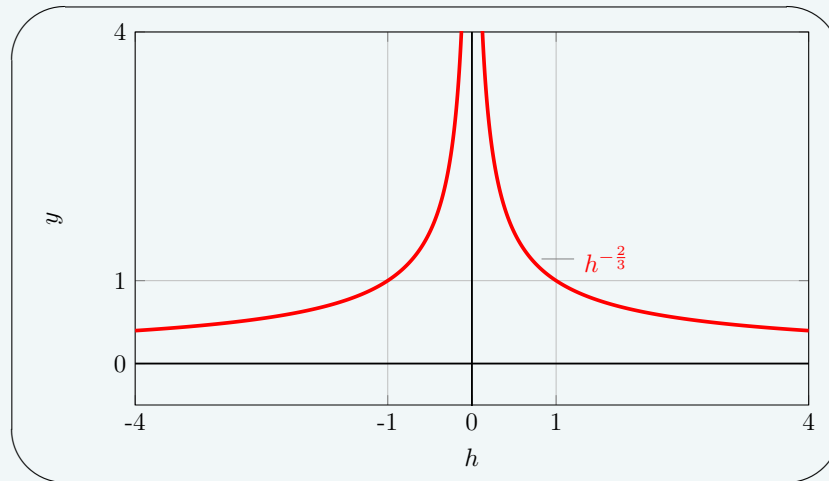
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty \quad \text{e} \quad f'(0) = +\infty.$$



La funzione ha un punto a tangente verticale in $x_0 = 0$. La funzione:

$$f(h) = \frac{1}{h^{2/3}} = h^{-\frac{2}{3}}$$

è una potenza a esponente razionale $\frac{m}{n}$ negativo con n dispari (quindi definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) e m pari (quindi funzione pari). Il suo grafico è:



Esempio 3.3: Punto a tangente verticale

Sia

$$f(x) = -\sqrt[3]{x-2} + 1$$

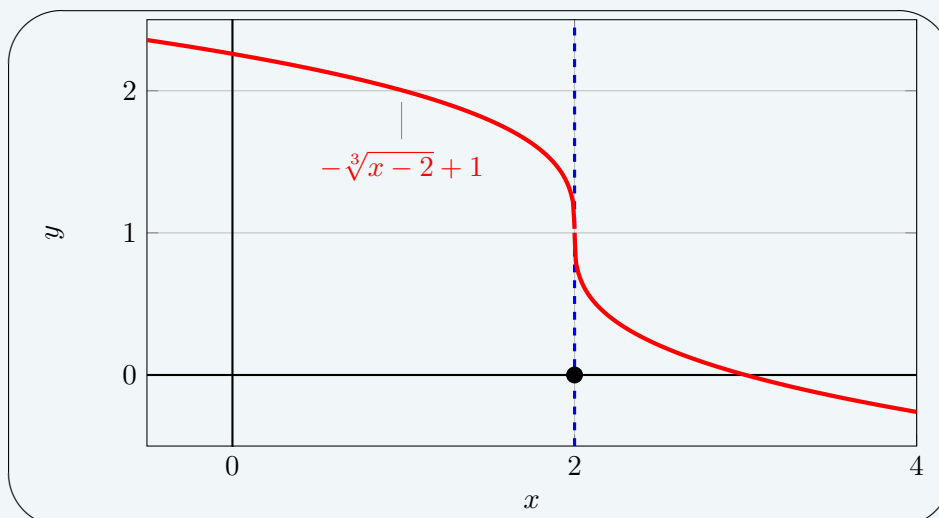
allora per $x_0 = 2$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-\sqrt[3]{(2+h)-2} + 1 - 1}{h} = -\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = -\frac{1}{h^{2/3}}$$

e i limiti sono

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{h^{2/3}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{h^{2/3}} = -\infty \quad \text{quindi}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{h^{2/3}} = -\infty \quad \text{e} \quad f'(2) = -\infty.$$



La funzione ha un punto a tangente verticale in $x_0 = 2$.

3.4 Cuspidi

Definizione 3.5: di cuspide

Sia f una funzione continua in x_0 se

$$f'_+(x_0) = \pm\infty \text{ e } f'_-(x_0) = \mp\infty$$

si dice che f ha una cuspide in x_0 .

Esempio 3.4: Cuspide

Sia

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}$$

allora per $x_0 = 0$

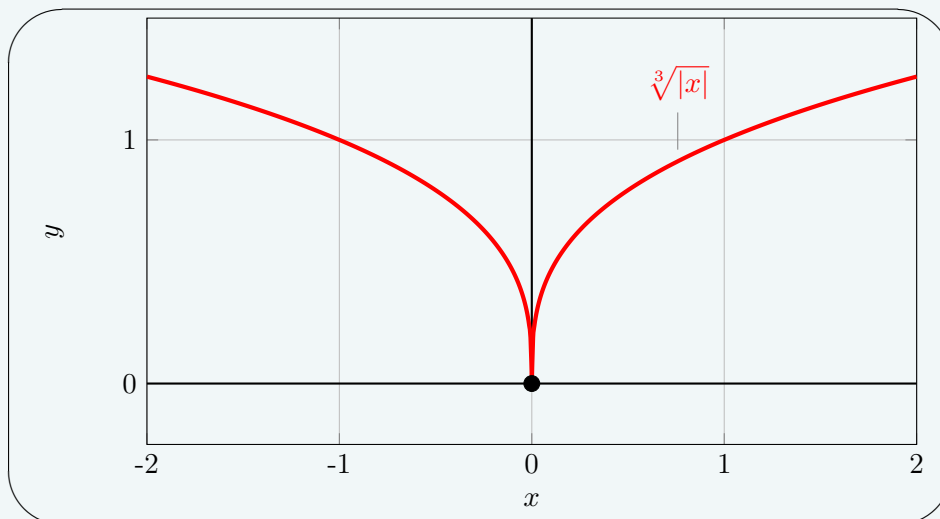
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h}$$

e i limiti sono:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{h^{2/3}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty,$$

quindi:

$$f'_-(0) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(0) = +\infty.$$



La funzione ha una cuspide in $x_0 = 0$.

- Nel caso misto in cui una delle due derivate è finita e l'altra infinita (con f continua) si parla ancora di punto angoloso.

- Infine, se la funzione è definita solo per $x \geq x_0$ e in tal punto ha derivata (destra) infinita, diremo semplicemente che in tal punto ha tangente verticale, senza parlare né di cuspidi né di punto a tangente verticale.

Esempio 3.5: Punto a tangente verticale

Sia

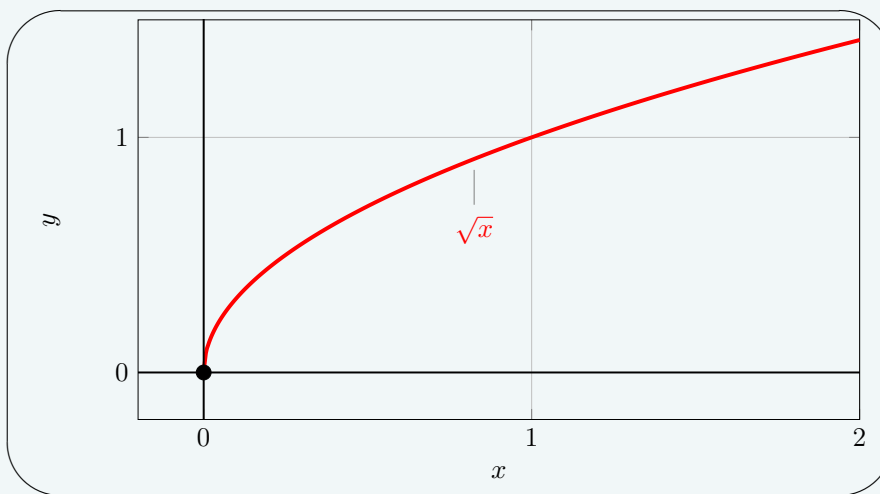
$$f(x) = \sqrt{x}$$

allora per $x_0 = 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{h^{1/2}}$$

abbiamo solo il limite destro

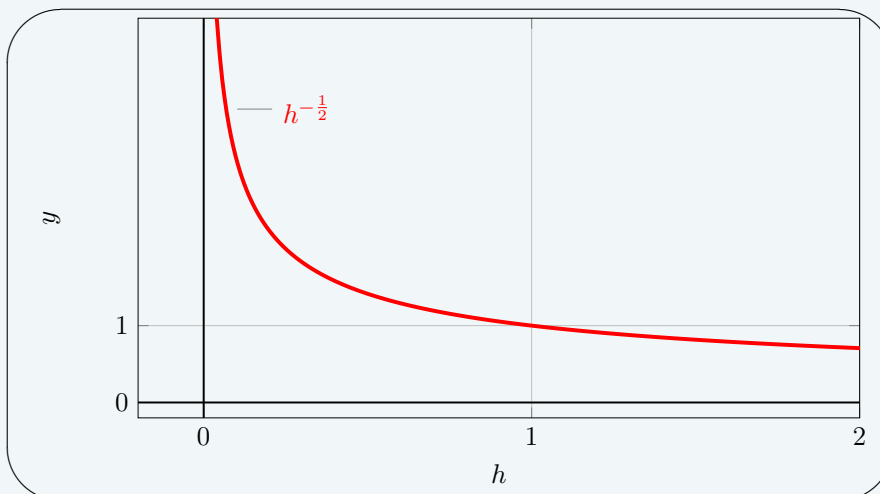
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{1/2}} = +\infty \quad \text{e} \quad f'_+(0) = +\infty.$$



La funzione ha un punto a tangente verticale in $x_0 = 0$. La funzione:

$$f(h) = \frac{1}{h^{1/2}} = h^{-\frac{1}{2}}$$

è una potenza a esponente razionale $\frac{m}{n}$ negativo con n pari (quindi definita solo su $\mathbb{R}_+$). Il suo grafico è:



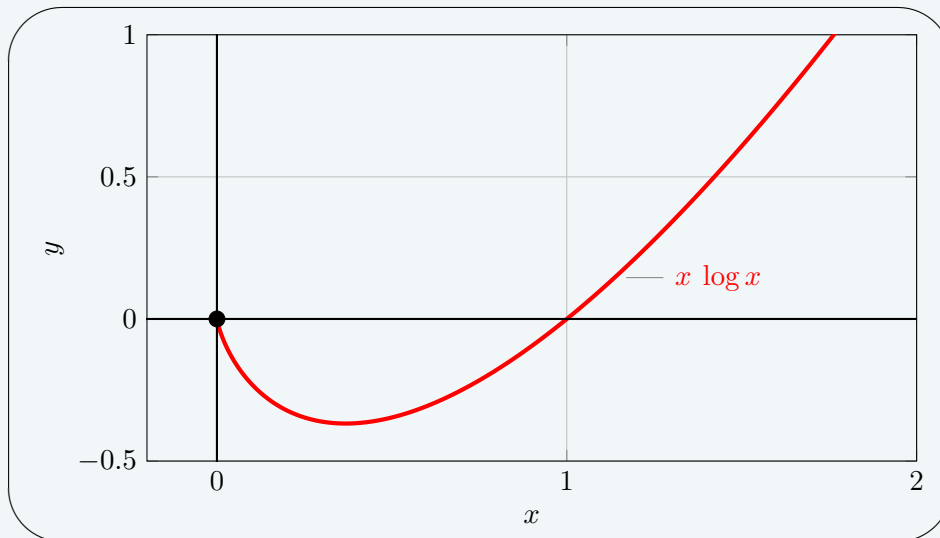
Esempio 3.6: Prolungamento per continuità da destra e comportamento nell'origine

Sia

$$f(x) = x \log x, \text{ per } x > 0 \text{ abbiamo } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

quindi la funzione può essere prolungata per continuità da destra in $x = 0$, ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Calcoliamo la derivata destra in $x_0 = 0$ di $f(x) = x \log x$ prolungata per continuità da destra in $x = 0$. Abbiamo, per $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{h} = \frac{f(x_0 + h)}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

e di conseguenza

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \log h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \log h = -\infty \quad \text{quindi} \quad f'_+(x_0) = -\infty$$

La funzione ha quindi un punto a tangente verticale in $x_0 = 0$.

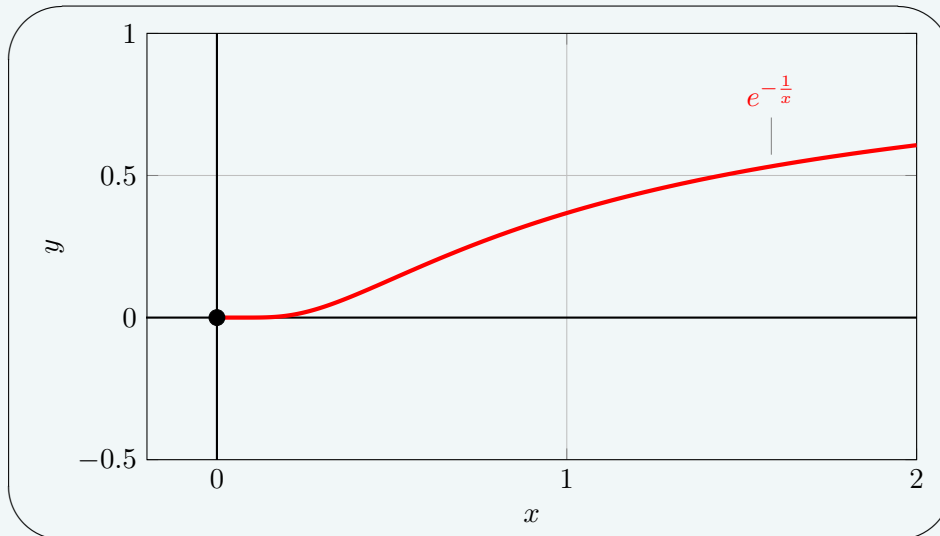
Esempio 3.7: Prolungamento per continuità da destra e comportamento nell'origine

Sia

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ per } x > 0 \text{ abbiamo } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

quindi la funzione può essere prolungata per continuità da destra in $x = 0$, ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Calcoliamo la derivata destra in $x_0 = 0$ di $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ prolungata per continuità da destra in $x = 0$.

Abbiamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{h}} h}$$

Cambiando la variabile:

$$y = \frac{1}{h}, \text{ se } h \rightarrow 0^+ \text{ allora } y \rightarrow +\infty$$

Otteniamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{h}} h} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0 \quad \text{quindi} \quad f'_+(x_0) = 0$$

e la funzione ha un punto a tangente orizzontale (da destra) in $x_0 = 0$.

Regole di calcolo delle derivate

4.1 Regole di calcolo delle derivate

- Vediamo ora la relazione tra l'operazione di derivata e le principali operazioni già note sulle funzioni; in particolare mostreremo la relazione tra:
 1. derivazione e operazioni algebriche
 2. derivazione e composizione
 3. derivazione e inversione

4.1.1 Algebra delle derivate

Teorema 4.1: dell'algebra delle derivate

Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, due funzioni derivabili in (a, b) .

Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g ($g \neq 0$) sono derivabili in (a, b) e valgono le seguenti formule:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (4.1)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (g \neq 0) \quad (4.3)$$

- Dalla regola (4.2) si deduce

$$(k \cdot g)' = k \cdot g' \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ costante} \quad (4.4)$$

essendo la derivata di una costante uguale a zero.

- Dalla regola (4.3) si deduce

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad (g \neq 0) \quad (4.5)$$

- La regola (4.2) si dice **regola di Leibniz** e si estende al prodotto di n funzioni:

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n' \quad (4.6)$$

- Il teorema ha in realtà un carattere puntuale: ossia se f e g sono derivabili in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora in quel punto sono derivabili anche $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g , e valgono le formule scritte (che si estendono agli intervalli).

Dimostrazione. Dimostriamo la regola (4.2). Fissato $x \in (a, b)$, abbiamo

$$\begin{aligned} & f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ & = f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x), \end{aligned}$$

e quindi il rapporto incrementale si può scrivere come:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ & = f(x+h) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{=g'(x) \text{ per } h \rightarrow 0} + g(x) \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{=f'(x) \text{ per } h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Abbiamo

$$f(x+h) \rightarrow f(x) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

essendo f continua in quanto derivabile.

Quindi

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \rightarrow f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

□

Dimostrazione. Dimostriamo la regola (4.5). Fissato $x \in (a, b)$, il rapporto incrementale si può scrivere come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] = \frac{g(x) - g(x+h)}{h g(x) g(x+h)} = \\ & = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x) g(x+h)} \end{aligned}$$

Abbiamo

$$g(x+h) \rightarrow g(x) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

essendo g continua in quanto derivabile.

Quindi

$$\frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] \rightarrow -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \text{ per } h \rightarrow 0.$$

□

Dimostrazione. Notiamo che dalle regole (4.2) e (4.5) si deduce la regola (4.3), infatti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)' = \underbrace{f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)'}_{\text{regola (4.2)}} = \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \underbrace{\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right)}_{\text{regola (4.5)}} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.2

Data la funzione $f(x) = \tan x$, la funzione derivata è $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Dimostrazione. Usando la formula (4.3) abbiamo

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

□

Osservazione 4.3

Data la funzione $f(x) = \cot x$, la funzione derivata è $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$.

Dimostrazione. Usando la formula (4.3) abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{(\sin^2 x)} = -(1 + \cot^2 x) \end{aligned}$$

□

4.1.2 Derivata di funzione composta

Teorema 4.4: della regola della catena

Sia $g \circ f$ la funzione composta di due funzioni f e g . Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Si ha

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = g(f(x+h)) - g(f(x))$$

Se poniamo

$$k = f(x+h) - f(x) \quad \text{e} \quad y = f(x) \quad \text{allora} \quad f(x+h) = y + k$$

Per la continuità di f , $h \rightarrow 0$ implica $k \rightarrow 0$. Con le nuove notazioni abbiamo:

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+k) - g(y)$$

Osserviamo ora che la definizione di derivata:

$$g'(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k}$$

si può riscrivere, per $k \neq 0$,

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y) + \varepsilon(k)$$

dove $\varepsilon(k)$ indica una quantità che tende a zero per $k \rightarrow 0$.

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione precedente per k si trova

$$g(y+k) - g(y) = k \cdot g'(y) + k \cdot \varepsilon(k)$$

relazione valida anche per $k = 0$. Dunque:

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = k \cdot g'(y) + k \cdot \varepsilon(k)$$

Dividendo per h , e osservando che

$$\frac{k}{h} \rightarrow f'(x) \quad \text{per} \quad h \rightarrow 0$$

che implica, come visto, anche $k \rightarrow 0$ e si ottiene la tesi. □

- Come suggerisce il nome di “regola della catena”, la (4.7) può essere generalizzata alla composizione di un numero qualsiasi di funzioni, composte una con l'altra. Ad esempio per tre funzioni si ha:

$$\left(f \left(g \left(h(x) \right) \right) \right)' = f' \left(g \left(h(x) \right) \right) \cdot g' \left(h(x) \right) \cdot h'(x)$$

Esempio 4.1: Funzione derivata di funzione composta

Calcoliamo la funzione derivata della funzione composta:

$$h(x) = \underbrace{\sin^3 x}_{=(g \circ f)(x)}$$

Le due funzioni sono:

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(y) = y^3 \quad \text{con} \quad y = \sin x.$$

Entrambe le funzioni sono derivabili in tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo

$$g'(y) = 3y^2 \quad \text{e} \quad f'(x) = \cos x$$

quindi usando la regola della catena (4.7) e ri-sostituendo otteniamo:

$$h'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

Considerando la funzione composta $g(f(x))$, o equivalentemente scritta $(g \circ f)(x)$. Posto $y = f(x)$ e $w = g(y)$, e usando le notazioni (di Leibniz)

$$\frac{df}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{dg}{dy} \quad \text{per le derivate di } f \text{ e } g \text{ rispetto a } x$$

la regola (4.7) (della catena) si può riscrivere come:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (4.8)$$

La regola (4.8) esprime che il tasso di variazione di w rispetto a x è il prodotto dei tassi di variazione “intermedi”, di w rispetto a y e di y rispetto a x .

Esempio 4.2: Funzione derivata di funzione composta

Consideriamo la funzione composta dell'esercizio precedente. Posto

$$y = \sin x \quad (y = f(x)) \quad \text{e} \quad w = y^3 \quad (w = g(y))$$

e usando la notazione di Leibniz, la regola (4.8) si scriverebbe:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot \cos x.$$

E quindi, sostituendo $y = \sin x$, otteniamo:

$$\frac{dw}{dx} = 3 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

Esempio 4.3: Funzione derivata di funzione composta

Calcoliamo la funzione derivata della funzione composta (moltiplicata per una costante):

$$h(x) = A \cdot \underbrace{\sin(\omega x + \varphi)}_{=(g \circ f)(x)} \quad \text{con } A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Le due funzioni sono:

$$f(x) = \omega x + \varphi \quad \text{e} \quad g(y) = \sin y \quad \text{con } y = \omega x + \varphi.$$

Entrambe le funzioni sono derivabili in tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo:

$$f'(x) = \omega \quad \text{e} \quad g'(y) = \cos y$$

quindi usando la regola (4.7), la regola (4.4) e ri-sostituendo otteniamo:

$$h'(x) = A \cdot \left(\cos(\omega x + \varphi) \cdot \omega \right)$$

Esempio 4.4: Funzione derivata di prodotto di funzioni composte

Calcoliamo la funzione derivata del prodotto di due funzioni composte per una costante:

$$h(x) = A \cdot \underbrace{e^{-\alpha x}}_{=(r \circ s)(x)} \cdot \underbrace{\cos(\omega x + \varphi)}_{=(g \circ f)(x)} \quad \text{con } A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Le funzioni sono:

$$\begin{aligned} s(x) &= -\alpha x \quad \text{e} \quad r(z) = e^z \quad \text{con } z = -\alpha x; \\ f(x) &= \omega x + \varphi \quad \text{e} \quad g(y) = \cos y \quad \text{con } y = \omega x + \varphi. \end{aligned}$$

Le funzioni sono derivabili in tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo:

$$s'(x) = -\alpha \quad \text{e} \quad r'(z) = e^z; \quad f'(x) = \omega \quad \text{e} \quad g'(y) = -\sin y$$

di conseguenza usando la regola della catena (4.7) e ri-sostituendo otteniamo:

$$(r \circ s)'(x) = -\alpha e^{-\alpha x}; \quad (g \circ f)'(x) = -\sin(\omega x + \varphi) \cdot \omega$$

Quindi usando la regola (4.2) e la regola (4.4) :

$$h'(x) = A \cdot \left(\underbrace{-\alpha e^{-\alpha x}}_{(r \circ s)'(x)} \cdot \underbrace{\cos(\omega x + \varphi)}_{(g \circ f)(x)} + \underbrace{e^{-\alpha x}}_{(r \circ s)(x)} \cdot \underbrace{\left(-\sin(\omega x + \varphi) \cdot \omega \right)}_{(g \circ f)'(x)} \right)$$

Esempio 4.5: Funzione derivata di funzione composta

Sia $f(x) > 0$ e derivabile, calcoliamo la derivata della funzione

$$h(x) = \log(f(x))$$

usando la regola della catena (4.7) abbiamo:

$$h'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Osservazione 4.5

Data la funzione $f(x) = a^x$, con $a > 0$, la funzione derivata è $f'(x) = a^x \cdot \log a$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$f'(x) = \left(\exp(x \cdot \log a) \right)'$$

quindi usando le formule per la derivata di e^y (con $y = x \log a$) e per la derivata della funzione composta abbiamo

$$f'(x) = \exp(x \cdot \log a) \cdot \log a = a^x \cdot \log a$$

□

Osservazione 4.6

Data la funzione $f(x) = \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$, la funzione derivata è $f'(x) = \frac{1}{x \log a}$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$f'(x) = \left(\frac{\log x}{\log a} \right)'$$

quindi usando le formule per la derivata di $\log x$ e per la derivata di $k f(x)$ abbiamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log a}$$

□

Osservazione 4.7

Data la funzione $f(x) = \sinh x$, la funzione derivata è $f'(x) = \cosh x$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} \left(e^x - (-e^{-x}) \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

□

Osservazione 4.8

Data la funzione $f(x) = \cosh x$, la funzione derivata è $f'(x) = \sinh x$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} \left(e^x + (-e^{-x}) \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

□

Le derivate di funzioni del tipo:

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

si basano sullo riscrivere la funzione (con $f(x) > 0$) nella forma seguente:

$$f(x)^{g(x)} = \exp \left(g(x) \cdot \log(f(x)) \right)$$

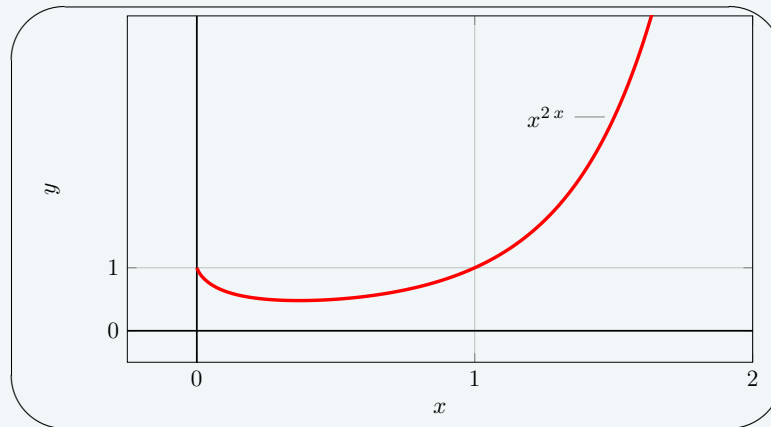
Abbiamo:

$$\begin{aligned} \left(f(x)^{g(x)} \right)' &= \left(\exp \left(g(x) \cdot \log(f(x)) \right) \right)' \\ &= \exp \left(g(x) \cdot \log(f(x)) \right) \cdot \left(g(x) \cdot \log(f(x)) \right)' \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \log(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

Esempio 4.6: Derivata di una funzione elevata a un'altra funzione

Calcoliamo la derivata della funzione

$$h(x) = x^{2x} = \exp(2x \cdot \log x) \quad \text{con } x > 0$$



Le due funzioni sono:

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = 2x$$

Quindi:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\exp(2x \cdot \log x) \right)' = \exp(2x \cdot \log x) \cdot (2x \cdot \log x)' \\ &= x^{2x} \cdot \left(2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{2x} (2 \log x + 2) \end{aligned}$$

Consideriamo il valore assoluto di una funzione: $|f(x)|$. Nei punti in cui $f(x) \neq 0$, la derivazione di funzione composta dà:

$$(|f(x)|)' = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{per } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{per } f(x) < 0 \end{cases}$$

In generale, ci aspettiamo che la funzione $|f(x)|$ presenti punti angolosi nei punti in cui $f(x)$ si annulla.

Esempio 4.7: Funzione derivata di funzione col valore assoluto

Calcoliamo la funzione derivata della funzione:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|, \quad \text{con } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3, \quad \text{abbiamo } f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3) \cdot (2x - 4)$$

in maniera equivalente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < 1 \text{ o } x > 3 & \text{ovvero per } f(x) > 0 \\ -(2x - 4) & 1 < x < 3 & \text{ovvero per } f(x) < 0 \end{cases}$$

In $x_0 = 1$, occorre usare il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{|(1 + h)^2 - 4(1 + h) + 3|}{h} = \frac{|h^2 - 2h|}{h}$$

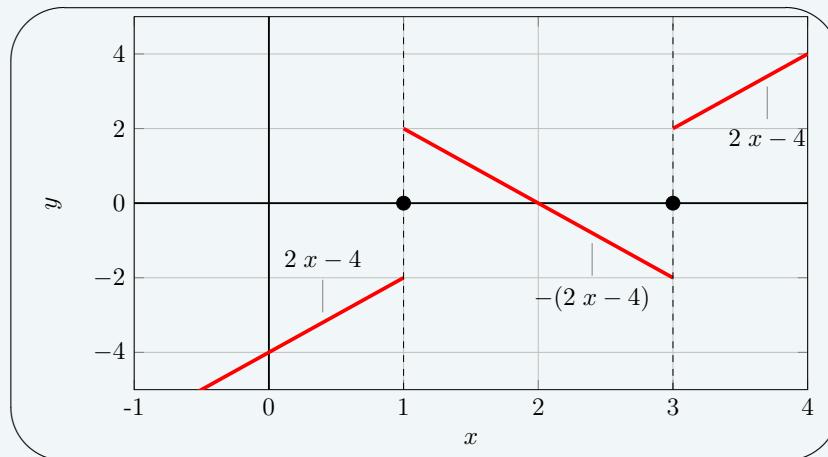
Se $h \rightarrow 0^-$ abbiamo $|h^2 - 2h| = h^2 - 2h$ quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

Se $h \rightarrow 0^+$ abbiamo $|h^2 - 2h| = -h^2 + 2h$ quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 2h}{h} = 2$$

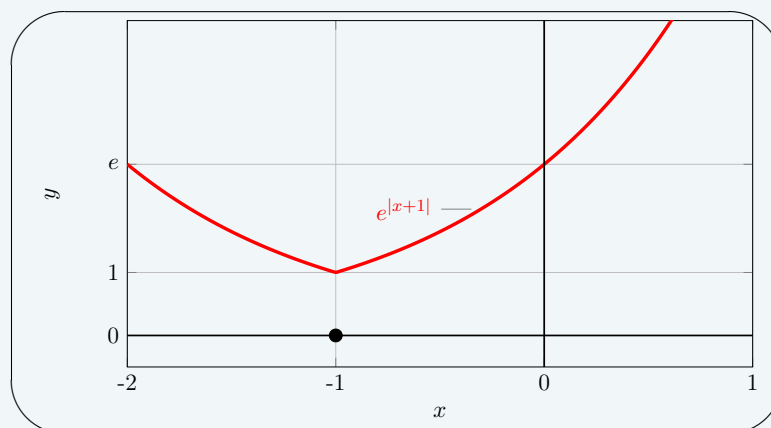
La funzione non è derivabile in $x_0 = 1$ e $x_0 = 3$ (ragionamenti analoghi a $x_0 = 1$), dove ha punti angolosi.



Esempio 4.8: Funzione derivata di funzione col valore assoluto

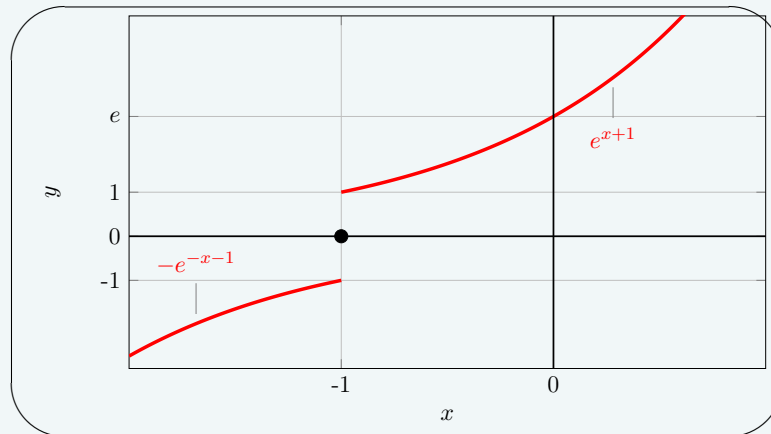
Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{|x+1|}$$



Con $x \neq -1$, abbiamo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x > -1 \\ e^{-x-1}, & x < -1 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x > -1 \\ -e^{-x-1}, & x < -1 \end{cases}$$



In $x_0 = -1$, occorre usare il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \frac{e^{|-1+h+1|} - 1}{h} = \frac{e^{|h|} - 1}{h}$$

Abbiamo:

$$\text{se } h \rightarrow 0^+, e^{|h|} = e^h \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1; \quad \text{se } h \rightarrow 0^-, e^{|h|} = e^{-h} \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{h} = -1$$

Si conclude che, non esistendo il limite del rapporto incrementale, la funzione non è derivabile in $x_0 = -1$. La funzione ha un punto angoloso in $x_0 = -1$.

Consideriamo ora le derivate di alcune funzioni logaritmiche. Calcoliamo:

$$\left(\log(|x|) \right)' = \frac{1}{|x|} \cdot \text{sgn}(x) = \frac{1}{x}$$

Inoltre per la derivazione di funzioni composte abbiamo:

$$\left(\log(|f(x)|) \right)' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \text{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Talvolta conviene usare le proprietà dei logaritmi per trasformare una funzione logaritmica prima di calcolarne la funzione derivata:

$$(\log(cx))' = (\log(c) + \log(x))' = \frac{1}{x} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\log \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) \right)' = (\log(ax+b) - \log(cx+d))' = \frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

4.1.3 Derivata di funzione inversa

Teorema 4.9: della derivata della funzione inversa

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile in (a, b) e $g = f^{-1}$ la sua funzione inversa, definita in $f((a, b))$.

Supponiamo inoltre che esista $f'(x_0) \neq 0$ per un certo $x_0 \in (a, b)$.

Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (4.9)$$

Dimostrazione. Sia:

$$f(x_0) = y_0; \quad g(y_0) = x_0$$

$$f(x_0 + h) = y_0 + k; \quad g(y_0 + k) = x_0 + h$$

Consideriamo il rapporto incrementale di g in y_0 :

$$\frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$$

Se $k \neq 0$, $f(x_0 + h) - f(x_0) \neq 0$ e quindi anche $h \neq 0$; dunque l'ultimo quoziente si può anche riscrivere nella forma:

$$\frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Inoltre, per $k \rightarrow 0$ si ha $g(y_0 + k) \rightarrow g(y_0)$ perché g è continua, essendo l'inversa di una funzione continua su un intervallo (Teorema sulla continuità delle funzioni inverse); d'altro canto $h = g(y_0 + k) - g(y_0)$, quindi per $k \rightarrow 0$ anche $h \rightarrow 0$, e per ipotesi

$$\frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

quindi esiste

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

- Osserviamo che, assumendo la derivabilità di f^{-1} , la (4.9) segue subito dall'identità

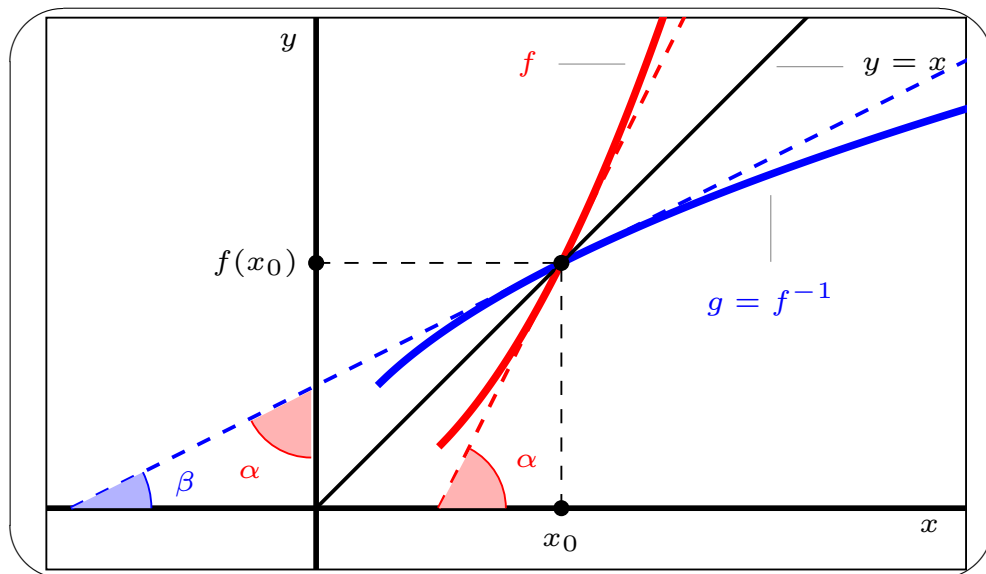
$$g(f(x)) = x$$

e dalla regola della catena:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

da cui, se $f'(x) \neq 0$, segue la (4.9). La dimostrazione che abbiamo dato, tuttavia, è necessaria per dedurre la derivabilità di g dalle nostre ipotesi su f .

- La (4.9) ha un semplice significato geometrico, ricordando che i grafici di f e $g = f^{-1}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$. Geometricamente abbiamo:



quindi gli angoli α e β sono complementari, ovvero:

$$\left(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$f'(x) = \tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{g'(y)}$$

Con la notazione di Leibniz, posto $y = f(x)$ e $x = g(y)$, la (4.9) si scrive nella forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

- Si faccia attenzione al fatto che nella formula di derivazione della funzione inversa, le derivate f' e g' sono calcolate in due punti diversi: è questa la principale attenzione da avere nell'applicazione di questo teorema.

Osservazione 4.10

Data la funzione $f(y) = \arctan y$, la funzione derivata è $f'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

Dimostrazione. Poniamo $y = \tan x$, $x = \arctan y$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in \mathbb{R}$. Abbiamo:

$$(\arctan y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

□

Osservazione 4.11

Data la funzione $f(y) = \arcsin y$, la funzione derivata è $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Dimostrazione. Poniamo $y = \sin x$, $x = \arcsin y$, con $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 1]$. Poiché per quei valori di x si ha

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

abbiamo:

$$(\arcsin y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

□

Osservazione 4.12

Data la funzione $f(y) = \arccos y$, la funzione derivata è $f'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Dimostrazione. Poniamo ora $y = \cos x$, $x = \arccos y$, con $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$. Poiché per quei valori di x si ha

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

abbiamo

$$(\arccos y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

□

- Si osservi che le funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$, pur essendo definite e continue in $[-1, 1]$, non sono derivabili agli estremi dell'intervallo: precisamente, presentano in questi punti tangente verticale.

L'utilità del teorema di derivazione della funzione inversa consiste nel fatto che permetta di calcolare la derivata della funzione inversa g anche in situazioni in cui g non si sa scrivere esplicitamente.

Esempio 4.9: Derivata di funzione inversa

Sia

$$f(x) = x + e^x$$

La funzione è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, dunque invertibile e sia g la sua inversa. Calcoliamo, ad esempio, $g'(y_0)$ per $y_0 = f(0) = 1$. Si ha:

$$f'(x) = 1 + e^x, \quad f'(0) = 2 \neq 0$$

Quindi:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Osservazione 4.13

Data la funzione $f(y) = \text{SettSh } y$, la funzione derivata è $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$

Dimostrazione. Poniamo ora $y = \text{Sh } x$, $x = \text{SettSh } y$, con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Poiché per quei valori di x si ha

$$\text{Ch } x = \sqrt{\text{Sh}^2 x + 1} = \sqrt{y^2 + 1}$$

abbiamo:

$$(\text{SettSh } y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\text{Ch } x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

□

Osservazione 4.14

Data la funzione $f(y) = \text{SettCh } y$, la funzione derivata è $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

Dimostrazione. Poniamo ora $y = \text{Ch } x$, $x = \text{SettCh } y$, con $x \in [0, +\infty)$, $y \in [1, +\infty)$. Poiché per quei valori di x si ha

$$\text{Sh } x = \sqrt{\text{Ch}^2 x - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

abbiamo:

$$(\text{SettCh } y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\text{Sh } x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$



4.1.4 Derivata logaritmica ed elasticità

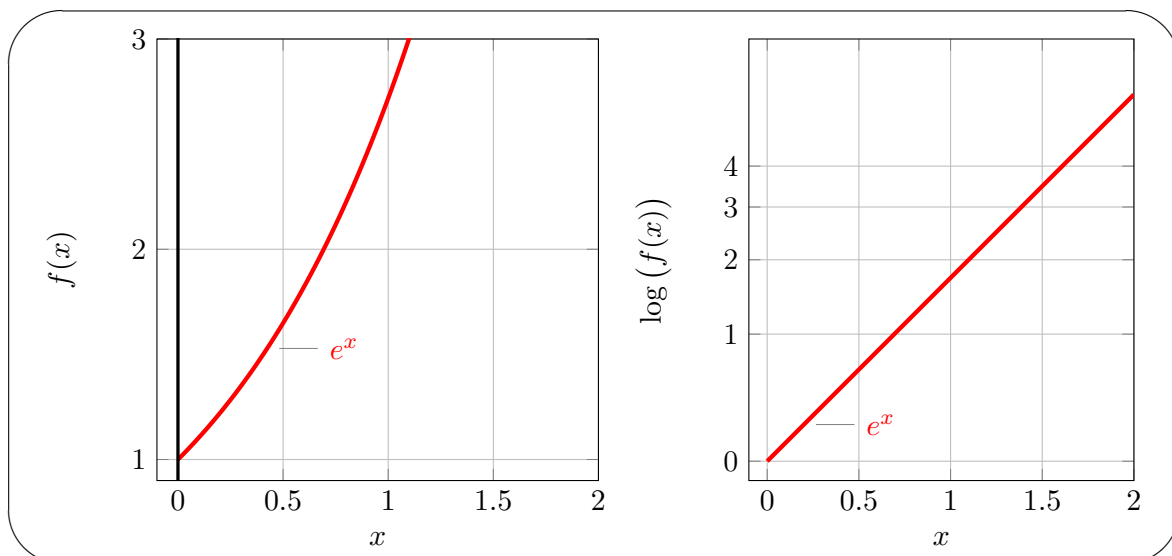
Definizione 4.15: di derivata logaritmica

Data $f > 0$, si chiama *funzione derivata logaritmica* di f la funzione derivata di $\log f$, in formule:

$$\frac{d}{dx} \log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- La derivata logaritmica ha il significato di **tasso di incremento relativo** di f rispetto a x .
- In certi casi il tasso di incremento relativo $\frac{f'(x)}{f(x)}$ è spesso più significativo del tasso assoluto $f'(x)$.
- Ad esempio, un incremento annuo di capitale di 1 miliardo su un totale di 10 ha un effetto ben diverso di un incremento di 1 miliardo su 1000 miliardi. Nel primo caso il tasso di variazione relativo è $1/10$ nel secondo $1/1000$, mentre uguali sono gli incrementi assoluti.

Quando interessa visualizzare gli incrementi relativi si ricorre a grafici in **scala semilogaritmica**: sull'asse delle ascisse si collocano i valori di x , mentre su quello delle ordinate quelli di $\log(f(x))$



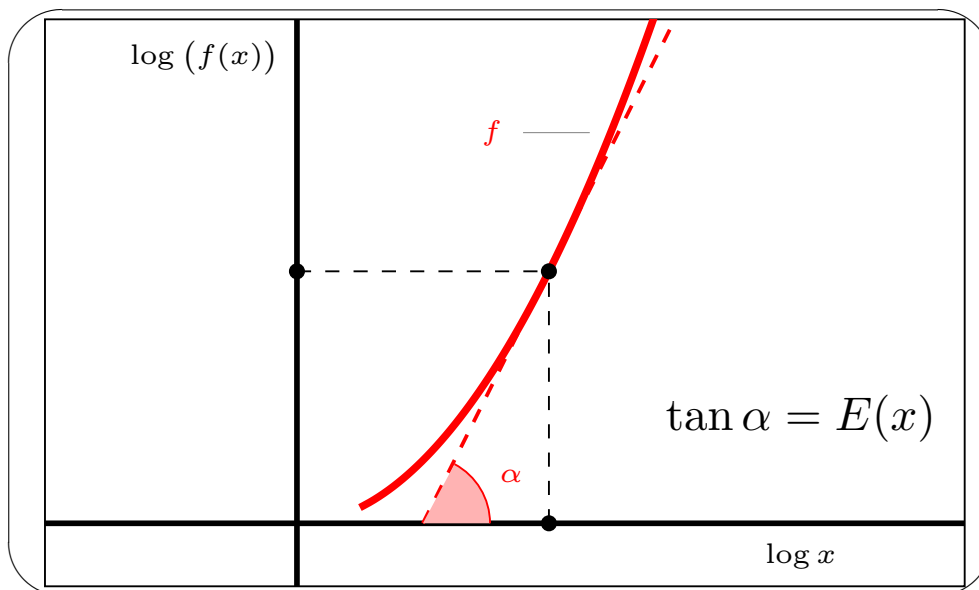
- A questo tipo di rappresentazione si ricorre anche quando $f(x)$ cresce così rapidamente da richiedere una compressione troppo elevata della scala (unità di misura) sull'asse delle ordinate (o in quella delle ascisse).

Un **grafico in scala logaritmica** è un grafico in cui invece di x sull'asse delle ascisse si collocano i valori di $\log x$ e sull'asse delle ordinate invece di $f(x)$ si collocano i valori di $\log f(x)$

Definizione 4.16: di elasticità

La pendenza della retta tangente a un grafico in scala logaritmica si chiama *elasticità di f* e si indica con $E(x)$.

- L'elasticità rappresenta il tasso di variazione relativa di f rispetto a variazioni relative di x ed equivale alla derivata di $\log f$ rispetto a $\log x$



- Per trovare l'espressione analitica di $E(x)$, osserviamo che, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha, posto $u = \log x$:

$$\frac{d \log f}{dx} = \frac{d \log f}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{ovvero} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = E(x) \cdot \frac{1}{x}$$

da cui si ricava:

$$E(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Esempio 4.10: elasticità

Calcoliamo l'elasticità della funzione potenza $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$E(x) = x \cdot \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha} = \alpha \quad (\text{elasticità costante})$$

Teorema del valore medio, massimi e minimi

5.1 Massimi/minimi locali e globali

- Uno degli usi del calcolo differenziale consiste nella **ricerca dei massimi e minimi**, ovvero nell'**ottimizzazione** di una funzione definita su un intervallo I (chiuso/aperto, limitato/illimitato).

Definizione 5.1: di punto di massimo e massimo

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se esiste un punto $\tilde{x}_M \in I$ tale che:

$$f(\tilde{x}_M) \geq f(x), \quad \forall x \in I$$

allora $\tilde{x}_M$ è **punto di massimo** (globale) e $f(\tilde{x}_M)$ è il **massimo** (globale) di f in I .

Definizione 5.2: di punto di minimo e minimo

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se esiste un punto $\tilde{x}_m \in I$ tale che:

$$f(\tilde{x}_m) \leq f(x), \quad \forall x \in I$$

allora $\tilde{x}_m$ è **punto di minimo** (globale) e $f(\tilde{x}_m)$ è il **minimo** (globale) di f in I .

Chiamiamo **estremo** un massimo o un minimo e **punto di estremo** un punto di massimo o di minimo. Un estremo se esiste è unico mentre possono esistere più punti di estremo (anche infiniti).

Definizione 5.3: di punto di massimo locale e massimo locale

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se esiste un punto $\bar{x}_M \in I$ e un intorno $(\bar{x}_M - \delta, \bar{x}_M + \delta)$ con $\delta > 0$, tale che:

$$f(\bar{x}_M) \geq f(x), \quad \forall x \in (\bar{x}_M - \delta, \bar{x}_M + \delta) \cap I$$

allora $\bar{x}_M$ è **punto di massimo locale** e $f(\bar{x}_M)$ è il **massimo locale** di f in $(\bar{x}_M - \delta, \bar{x}_M + \delta) \cap I$.

Definizione 5.4: di punto di minimo locale e minimo locale

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se esiste un punto $\bar{x}_m \in I$ e un intorno $(\bar{x}_m - \delta, \bar{x}_m + \delta)$ con $\delta > 0$, tale che:

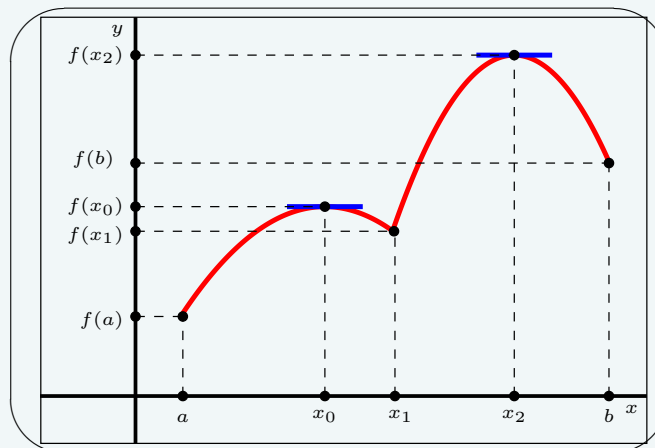
$$f(\bar{x}_m) \leq f(x), \quad \forall x \in (\bar{x}_m - \delta, \bar{x}_m + \delta) \cap I$$

allora $\bar{x}_m$ è **punto di minimo locale** e $f(\bar{x}_m)$ è il **minimo locale** di f in $(\bar{x}_m - \delta, \bar{x}_m + \delta) \cap I$.

- I punti di estremo globale sono anche punti di estremo locale e gli estremi globali sono anche estremi locali.

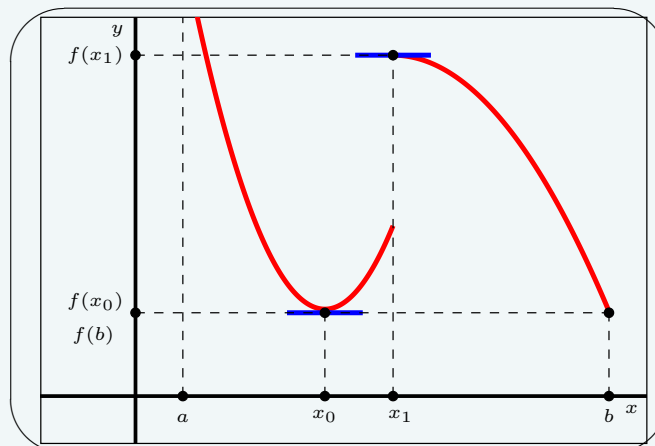
Esempio 5.1: estremi e punti di estremo (globali e locali)

Consideriamo la funzione f col seguente grafico:



- il massimo globale è $f(x_2)$ e x_2 è punto di massimo globale (è anche unico); $f(x_0)$ è massimo locale (non globale) e x_0 è un punto di massimo locale (non globale)
- il minimo globale è $f(a)$ e a è punto di minimo globale (è anche unico); $f(b)$ e $f(x_1)$ sono due minimi locali (non globali) e b e x_1 sono due punti di minimo locale (non globale)

Consideriamo ora la funzione f col seguente grafico:



- il massimo globale non esiste ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$); $f(x_1)$ è massimo locale (non globale) e x_1 è punto di massimo locale (non globale)
- il minimo globale è $f(x_0)$ che è uguale anche a $f(b)$; x_0 e b sono due punti di minimo globale

5.2 Teorema di Fermat e punti stazionari

- In un punto di estremo locale o globale la funzione può non essere derivabile ed essere perfino discontinua. Però il seguente teorema ci dice che se una funzione è derivabile in un punto di estremo locale allora in quel punto la derivata si annulla e quindi la tangente al grafico è orizzontale.

Teorema 5.5: di Fermat

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$, se f ha un estremo locale in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso x_0 punto di massimo locale. Allora:

$$\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ con } \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$$

Perciò per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$ abbiamo:

$$x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

dove per la non-negatività del limite abbiamo utilizzato il teorema di permanenza del segno. D'altra parte:

$$x > x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{e quindi} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Essendo f derivabile in x_0 , si ha:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$

Per il caso x_0 punto di minimo locale si ragiona in maniera analoga. □

Dimostrazione. Se per assurdo fosse $f'(x_0) > 0$, allora per il teorema della permanenza del segno si dovrebbe avere $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Tenuto conto del segno di $x - x_0$, questo implica che $f(x) > f(x_0)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0^+$ e $f(x) < f(x_0)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0^-$. Ma questo contrasta con l'ipotesi che x_0 sia un punto di estremo locale per f . Analogamente si esclude il caso $f'(x_0) < 0$. Deve quindi essere $f'(x_0) = 0$. □

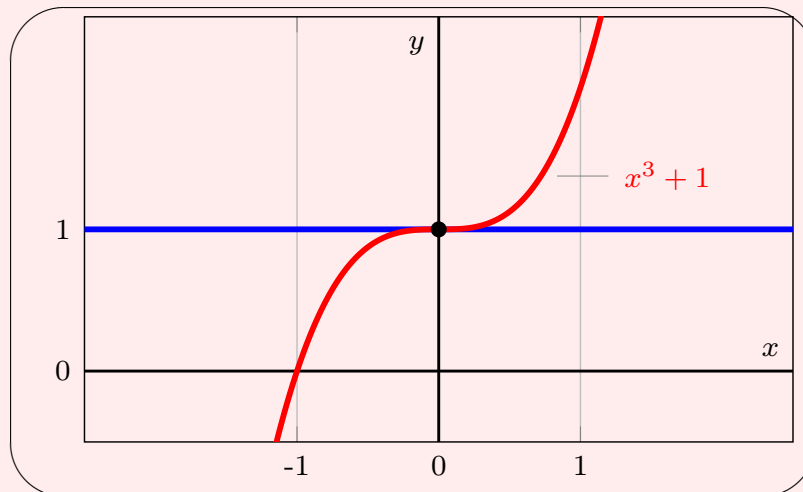
Definizione 5.6: punto stazionario

Un punto x_0 si dice punto stazionario di f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Il Teorema di Fermat dice che per una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$ abbiamo:

$$x_0 \text{ è punto di estremo locale} \Rightarrow \underbrace{x_0 \text{ è punto stazionario}}_{f'(x_0)=0} \quad (5.1)$$

Quindi “ x_0 è punto di estremo locale” è condizione sufficiente a “ x_0 è punto stazionario”. Ma il viceversa non è vero. Un controesempio è dato dalla funzione $f(x) = x^3 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ che ha come funzione derivata $f'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Con $x_0 = 0$ abbiamo $f'(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ non è punto di estremo locale.



Quindi abbiamo:

$$\underbrace{x_0 \text{ è punto stazionario}}_{f'(x_0)=0} \not\Rightarrow x_0 \text{ è punto di estremo locale}$$

Infine, dalla contronominale di (5.1), abbiamo:

$$x_0 \text{ non è punto stazionario} \Rightarrow x_0 \text{ non è punto di estremo locale}$$

5.3 Teorema del valor medio o di Lagrange

Teorema 5.7: del valore medio o di Lagrange

Data una funzione f derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$, allora:

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (5.2)$$

Nel caso $f(b) = f(a)$, il teorema ci dice che esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$, ovvero che esiste almeno un punto in cui la derivata si annulla. Questo corollario del teorema di Lagrange è chiamato **teorema di Rolle**.

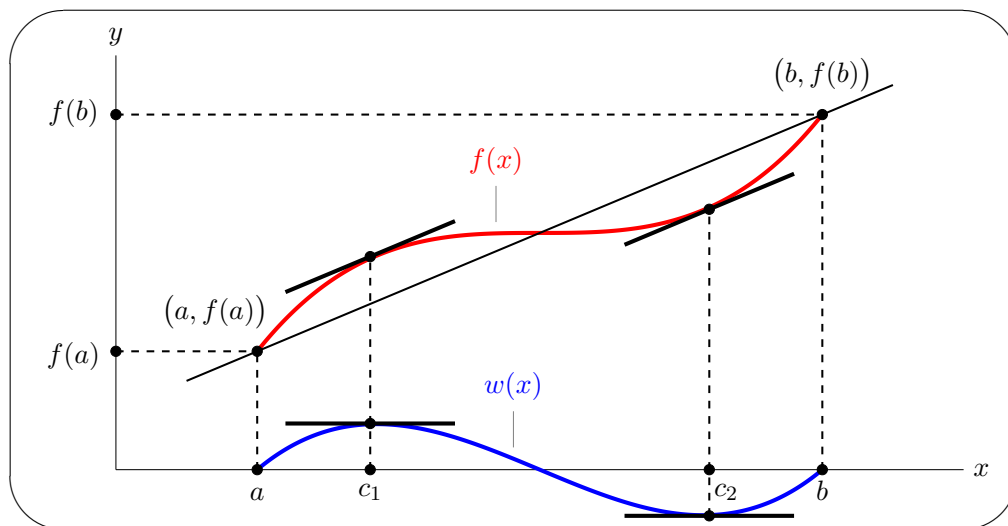
- La derivabilità è richiesta solo nell'intervallo aperto (a, b) per includere anche funzioni continue in uno degli estremi ma non derivabili. Come ad esempio, con $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \in (0, b) \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

- Geometricamente, considerando il grafico di f abbiamo :

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è la pendenza della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$
- $f'(c)$ è la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$

Il teorema del valore medio esprime dunque il fatto che nel punto $(c, f(c))$ la tangente al grafico di f è parallela alla retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. I punti con questa caratteristica possono essere più di uno come mostra la seguente figura:



- La figura mostra anche la funzione

$$w(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$

data dalla differenza fra i valori della funzione e la retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ che ha equazione:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

La funzione $w(x)$ è alla base della dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione:

$$w(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$

Chiaramente $w(a) = w(b) = 0$, inoltre w è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Poiché

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{allora}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \iff \exists c \in (a, b) : w'(c) = 0$$

Essendo w continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass esistono due punti x_1 e x_2 in $[a, b]$ tali che:

$$w(x_1) = M, \text{ il massimo di } w \text{ in } [a, b]; \quad w(x_2) = m, \text{ il minimo di } w \text{ in } [a, b].$$

Se $M = m$, allora $w(x)$ è costante in $[a, b]$, e quindi $w'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$.

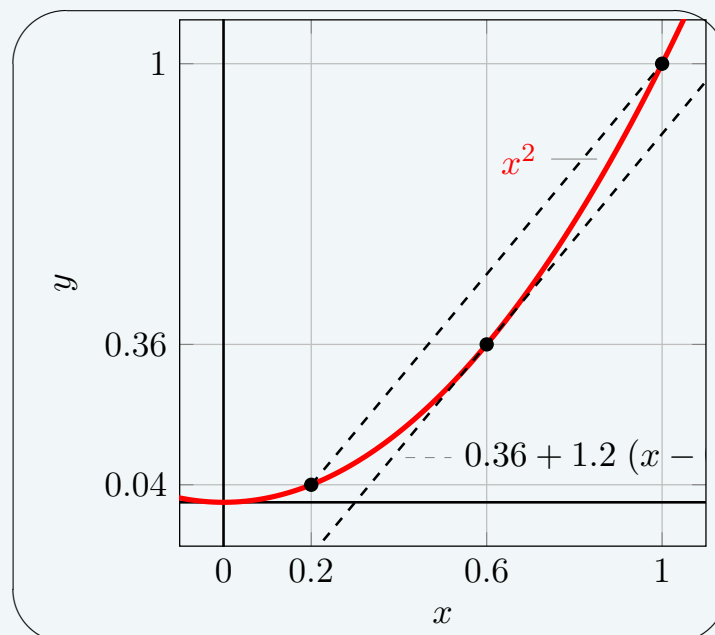
Se $M > m$, almeno uno dei due punti x_1 o x_2 non si trova agli estremi dell'intervallo, essendo $w(a) = w(b) = 0$. Il teorema di Fermat implica allora che nel punto di massimo o minimo che risulta interno (eventualmente entrambi) la derivata di w si annulla e il teorema è così dimostrato. $\square$

Esempio 5.2: utilizzo del teorema dei valori medi

Sia $f(x) = x^2$. Allora $f'(x) = 2x$ e il teorema dei valori medi afferma che in ogni intervallo $[a, b]$ esiste un numero c tale che:

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2c \quad \text{da cui} \quad c = \frac{a + b}{2} \quad (\text{media aritmetica})$$

Ovvero ogni corda AB della parabola $y = x^2$ è parallela alla tangente nel punto di ascissa uguale alla media aritmetica delle ascisse di A e B . Prendendo ad esempio l'intervallo $[0.2, 1]$ ($a = 0.2, b = 1$ e $c = 0.6$), abbiamo:

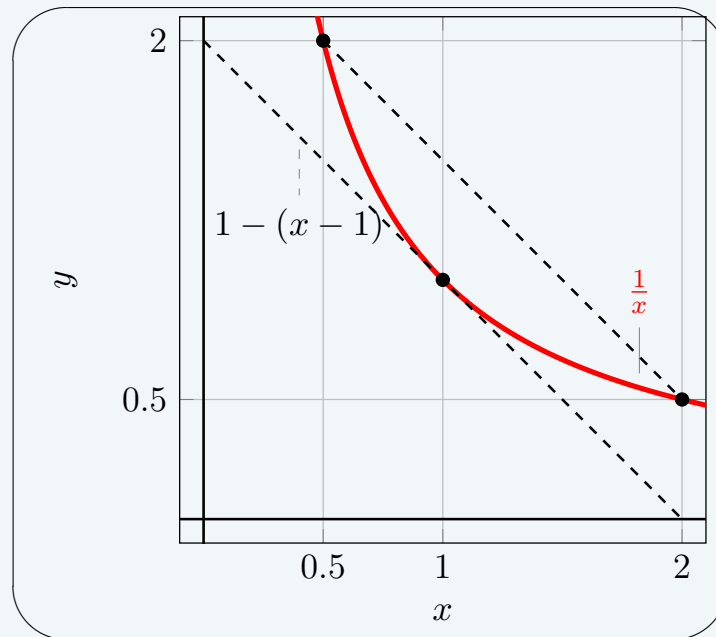


Esempio 5.3: utilizzo del teorema dei valori medi

Sia $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e il teorema dei valori medi afferma che in ogni intervallo $[a, b]$ esiste un numero c tale che:

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \quad \text{da cui} \quad c = \sqrt{a \cdot b} \quad (\text{media geometrica})$$

Ovvero ogni corda AB della iperbole $y = \frac{1}{x}$ è parallela alla tangente nel punto di ascissa uguale alla media geometrica delle ascisse di A e B . Prendendo ad esempio l'intervallo $[0.5, 2]$ ($a = 0.5, b = 2$ e $c = 1$), abbiamo:

**5.4 Teorema del criterio differenziale di monotonia****Teorema 5.8: del Criterio Differenziale di Monotonia**

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continua in I e derivabile nei punti interni di I , allora:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \text{ interno a } I \iff f \text{ è non decrescente in } I \quad (5.3)$$

$$f'(x) \leq 0, \forall x \text{ interno a } I \iff f \text{ è non crescente in } I \quad (5.4)$$

$$f'(x) > 0, \forall x \text{ interno a } I \implies f \text{ è crescente in } I \quad (5.5)$$

$$f'(x) < 0, \forall x \text{ interno a } I \implies f \text{ è decrescente in } I \quad (5.6)$$

Dimostrazione.

($\Rightarrow$) Presi due punti $x_1 < x_2$ nell'intervallo I , si può applicare il teorema di Lagrange

nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e quindi esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Se $f'(c) \geq 0$ (risp. > 0), allora si ha $f(x_2) \geq f(x_1)$ (risp. $f(x_2) > f(x_1)$). Per l'arbitrarietà di x_1 e x_2 abbiamo dimostrato che f è non decrescente (risp. crescente) in I . Se $f'(c) \leq 0$ (risp. < 0) si ragiona in maniera analoga.

($\Leftarrow$) Se f è non decrescente, allora abbiamo

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0 \quad \text{per ogni } z, x \in I, z \neq x$$

e, per il teorema della permanenza del segno, è non negativo anche il suo limite del rapporto per $z \rightarrow x$, che per ipotesi esiste e vale $f'(x)$ per ogni x interno a I . Se f è non crescente si ragiona in maniera analoga.

□

Il Teorema del Criterio Differenziale di Monotonia dice che per una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile nei punti interni di I abbiamo:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \text{ interno a } I \iff f \text{ è non decrescente in } I$$

Quindi “ $f'(x) \geq 0, \forall x$ interno a I ” è condizione necessaria e sufficiente a “ f è non decrescente in I ”. Lo stesso vale per il caso di funzioni non crescenti.

Il Teorema del Criterio Differenziale di Monotonia dice che per una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile nei punti interni di I abbiamo:

$$f'(x) > 0, \forall x \text{ interno a } I \implies f \text{ è crescente in } I$$

Quindi “ $f'(x) > 0, \forall x$ interno a I ” è condizione sufficiente a “ f è crescente in I ”. Ma il viceversa non è vero. Un controesempio è dato dalla funzione $f(x) = x^3 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ che è crescente e derivabile in $\mathbb{R}$, ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in $x_0 = 0$.

Quindi abbiamo:

$$f \text{ è crescente in } I \not\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \text{ interno a } I$$

Infine, dalla contronominale di (5.5), abbiamo:

$$f \text{ non è crescente in } I \Rightarrow \exists x \text{ interno a } I : f'(x) \leq 0,$$

Controllare. Lo stesso vale per il caso di funzioni decrescenti.

- Segue immediatamente dal teorema che con $I = (a, b)$ abbiamo:

$$f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \implies f \text{ costante in } (a, b)$$

L'implicazione inversa è ovvia. Abbiamo allora

$$f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \iff f \text{ costante in } (a, b) \quad (5.7)$$

Quindi “ $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ ” è condizione necessaria e sufficiente a “ f costante in (a, b) ”.

Esempio 5.4: funzioni a derivata nulla

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0, \quad \forall x \neq 0$$

L'implicazione (5.7) permette di dire che f è costante nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e nell'intervallo $(0, \infty)$. Per sapere quanto vale, è sufficiente calcolare f in un punto di ciascun intervallo, per esempio:

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Abbiamo quindi dimostrato che:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

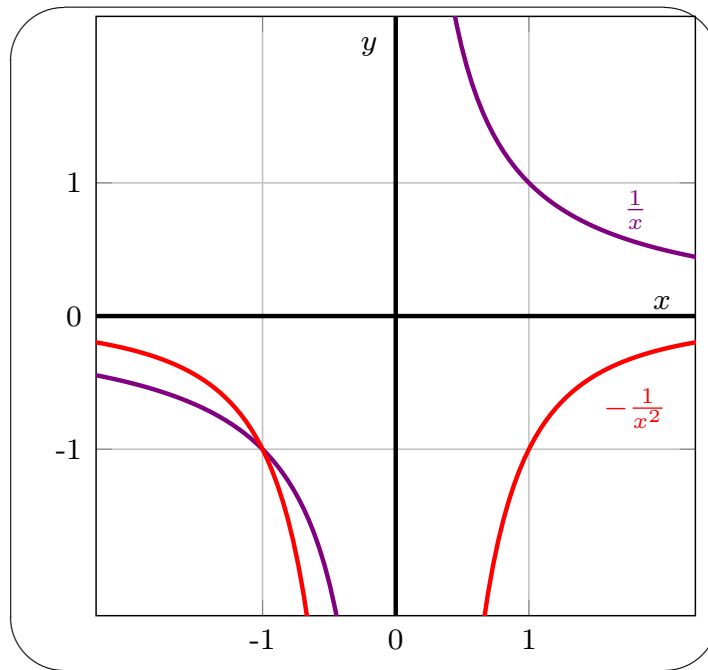
- Tanto nel Teorema del Criterio Differenziale di Monotonia quanto nella implicazione (5.7) è fondamentale che l'insieme I sia un intervallo. Per esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ha derivata

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ma la funzione non è decrescente nel suo dominio. La funzione è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e nell'intervallo $(0, \infty)$, come mostra la figura:



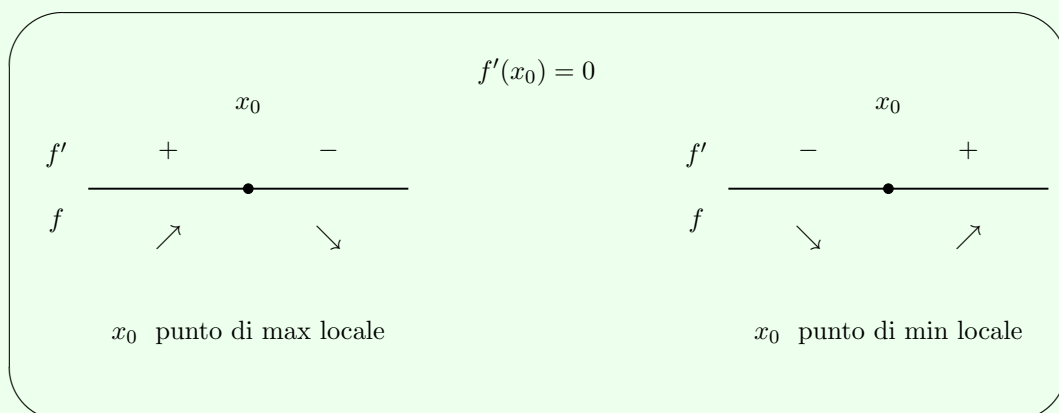
5.5 Ricerca di massimi e minimi

Supponiamo di avere una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e di volerne cercare i massimi e i minimi locali e globali in $[a, b]$. Se f è derivabile in (a, b) si può procedere nel modo seguente:

Passo 1 Si calcolano $f(a)$ e $f(b)$.

Passo 2 Si calcola $f'(x)$ e si risolve l'equazione $f'(x) = 0$. In tal modo si trovano i punti stazionari, tra i quali vi sono gli eventuali punti di estremo locale nell'intervallo (a, b) .

Passo 3 Se non vi sono punti stazionari, $f(a)$ o $f(b)$ sono estremi globali e a e b sono punti di estremo globale. Altrimenti occorre stabilire la natura dei punti stazionari trovati. La funzione f ha un estremo locale in un punto stazionario se e solo cambia il segno se studiando il segno di f' in un loro intorno. Abbiamo i seguenti casi:



Passo 4 Trovati gli eventuali punti di estremo locale si calcola il valore di f in questi punti e lo si confronta con $f(a)$ e $f(b)$ per capire se siano o meno punti di estremo globale e si determinano così gli estremi globali.

Esempio 5.5: ricerca di massimi e minimi

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x e^{-x^2}, \quad \text{con } x \in [0, 2]$$

Passo 1:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 2 e^{-4}$$

Esempio 5.6: ricerca di massimi e minimi

Passo 2:

$$f'(x) = e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

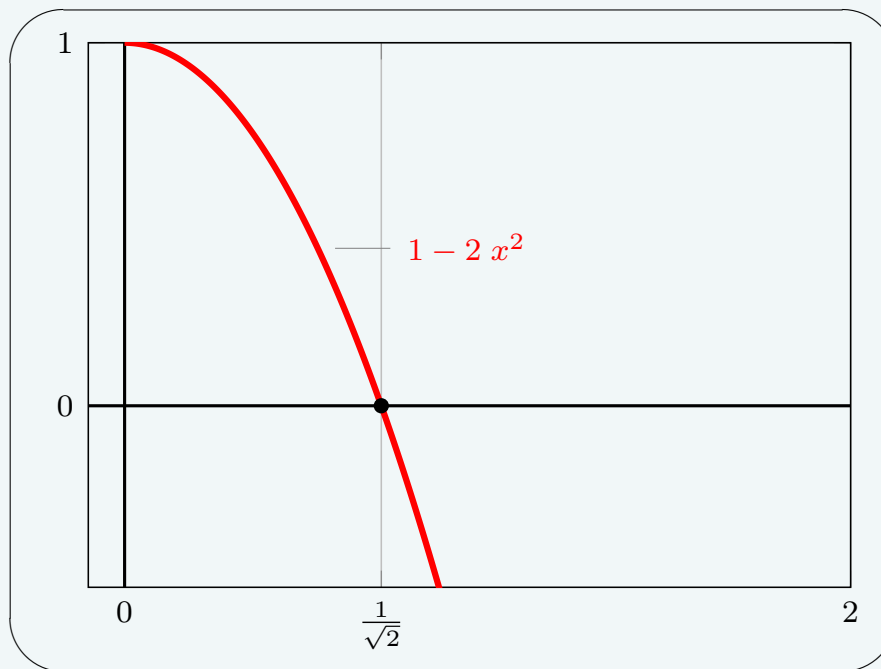
Abbiamo $e^{-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, quindi:

$$f'(x) = 0 \iff (1 - 2x^2) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Solo $\frac{1}{\sqrt{2}} \in [0, 2]$ e quindi abbiamo il punto stazionario $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Passo 3:

Studiamo il segno di f' , vicino a $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Abbiamo $f'(x) \geq 0$ per $2x^2 \leq 1$, ovvero per $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$



Si conclude quindi che:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ è un punto di massimo locale e } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \text{ è un massimo locale}$$

Notiamo inoltre che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{x^2}} = 1 \quad \text{quindi} \quad f(x) \sim x \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

Esempio 5.7: ricerca di massimi e minimi

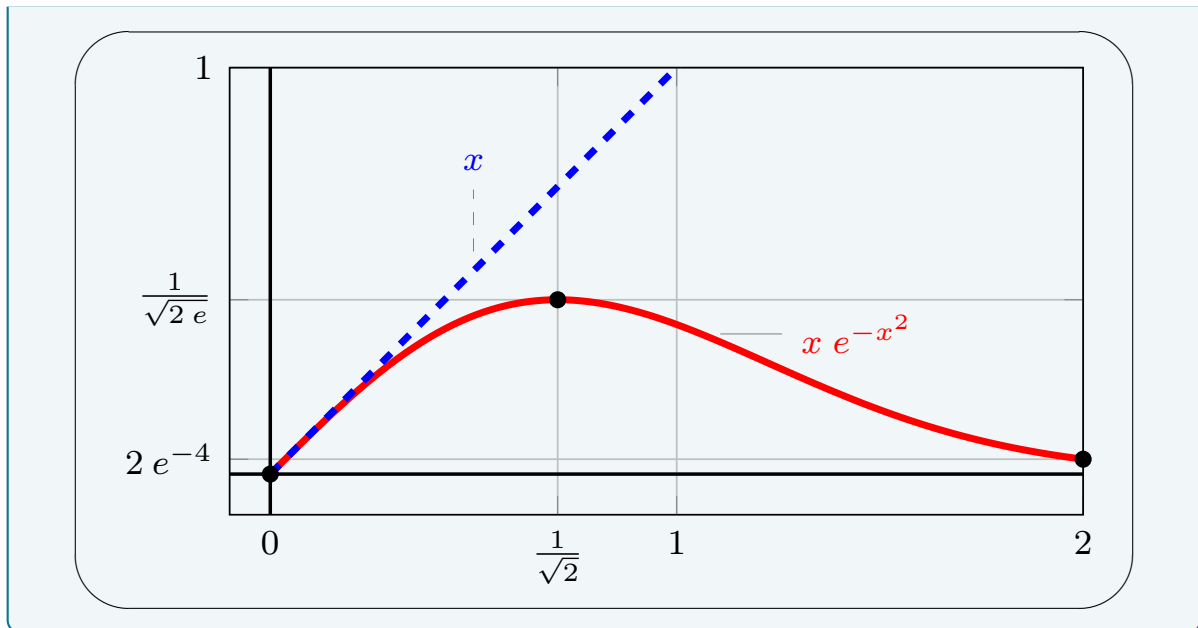
Passo 4:

$$\frac{1}{\sqrt{2}e} > f(0) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}e} > f(2) = 2e^{-4}$$

Si conclude quindi che:

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ è il punto di massimo globale (unico) e 0 è il punto di minimo globale (unico)

$\frac{1}{\sqrt{2}e}$ è il massimo globale e 0 è il minimo globale



5.5.1 Passaggio dal discreto al continuo

Il passaggio “dal discreto al continuo” per le successioni (cioè dai numeri naturali ai reali) è un modo per avere a disposizione gli strumenti del calcolo differenziale

Esempio 5.8: dimostrazione di monotonia per successioni col passaggio al continuo

Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{\log n}{n}, \quad \text{abbiamo } a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ e } a_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per dimostrare che la successione è definitivamente monotona non crescente una strada è utilizzare la definizione e provare che:

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\log n}{n} \geq \frac{\log(n+1)}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$$

Poiché al crescere di n sia il numeratore che il denominatore crescono, non è facile provare questa disuguaglianza per via algebrica.

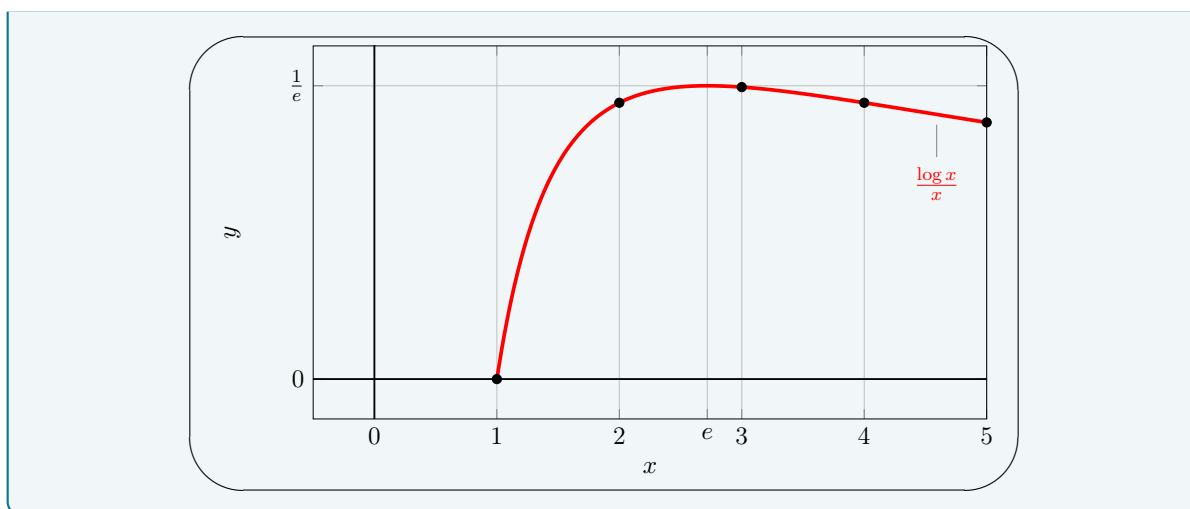
Effettuiamo il passaggio dal discreto al continuo e definiamo la funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x}, \quad \forall x > 1$$

Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} \leq 0, \quad \forall x \geq e$$

e segue che f è non crescente $\forall x \geq e$. Di conseguenza la successione a_n è non crescente per $n \geq 3$ (il primo numero naturale $> e$).



- Attenzione a non usare indiscriminatamente il passaggio dal discreto al continuo. Ad esempio non si può effettuare il passaggio per le successioni $\frac{n!}{2^n}$ o $\frac{n^2 + (-1)^n n}{n^3 + 1}$ in quanto sono definite soltanto per i numeri naturali.

Teorema di De l'Hospital e derivabilità

6.1 Teorema di De l'Hospital

- Una notevole applicazione del calcolo differenziale si ha nel calcolo dei limiti che si presentano nelle forme di indecisione:

$$\left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Teorema 6.1: di De l'Hospital

Siano f, g funzioni derivabili in un intervallo (a, b) con $g, g' \neq 0$ in (a, b) . Se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad (\text{oppure } \pm \infty) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$$

allora:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure se si considera il limite per $x \rightarrow b^-$, con $b \leq +\infty$ (caso che non dimostriamo). Quindi se le ipotesi valgono per a^- e a^+ si può chiaramente applicare anche a un punto interno di un intervallo.

Esempio 6.1: utilizzo del teorema di De l'Hospital

Vogliamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{e} \quad f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, \quad g(x) = x, g'(x) = 1$$

applicando il teorema di De l'Hospital, ad esempio con $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =^H \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Vogliamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{e} \quad f(x) = 1 - \sin x, f'(x) = -\cos x, \quad g(x) = \cos x, g'(x) = -\sin x$$

applicando il teorema di De l'Hospital, ad esempio con $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso:

$$f(x), g(x) \rightarrow 0, \quad \text{per } x \rightarrow a^+$$

Sia $\{x_n\}$ una successione tale che $x_n \rightarrow a^+$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq a, \forall n$ e prolunghiamo per continuità f e g in a ponendo $f(a) = g(a) = 0$.

Definiamo ora la seguente funzione:

$$h(x) = f(x_n) g(x) - g(x_n) f(x)$$

La funzione h soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[a, x_n]$, dunque esiste $t_n \in (a, x_n)$ tale che

$$h'(t_n) = \frac{h(x_n) - h(a)}{x_n - a} = 0 \quad \text{dato che} \quad h(a) = h(x_n) = 0$$

Calcolando

$$h'(x) = f(x_n) g'(x) - g(x_n) f'(x), \quad \text{abbiamo} \quad \underbrace{f(x_n) g'(t_n) - g(x_n) f'(t_n)}_{=h'(t_n)} = 0$$

Dunque per ogni x_n esiste un punto $t_n \in (a, x_n)$ tale che:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \tag{6.1}$$

Per $n \rightarrow +\infty$ abbiamo $t_n \rightarrow a^+$, dato che $a^+ < t_n < x_n$ e $x_n \rightarrow a^+$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi per l'ipotesi del teorema abbiamo:

$$\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \rightarrow \ell \quad \text{e di conseguenza} \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \ell$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Col teorema di De L'Hospital si può facilmente dimostrare il teorema della gerarchia degli infiniti per le funzioni.

Dimostrazione. Proviamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = 0, \quad \text{con } \alpha > 0, \lambda > 0, b > 1$$

Posto $f(x) = x$, $g(x) = b^{\mu x}$ ($\mu > 0$), si ha $f'(x) = 1$, $g'(x) = \mu \log b \, b^{\mu x}$ e poiché:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu \log b \, b^{\mu x}} = 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{b^{\mu x}} = 0$$

Osservando ora che

$$\frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = \left(\frac{x}{b^{(\lambda/\alpha)x}} \right)^\alpha = \left(\frac{x}{b^{\mu x}} \right)^\alpha \quad \text{con } \mu = \frac{\lambda}{\alpha} > 0$$

$$\text{allora} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{b^{\mu x}} \right)^\alpha = 0$$

Proviamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \text{con } \beta > 0, \alpha > 0, a > 1$$

è sufficiente eseguire il cambio di variabile

$$t = \log_a x, \quad x = a^t, \quad \text{abbiamo per } x \rightarrow +\infty \text{ anche } t \rightarrow +\infty$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\beta}{a^{\alpha t}} = 0$$

dato che il secondo limite è uguale nella forma a quello appena dimostrato. $\square$

- Il teorema di De L'Hospital può essere utile per limiti non solubili solo con i limiti notevoli o con i derivanti sviluppi asintotici.

Esempio 6.2: teorema di De l'Hospital e limiti notevoli

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

I limiti notevoli non sono sufficienti a risolvere la forma di indeterminazione, in quanto:

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(1 - \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \right) = [\infty \cdot 0]$$

Il teorema di De L'Hospital dà:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

Esempio 6.3: teorema di De l'Hospital e sviluppi asintotici

Trattiamo ora lo stesso limite con lo sviluppo asintotico del primo ordine:

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3}$$

Ovvero abbiamo ancora una forma indeterminata in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} o(1) = [+\infty \cdot 0]$$

dove $o(1)$ indica una generica funzione che tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

Alla stessa conclusione si arriva anche col seguente ragionamento. Il simbolo $o(x)$ per $x \rightarrow 0$ indica l'insieme delle funzioni che divise per x tendono a 0 per $x \rightarrow 0$. Quindi ad esempio $x^2 = o(x)$ ma anche $x^3 = o(x)$ e il valore del limite non può essere determinato con lo sviluppo asintotico del primo ordine.

Come vedremo più avanti per determinare questo limite con gli sviluppi asintotici occorre uno sviluppo asintotico di un ordine superiore al primo.

Esempio 6.4: teorema di De l'Hospital e stime asintotiche

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$$

Il teorema di De L'Hospital dà:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \text{non esiste}$$

il fatto che questo limite non esista non ci permette di concludere che il limite cercato non esista.

Procediamo invece con le stime asintotiche:

$$\frac{x - \sin x}{x + \sin x} \sim \frac{x}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 0} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 0}$$

quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

- Il teorema è utile quando la sua applicazione semplifica il limite anziché complicarlo, ovvero l'ordine di infinitesimo (o di infinito) al numeratore o a denominatore si abbassa.

Esempio 6.5: teorema di De l'Hospital

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Il teorema di De L'Hospital dà:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-1/x^2})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 e^{-1/x^2}}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Applicando invece il cambio variabile:

$$x^2 = \frac{1}{t}, \quad x \rightarrow 0^+ \text{ equivale a } t \rightarrow +\infty$$

sostituendo abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{(x^2)^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{(\frac{1}{t})^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-1/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0$$

dove l'ultimo limite è ottenuto grazie al teorema della gerarchia degli infiniti.

- Talvolta, il teorema va applicato più volte consecutivamente, per sciogliere la forma di indeterminazione. Anche in questo caso già dopo la prima applicazione ci si dovrebbe accorgere che l'ordine di infinitesimo (o di infinito) al numeratore o a denominatore si è abbassato.

Esempio 6.6: teorema di De l'Hospital

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^3 - x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Il teorema di De L'Hospital dà:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^3 - x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x \cos^2 x}{3x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Il teorema di De L'Hospital applicato due volte dà:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^3 - x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x \cos^2 x}{3x^2 - 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\rightarrow 1}{3 \cos x} \left(\overset{\rightarrow 1}{\cos^2 x} - \overset{\rightarrow 0}{2 \sin^2 x} \right)}{\underbrace{6x}_{\rightarrow 0} - 2} = -\frac{3}{2}$$

- Il teorema si usa per quozienti, non per prodotti
- Il teorema si usa per quozienti che siano effettive forme di indeterminazione:

$$\left[\frac{0}{0} \right] \quad e \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

- Il teorema prescrive di calcolare il quoziente delle derivate, non la derivata del quoziente
- Se il limite di f'/g' non esiste, nulla si può affermare sul limite di f/g .

6.2 Limite della funzione derivata e derivabilità

Teorema 6.2: del limite della funzione derivata

Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in a , derivabile in (a, b) , e $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$ allora $f'_+(a) = m$.

Se la funzione è continua in a ed esiste il limite destro della derivata, allora esiste la derivata destra, e coincide con quel limite. Un analogo enunciato del teorema vale per la derivata sinistra e quindi per la derivata.

Dimostrazione. Sia $h > 0$. Applicando il teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[a, a+h]$, otteniamo che esiste $t_h \in [a, a+h]$ tale che

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(t_h)$$

Per $h \rightarrow 0^+$ si ha che $t_h \rightarrow a^+$, quindi per ipotesi del teorema $f'(t_h) \rightarrow m$ per $t_h \rightarrow a^+$. Di conseguenza esiste

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m$$

□

Sotto le ipotesi del teorema è possibile quindi calcolare la derivata destra, la derivata sinistra o la derivata senza utilizzare il limite del rapporto incrementale

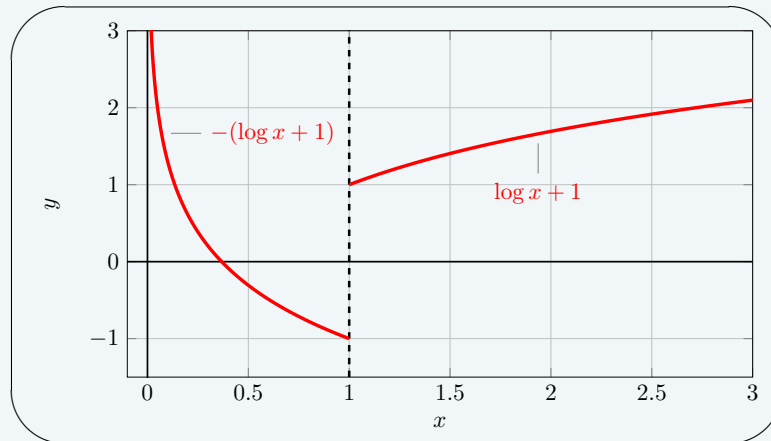
Esempio 6.7: derivabilità

Supponiamo di voler studiare la derivabilità o meno della funzione:

$$f(x) = x \cdot |\log x|$$

definita per $x > 0$. Con $x \neq 1$, dove $\log x = 0$, abbiamo:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \log x, & x > 1 \\ -x \cdot \log x, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} \log x + 1, & x > 1 \\ -(\log x + 1), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

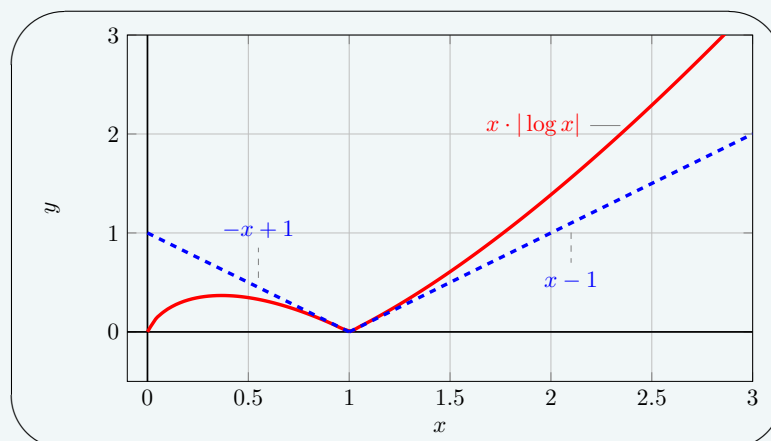


In $x = 1$ la funzione $f(x)$ è continua, e abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x + 1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\log x - 1) = -1$$

quindi il teorema è applicabile (da destra e da sinistra) e abbiamo:

$$f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1, \text{ per cui } x = 1 \text{ è un punto angoloso e } f'(1) \text{ non esiste}$$



Esempio 6.8: derivabilità

Supponiamo di voler studiare la derivabilità o meno della funzione:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

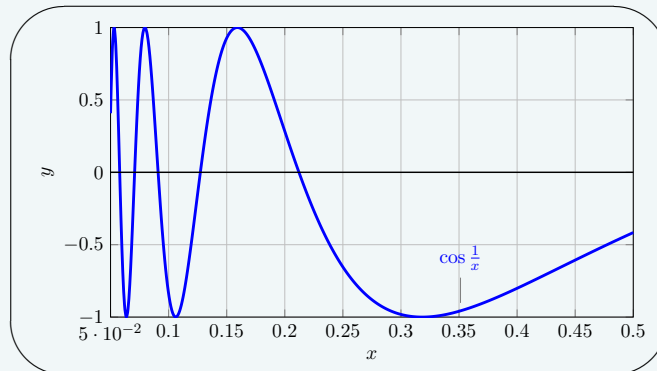
definita per $x \neq 0$. Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

e possiamo prolungare f per continuità definendo $f(0) = 0$, ed f risulta continua anche in

0. Con $x \neq 0$, abbiamo:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0}$$

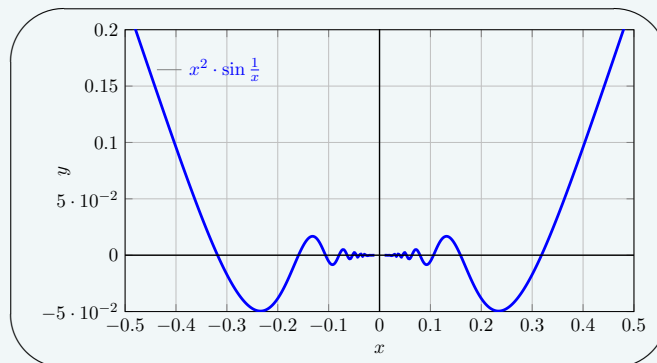


Vicina a zero, la funzione $\cos \frac{1}{x}$, come la funzione $\sin \frac{1}{x}$, non si può disegnare in quanto ha infinite oscillazioni. Quindi le ipotesi del teorema non sono soddisfatte dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ non esiste, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \text{ non esiste, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \text{ non esiste}$$

Questo non ci permette però di concludere che la funzione non sia derivabile in $x_0 = 0$. Per calcolare la derivata occorre usare il limite del rapporto incrementale. Abbiamo

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0 \text{ quindi la funzione è derivabile in } x = 0$$



Derivata seconda

7.1 Derivata seconda e funzione derivata seconda

- Possiamo ora chiederci se la funzione $f'(x)$ sia a sua volta derivabile (in un punto o in un intervallo).

Definizione 7.1: di derivata seconda

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ e $f' : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\delta > 0$, f si dice derivabile due volte in x_0 se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

tale limite prende il nome di derivata seconda di f in x_0 .

- Per indicare la funzione derivata seconda si usano le seguenti notazioni:

$$\underbrace{f''(x_0)}_{\text{notazione di Lagrange}} \quad \underbrace{\ddot{f}(x_0)}_{\text{notazione di Newton}} \quad \underbrace{\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}}_{\text{notazione di Leibniz}}$$

Definizione 7.2: di funzione derivata seconda

Se una funzione derivata f' è derivabile in ogni punto dell'intervallo (a, b) , la funzione

$$f'' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'' : x \mapsto f''(x)$$

si chiama **funzione derivata seconda** di f .

- Per indicare la funzione derivata seconda si usano le seguenti notazioni:

$$\underbrace{f''(x)}_{\text{notazione di Lagrange}} \quad \underbrace{\ddot{f}(x)}_{\text{notazione di Newton}} \quad \underbrace{\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}}_{\text{notazione di Leibniz}}$$

7.1.1 Funzione derivata di ordine n

- In modo del tutto analogo si definisce la derivata di ordine n , o derivata n -esima, e la funzione derivata n -esima che sono indicate con i simboli:

$$\underbrace{f^{(n)}(x_0), f^{(n)}(x)}_{\text{notazione di Lagrange}} \quad \underbrace{\frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=x_0} \text{ e } \frac{d^n y}{dx^n} \Big|_{x=x_0}, \frac{d^n f}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n} \text{ e } \frac{d^n y}{dx^n}}_{\text{notazione di Leibniz}}$$

7.1.2 Significato geometrico della derivata seconda

Se la derivata prima ha, come significato geometrico quello di pendenza del grafico, la derivata seconda rappresenta la **velocità di variazione di tale pendenza** e pertanto costituisce una misura del **grado di scostamento del grafico dall'andamento rettilineo**.

- Cominciamo considerando la famiglia di funzioni che soddisfano le condizioni:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) \geq 0$$

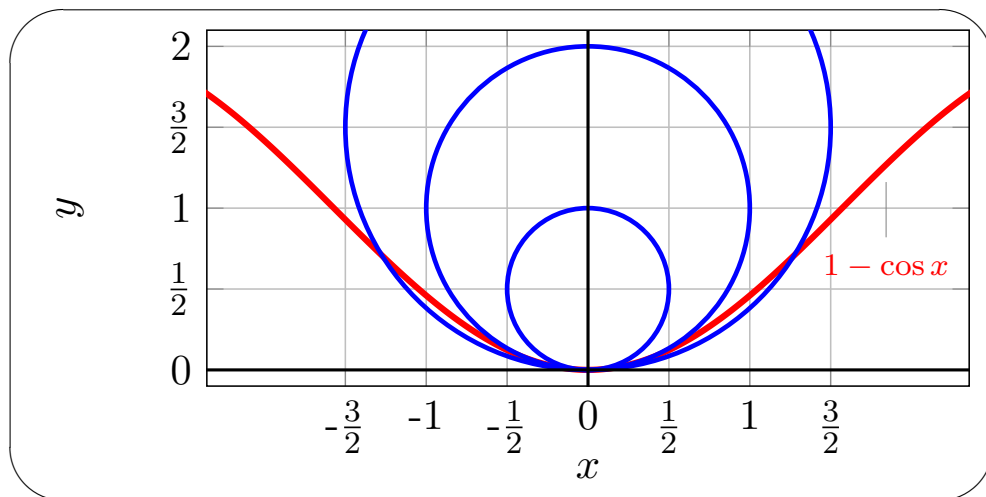
e la famiglia di semicirconferenze con centro sull'asse y tangente al grafico di f nell'origine

$$c_r(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{dove } r > 0 \text{ è il raggio}$$

Per ogni $r \in \mathbb{R}_+$, abbiamo:

$$c'_r(0) = c_r(0) = 0 \quad \text{dato che} \quad c'_r(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Ad esempio la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ con $f(0) = f'(0) = 0$ e i cerchi con raggi $r \in \{0.5, 1, 1.5\}$ sono:



- Tra queste semicirconferenze vogliamo selezionare quella che, non soltanto, ha la stessa tangente in $x = 0$ ma anche la stessa velocità di variazione della pendenza in $x = 0$. Ovvero vogliamo scegliere r in modo che:

$$c''_r(0) = f''(0) \tag{7.1}$$

Abbiamo:

$$c'_r(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{e} \quad c''_r(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}$$

quindi se vogliamo che sia soddisfatta la (7.1) occorre scegliere r in modo che:

$$\underbrace{\frac{1}{r}}_{=c''_r(0)} = f''(0) \quad (7.2)$$

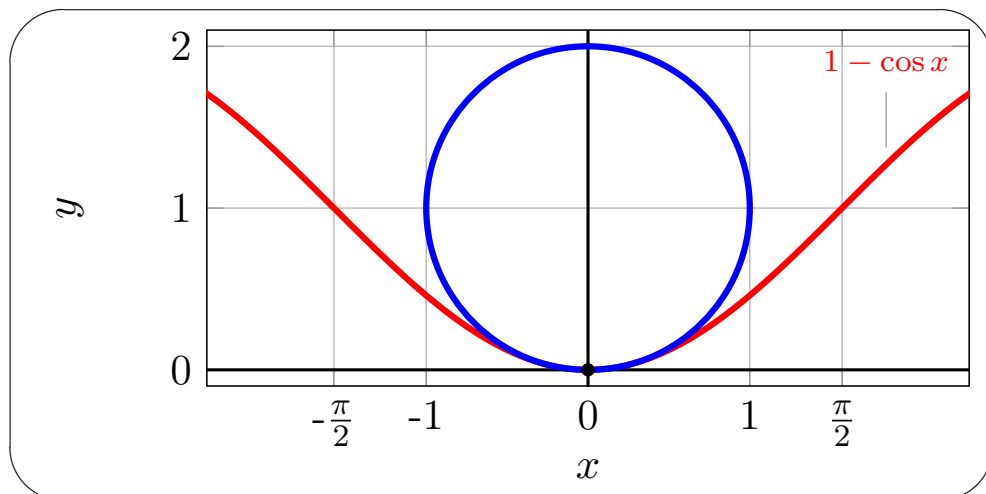
La (7.2) esprime il significato geometrico della derivata seconda in $x = 0$ per la famiglia di funzioni che soddisfano le condizioni $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) \geq 0$. Ovvero $f''(0)$ rappresenta il reciproco del raggio della semicirconferenza che meglio approssima f in $x = 0$.

- Riprendiamo la funzione $f(x) = 1 - \cos x$, abbiamo

$$f'(x) = \sin x \quad \text{e} \quad f''(x) = \cos x$$

quindi

$$f''(0) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} = 1 \quad \text{quindi} \quad r = 1$$



Ripetendo un'analoga costruzione in un punto generico $(x, f(x))$ del grafico di f (senza supporre a priori $f(x) = f'(x) = 0$) si trova che il **cerchio che meglio approssima il grafico della funzione nel punto** ha raggio $r(x)$ dato da:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}} \quad (7.3)$$

Il valore $\frac{1}{r(x)}$ prende il nome di **curvatura** (del grafico) di f in x e il valore $r(x)$ è il **raggio di curvatura**.

Esempio 7.1: raggio di curvatura e curvatura

Consideriamo la parabola (parametrica):

$$f(x) = a x^2 \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \quad \text{abbiamo} \quad f'(x) = 2 a x \quad \text{e} \quad f''(x) = 2 a$$

e la seguente curvatura:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{2 |a|}{(1 + 4 a^2 x^2)^{3/2}}$$

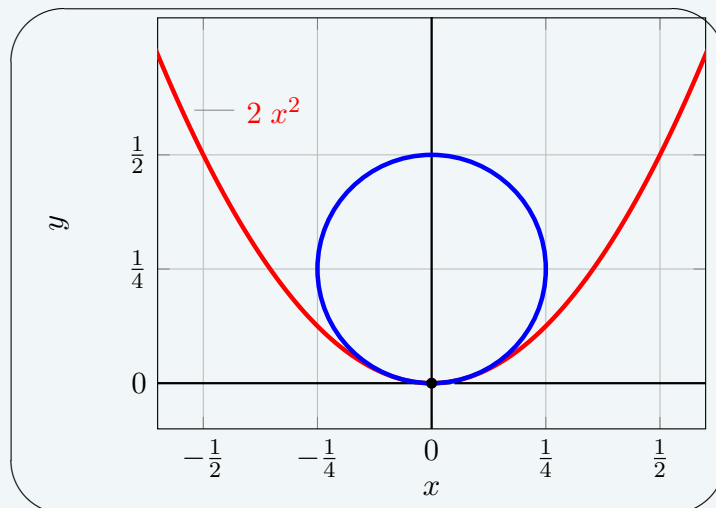
Si noti che la curvatura è massima per $x = 0$ cioè nel vertice.

Consideriamo ora la parabola

$$y = 2 x^2$$

e ci calcoliamo il raggio del cerchio $r(x)$ che meglio approssima il grafico nel punto di ascissa $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Abbiamo:

$$\frac{1}{r(0)} = \frac{2 |2|}{(1 + 4 \cdot 2^2 \cdot 0^2)^{3/2}} = 4 \quad \text{quindi} \quad r(0) = \frac{1}{4}$$



$$\frac{1}{r\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2 |2|}{\left(1 + 4 \cdot 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{4}{5^{3/2}} \approx 0.3577 \quad \text{quindi} \quad r\left(\frac{1}{2}\right) \approx 2.7950$$

7.2 Derivata seconda, concavità e convessità

- Vedremo ora come rendere più preciso, qualitativamente e quantitativamente, questa idea di curvatura del grafico attraverso il concetto di **convessità**.

7.2.1 Insiemi convessi

Definizione 7.3: di insieme convesso

Un insieme $F \subseteq \mathbb{R}^2$ (porzione dello spazio euclideo) è **convesso** se per ogni coppia di punti $P_a, P_b \in F$ il segmento che congiunge P_a a P_b (chiamato **corda**) è interamente contenuto in F .

Dati due punti P_a e P_b e un valore λ compreso tra 0 e 1, i.e., $0 \leq \lambda \leq 1$, il punto:

$$P_c = \lambda P_a + (1 - \lambda) P_b$$

si chiama **combinazione (lineare) convessa** dei punti P_a e P_b . I punti P_c al variare di λ si muovono sul segmento che congiunge P_a a P_b .

Definizione 7.4: di insieme convesso – definizione equivalente

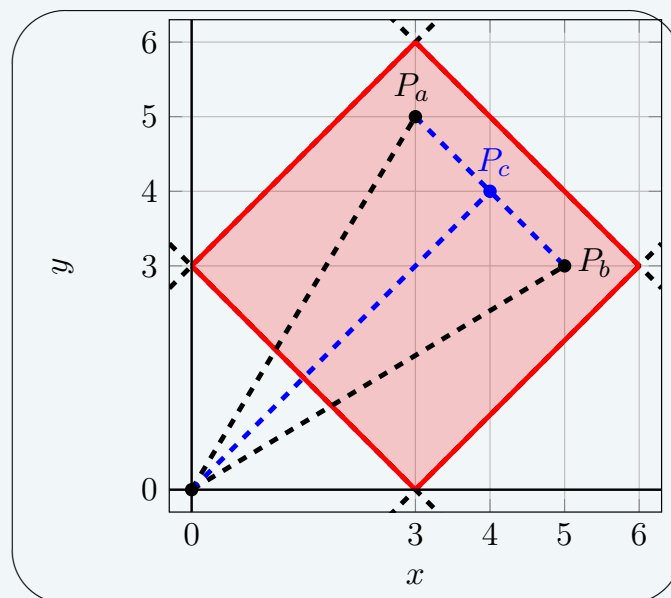
Un insieme $F \subseteq \mathbb{R}^2$ è **convesso** se:

$$\forall P_a, P_b \in F, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad P_c = \lambda P_a + (1 - \lambda) P_b \in F$$

Esempio 7.2: insieme convesso

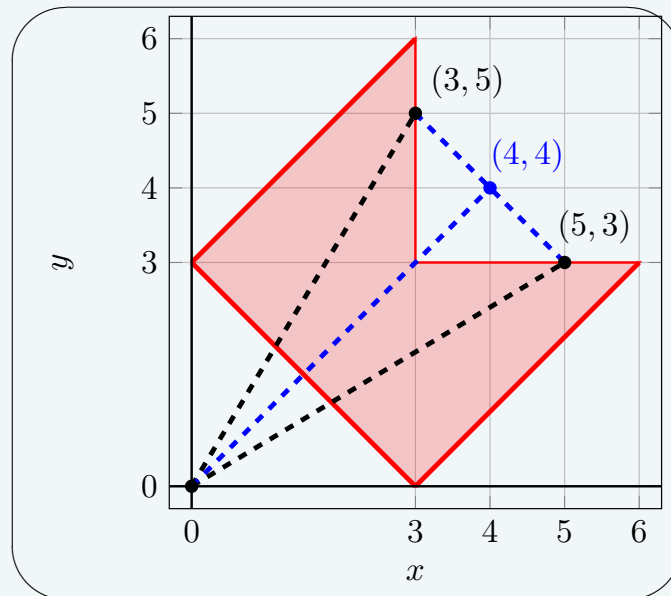
Consideriamo ad esempio il seguente insieme convesso dato dall'intersezione di 4 semi-piani:

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x + y \geq 3, & x + y \leq 9, \\ -x + y \leq 3, & -x + y \geq -3 \end{array} \right\}$$



Esempio 7.3: insieme non convesso

Consideriamo ora il seguente insieme:



L'insieme non è convesso in quanto ad esempio la combinazione convessa dei punti $(5, 3)$ e $(3, 5)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$, ovvero il punto:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3, \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = (4, 4)$$

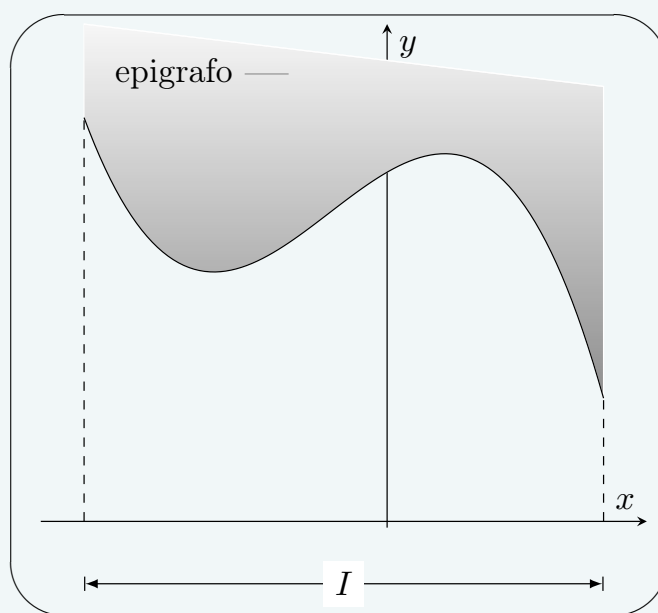
non appartiene all'insieme.

7.2.2 Funzioni convesse/concave**Definizione 7.5: di epigrafo (o sopra grafico)**

Consideriamo una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si chiama **epigrafo** (o sopra grafico) di f l'insieme:

$$\text{epi } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}$$

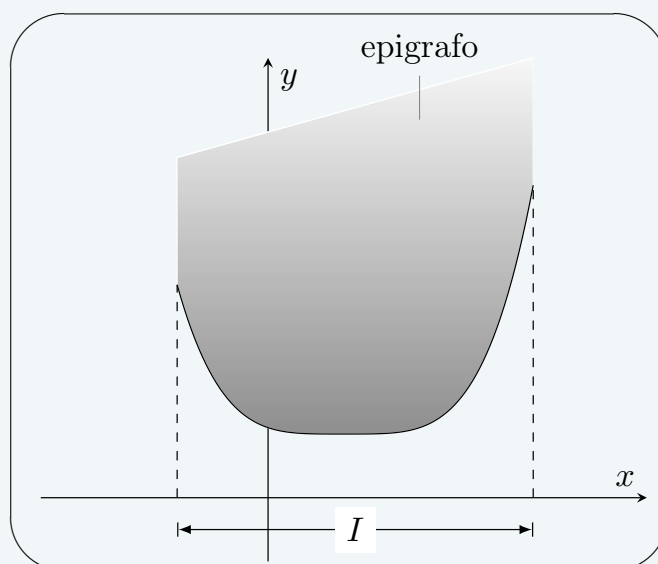
Esempio 7.4: epigrafo



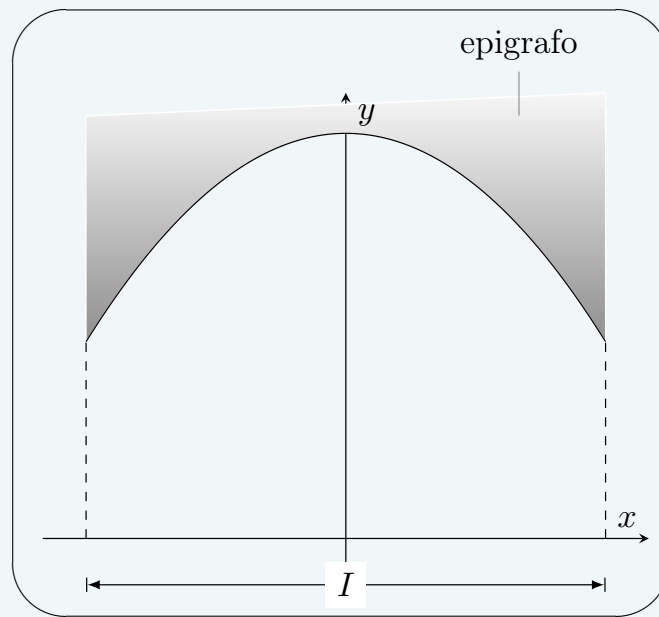
Definizione 7.6: di funzione convessa (concava)

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è **convessa** in I se il suo epigrafo è un insieme convesso. Una funzione è **concava** in I se $-f$ è convessa in I .

Esempio 7.5: funzione convessa



Esempio 7.6: funzione concava

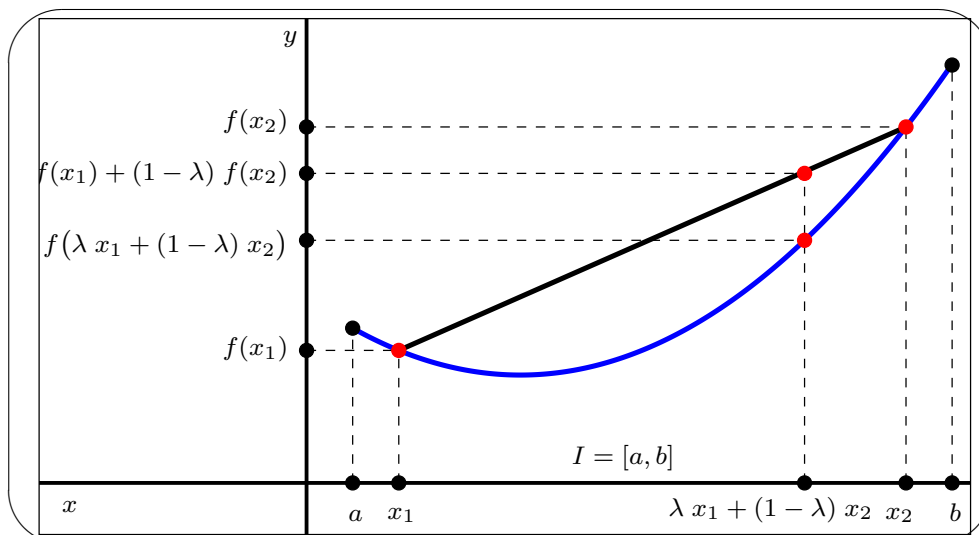


Definizione 7.7: di funzione convessa (concava) – definizione equivalente

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è **convessa** (**concava**) in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ il segmento (“corda”) di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (sopra) il grafico di f .

La definizione di funzione convessa si traduce nella disuguaglianza analitica:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I, 0 \leq \lambda \leq 1$$



- Se nella precedente disuguaglianza vale sempre il $<$ (con $\lambda \neq 0, 1$) la funzione si dice **strettamente convessa**. Per le funzioni concave (o strettamente concave) varrà una analoga disuguaglianza col verso $\geq$ (o $>$).

- Si osservi che al variare di $0 \leq \lambda \leq 1$: il punto $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ percorre il segmento $[x_1, x_2]$ sull'asse x ; il punto $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$ percorre il segmento $[f(x_1), f(x_2)]$ sull'asse y ; il punto:

$$\left(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \right)$$

percorre il grafico della funzione; il punto:

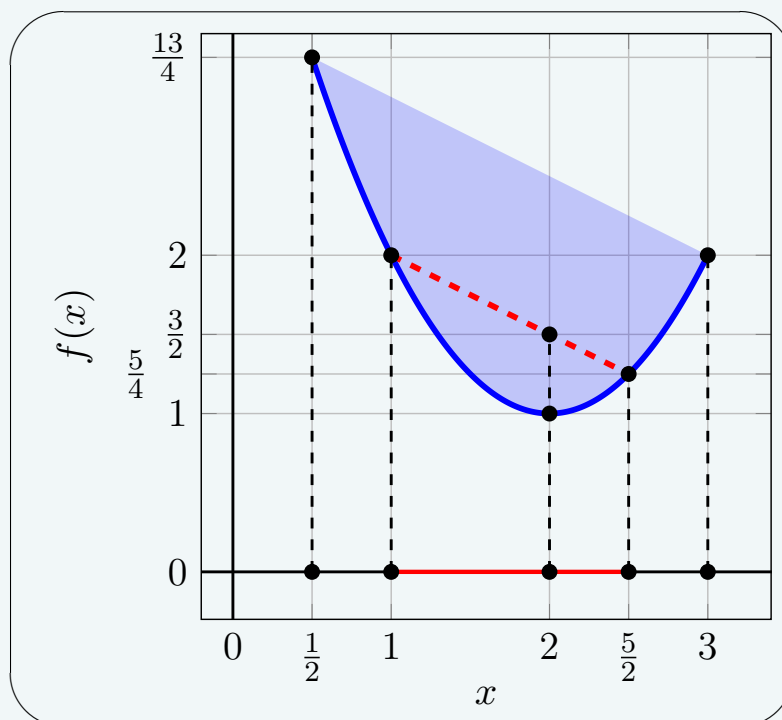
$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2))$$

percorre il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Esempio 7.7: grafico di funzione convessa

Consideriamo la funzione convessa $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ di dominio $[\frac{1}{2}, 3]$ e prendiamo ad esempio l'intervallo $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{5}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{3}$. Abbiamo la seguente combinazione (lineare) convessa:

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}, \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \right) = \left(2, \frac{3}{2} \right)$$



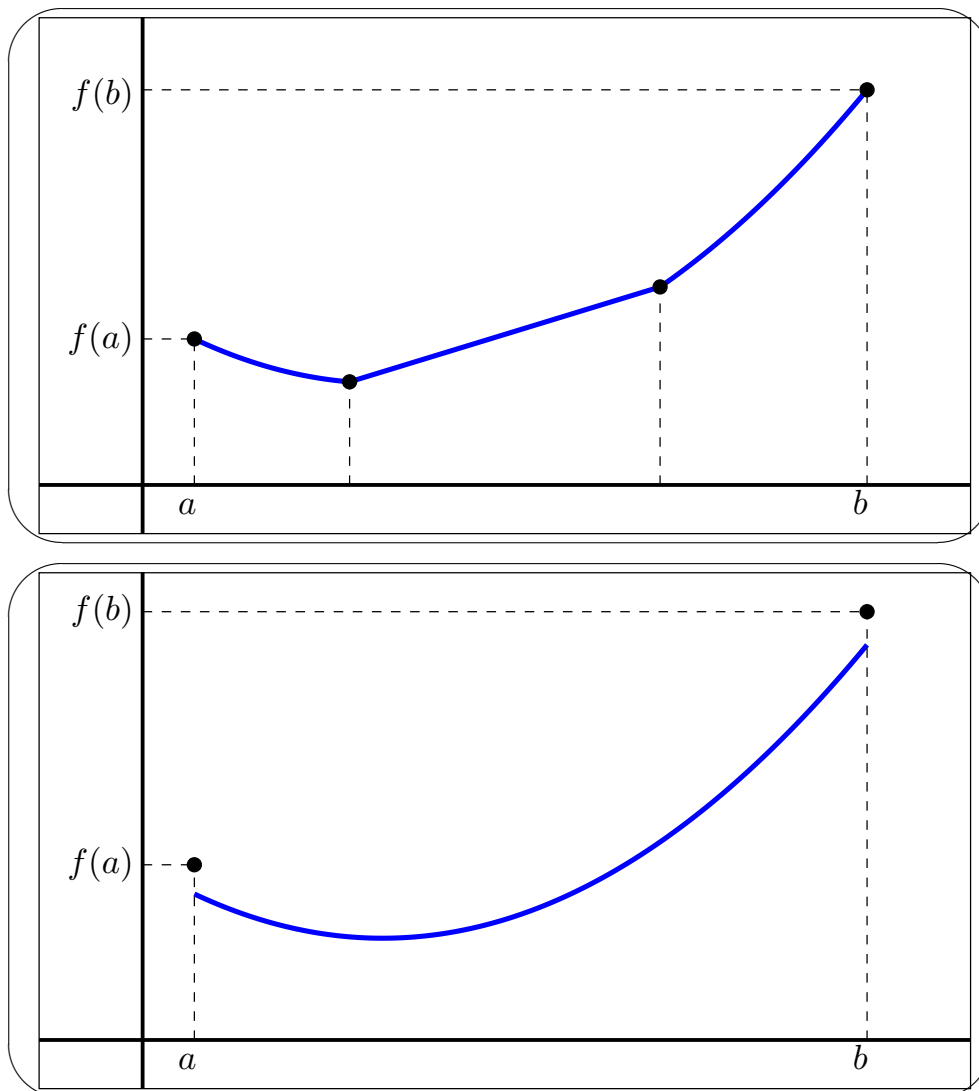
- Si noti che la definizione di funzione convessa non richiede a priori che la funzione sia continua o derivabile in un intervallo.

Teorema 7.8

Una funzione convessa (o concava) su un intervallo I è continua in I salvo al più negli estremi dell'intervallo. Inoltre possiede derivata destra e sinistra in ogni punto interno dell'intervallo.

Dimostrazione. Omessa □

- I punti angolosi all'interno dell'intervallo e punti di discontinuità agli estremi dell'intervallo sono i soli comportamenti irregolari permessi ad una funzione convessa o concava, come mostrato dai seguenti esempi:



7.3 Convessità e derivate

- Se sappiamo a priori che la funzione è derivabile una volta o due volte nell'intervallo considerato, allora la convessità è legata alla derivata prima e seconda della funzione.

Teorema 7.9

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

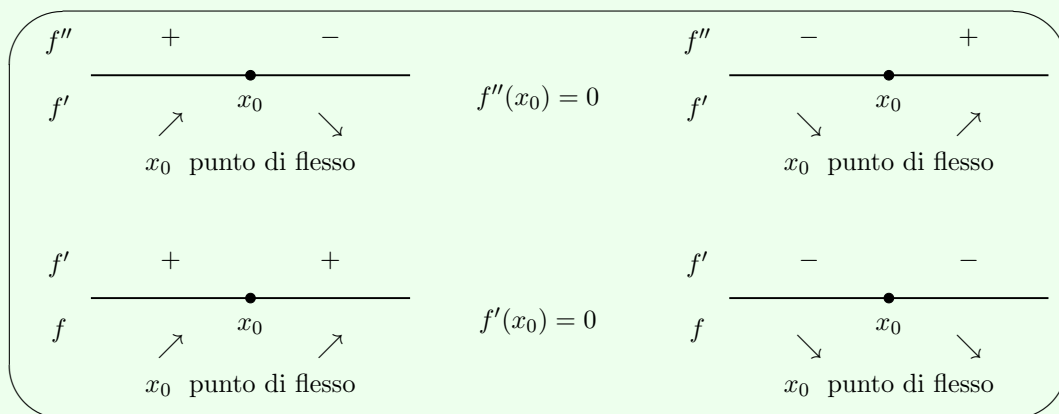
- a) Se f è derivabile in (a, b) , allora f è convessa (concava) in (a, b) se e solo se f' è crescente (decrescente) in (a, b) .
- b) Se f è derivabile due volte in (a, b) , allora f è convessa (concava) in (a, b) se e solo se:

$$f''(x) \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall x \in (a, b)$$

- Il teorema si modifica in maniera ovvia per le funzioni strettamente convesse o concave.

Dimostrazione. Non dimostriamo il punto (a). Il punto (b) segue da (a) per il test di monotonia applicato ad f' . $\square$

Come conseguenza di questo teorema, lo studio del segno della derivata seconda ci permette di decidere della convessità o concavità di una funzione (**controllare**).


Esempio 7.8: convessità delle funzioni esponenziali

Le funzioni esponenziali

$$f(x) = a^x$$

sono convesse in $\mathbb{R}$, per qualunque base $a > 0, a \neq 1$ dato che:

$$f'(x) = a^x \log a; \quad f''(x) = a^x \log^2 a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, a \neq 1$$

Esempio 7.9: convessità/concavità delle funzioni logaritmiche

Le funzioni logaritmiche

$$f(x) = \log_a x$$

sono concave in $(0, +\infty)$ se $a > 1$ e convesse in $(0, +\infty)$ se $0 < a < 1$, dato che:

$$f'(x) = \frac{1}{x \log a}; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \log a} \quad \begin{cases} < 0, \forall x > 0, & \text{se } a > 1 \\ > 0, \forall x > 0, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esempio 7.10: convessità/concavità delle funzioni potenza

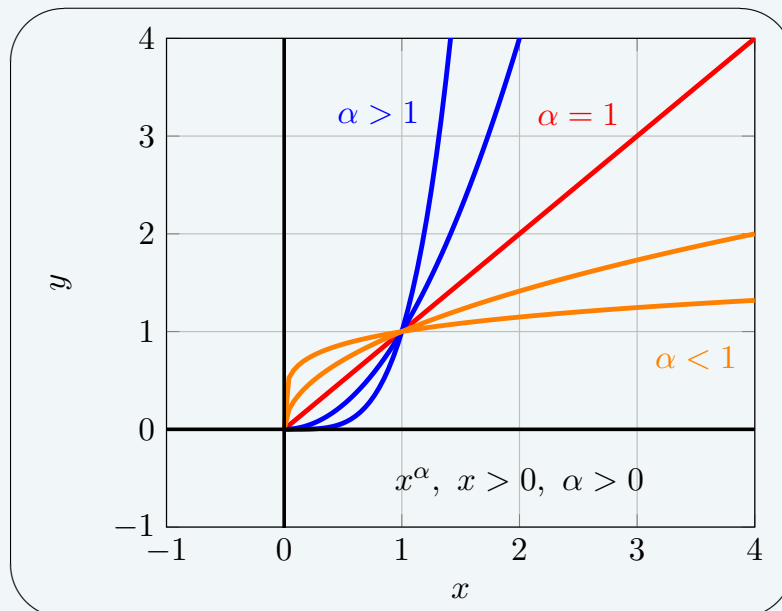
Le funzioni potenza a esponente reale α :

$$f(x) = x^\alpha$$

sono convesse in $(0, +\infty)$ se $\alpha > 1$ oppure $\alpha < 0$ e concave in $(0, +\infty)$ se $0 < \alpha < 1$, dato che:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}; \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

che ha, per ogni $x > 0$, il segno di $\alpha(\alpha-1)$.



7.4 Convessità e rette tangenti

- Un'utile caratterizzazione geometrica della convessità coinvolge le rette tangenti al grafico della funzione

Teorema 7.10

Una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b) , è convessa (concava) in (a, b) se e solo se comunque si scelga un punto $x_0 \in (a, b)$ si ha che il grafico di f si mantiene in tutto (a, b) sopra (sotto) il grafico della sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$.

Dimostrazione. Omessa

□

Esempio 7.11: rette tangenti e grafici di funzioni convesse

Consideriamo la funzione:

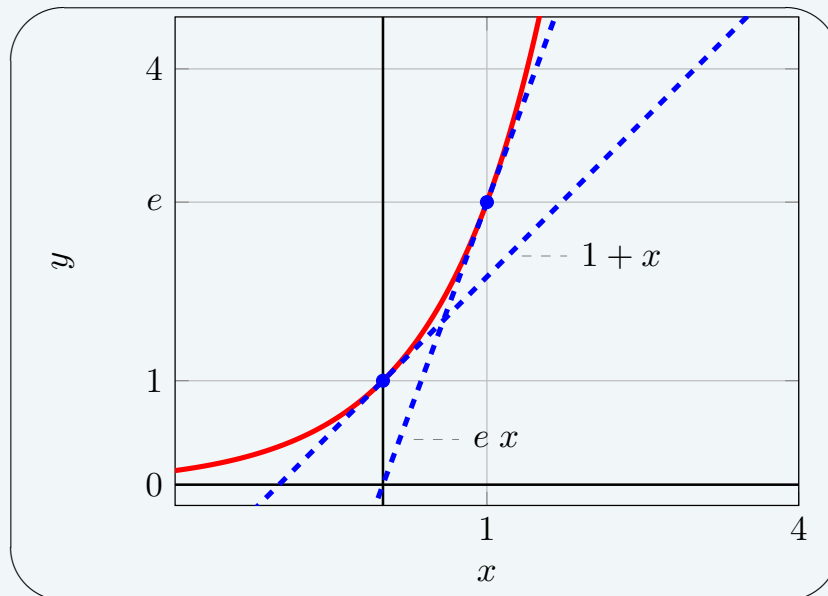
$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x \quad \text{è convessa su tutto } \mathbb{R}$$

La retta tangente al grafico di f ad esempio in $x = 0$, ovvero nel punto $(0, 1)$ è:

$$y = 1 + x \quad \text{quindi} \quad e^x \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

La retta tangente al grafico di f ad esempio in $x = 1$, ovvero nel punto $(1, e)$ è:

$$y = e + e(x - 1) \quad \text{quindi} \quad e^x \geq e x, \quad x \in \mathbb{R}$$



Una funzione (derivabile) convessa sta sopra le proprie rette tangenti e contemporaneamente sta sotto le proprie corde (definizione di convessità).

- Questo permette di concludere che, presi due punti qualsiasi sul grafico di una funzione convessa, il grafico tra quei due punti cade tutto nel **triangolo** che ha per lati la corda che li unisce e le rette tangenti al grafico nei due punti.

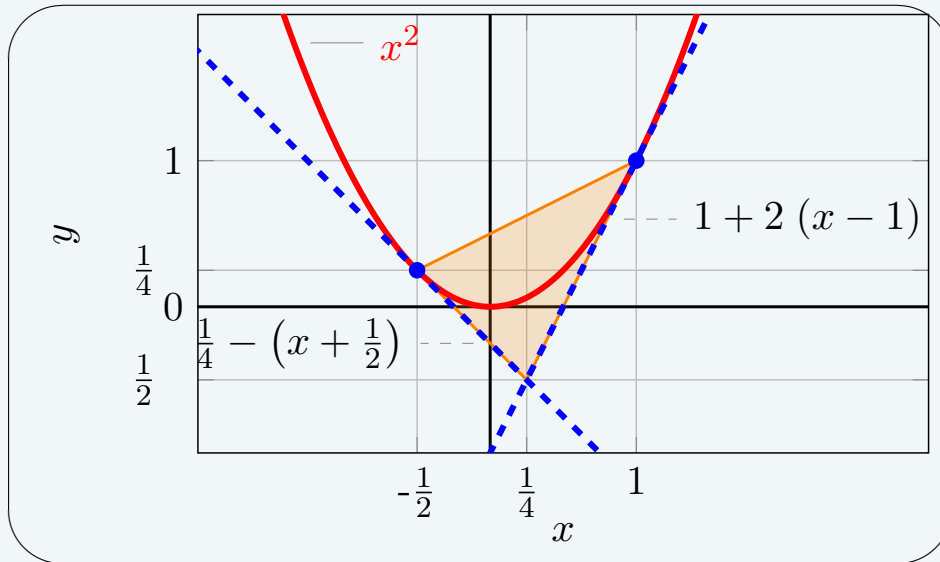
Esempio 7.12: rette tangenti/corde e grafici di funzioni convesse

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2 \quad \text{è convessa su tutto } \mathbb{R}$$

Le tangenti al grafico di f ad esempio nei punti $x_1 = -0.5$ e $x_2 = 1$ sono:

$$y = \frac{1}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad y = 1 + 2(x - 1)$$



7.5 Punti di flesso

- Il verso della concavità di una funzione (ossia il fatto che sia convessa o concava) può cambiare, nel suo insieme di definizione; questo ci conduce al concetto di punto di flesso.

Definizione 7.11: di punto di flesso

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di derivabilità per f , oppure sia $f'(x_0) = \pm\infty$. Il punto x_0 si dice di **flesso** per f se esiste un intorno destro $(x_0, x_0 + h)$, $h > 0$, in cui f è convessa (concava) e un intorno sinistro $(x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, in cui f è concava (convessa).

- Attraversando un punto di flesso, la derivata seconda di f (se esiste) cambia segno. Ci aspettiamo allora che in questo punto f'' si annulli.

Teorema 7.12

Sia x_0 un punto di flesso per f ; se esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Notiamo che, se sapessimo che f'' esiste in un intorno di x_0 **ed è continua** in x_0 , allora la tesi del teorema seguirebbe dal teorema dei valori intermedi per le funzioni continue (applicato ad f''). Il teorema si può dimostrare anche senza queste ipotesi ulteriori (omessa). $\square$

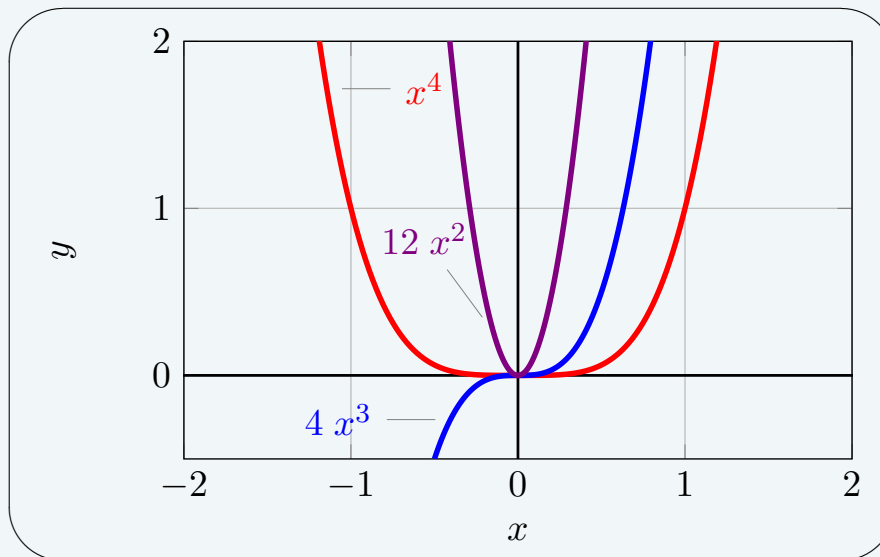
L'implicazione opposta a quella enunciata dal teorema non è vera, un punto in cui la derivata seconda si annulla può non essere di flesso.

Esempio 7.13: punti a derivata seconda nulla ma non di flesso

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^4, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2 \quad \text{è convessa su tutto } \mathbb{R}$$

Poiché $f'(x) > 0$ per $x > 0$, la funzione è crescente per $x > 0$, decrescente per $x < 0$ e ha un punto di minimo in $x = 0$. Abbiamo $f''(0) = 0$, ma la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$ quindi $x = 0$ **non è un punto di flesso**.



- Il significato geometrico dei punti di flesso è chiarito dal seguente teorema.

Teorema 7.13

Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ è un punto di flesso allora il grafico di $f(x)$ attraversa la propria retta tangente in $(x_0, f(x_0))$.

Dimostrazione. Tracciamo la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 . Se f è (ad esempio) concava in (a, x_0) , poiché f è derivabile, il grafico di f sta sotto la retta in (a, x_0) ; d'altra parte f è convessa in (x_0, b) , perciò il suo grafico sta sopra la retta in (x_0, b) . Di conseguenza in x_0 il grafico attraversa la retta tangente. $\square$

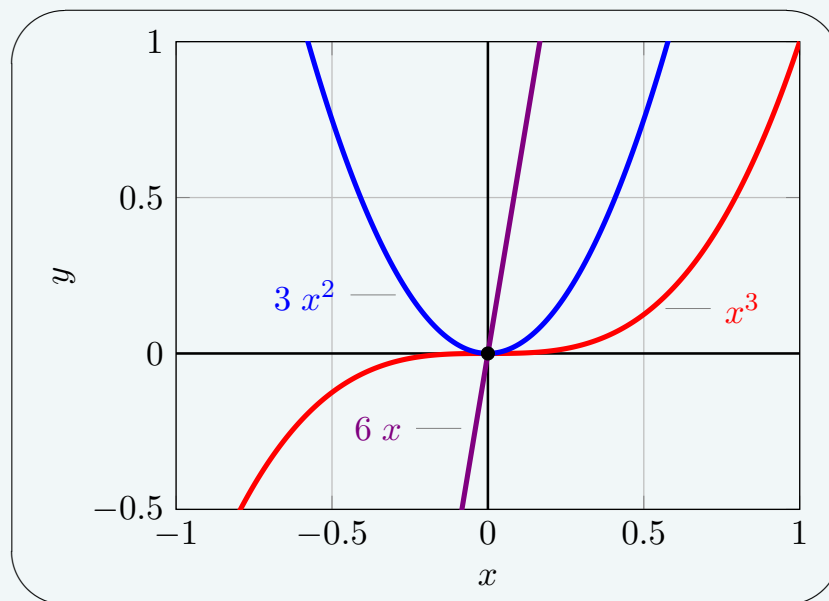
Esempio 7.14: punti di flesso (a tangente orizzontale)

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

Poiché $f'(x) > 0$ per $x \neq 0$, la funzione è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Ha un punto stazionario per $x = 0$, che non sarà però punto di massimo o minimo, perché la funzione è sempre crescente.

Abbiamo $f''(0) = 0$. Inoltre $f''(x) < 0$ per $x < 0$ quindi è concava per $x < 0$ e $f''(x) > 0$ per $x > 0$ quindi è convessa per $x > 0$. Di conseguenza il punto x_0 è **un punto di flesso a tangente orizzontale**, e il grafico della funzione attraversa la propria retta tangente in $(0, 0)$, ovvero la retta $y = 0$.



Esempio 7.15: punti di flesso

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f'(x) = -2x e^{-x^2}, \quad f''(x) = e^{-x^2} (4x^2 - 2)$$

Abbiamo $f'(x) > 0$ per $x < 0$, quindi la funzione cresce per $x \leq 0$; e $f'(x) < 0$ per $x > 0$, quindi decresce per $x \geq 0$ e inoltre $f'(0) = 0$. Perciò ha un punto di massimo relativo in $x = 0$.

Abbiamo:

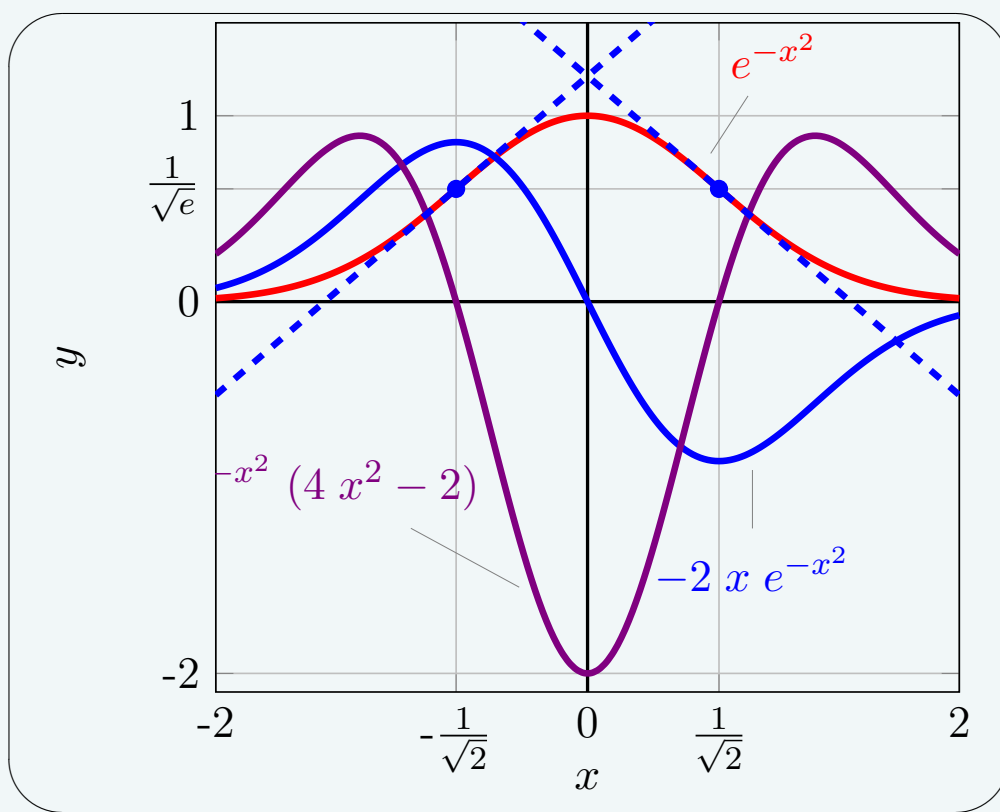
$$f''(x) = e^{-x^2} (4x^2 - 2) \geq 0 \quad \text{per } x^2 \geq \frac{1}{2} \quad \text{ovvero } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$$

La funzione è convessa per questi valori, concava per $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ha quindi punti di flesso in $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, con retta tangente di pendenza:

$$f' \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \mp \sqrt{\frac{2}{e}} \quad \text{in quanto } -2 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \mp \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Le rette tangenti sono:

$$y = \frac{1}{\sqrt{e}} + \sqrt{\frac{2}{e}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}} - \sqrt{\frac{2}{e}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

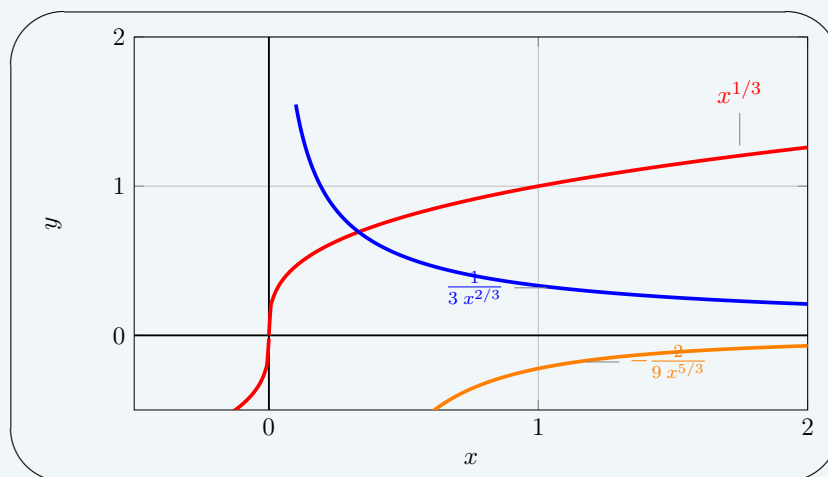


Esempio 7.16: punti di flesso (a tangente verticale)

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^{1/3}, \quad f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \quad \text{per } x > 0, \quad f''(x) = -\frac{2}{9x^{5/3}}, \quad \text{per } x > 0$$

Per $x_0 = 0$, abbiamo visto che $f'(0) = +\infty$. In questo caso però $f''(0)$ non esiste e la funzione ha flesso a tangente verticale.



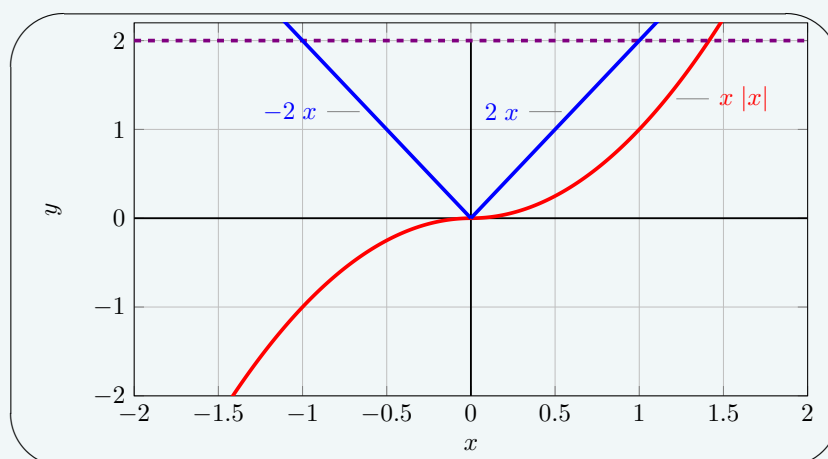
Esempio 7.17: punti di flesso (a tangente orizzontale)

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x|x|, \text{ con } x \neq 0, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

Quindi, per $x > 0$ la funzione è convessa e per $x < 0$ è concava e $f'(0) = 0$, quindi x_0 è un punto di flesso (ma $f''(0)$ non esiste).



Calcolo differenziale e approssimazioni

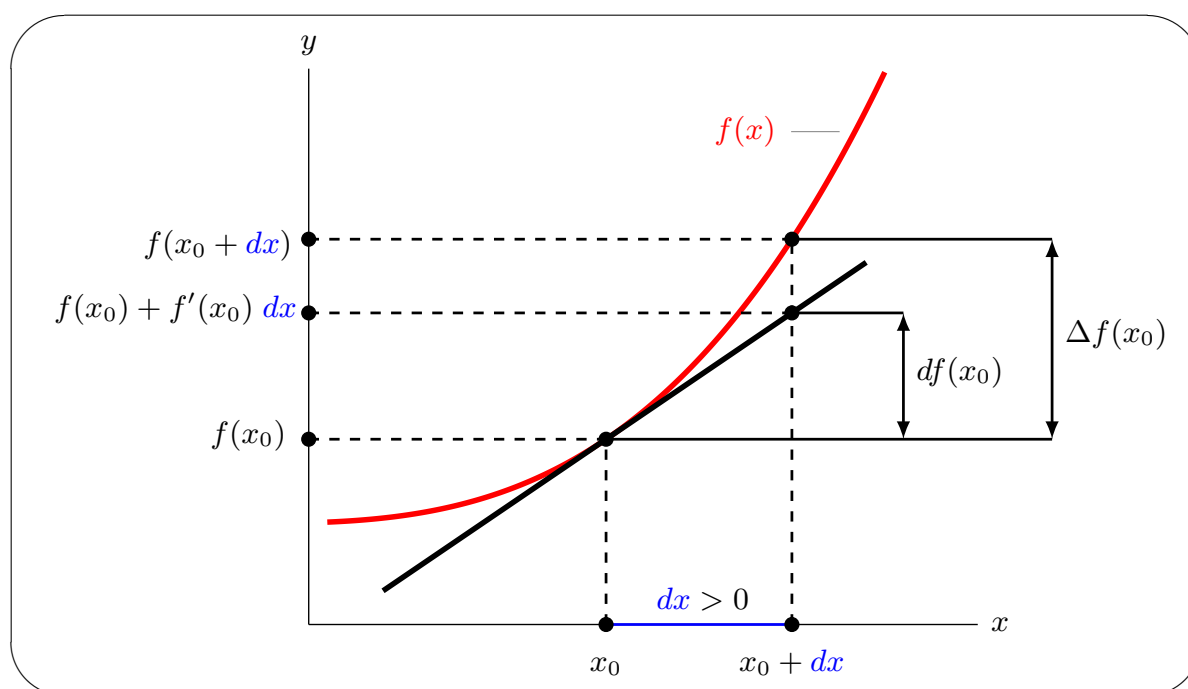
8.1 Sviluppi asintotici al primo ordine

- Un'operazione molto frequente sia in matematica che nelle sue applicazioni è quella di approssimazione lineare di una data funzione derivabile (operazione anche chiamata sviluppo asintotico al primo ordine).
- Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$. Consideriamo l'argomento $x_0 + dx$ dovuto all'incremento/decremento dx rispetto a x_0 . In conseguenza, i valori di f subiscono l'incremento/decremento:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

che, in generale, fissato x_0 , non è proporzionale a dx ossia non è lineare rispetto a dx . L'incremento/decremento valutato lungo la retta tangente è:

$$df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) dx - f(x_0) = f'(x_0) dx$$



- Data una funzione f derivabile in un punto x_0 interno al suo dominio, l'**approssimazione lineare** consiste nell'approssimare l'incremento/decremento $\Delta f(x_0)$ dei valori della funzione dovuto a un incremento/decremento dell'argomento da x_0 a $x_0 + dx$, sostituendo la funzione con la sua retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$.
- L'idea che sta alla base dell'approssimazione lineare consiste quindi nello stimare $\Delta f(x_0)$ con $df(x_0)$. Per avere buone approssimazioni si considerano incrementi molto "piccoli" in valore assoluto, ovvero $|dx| \ll 1$.

Definizione 8.1: differenziale di una funzione

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, si chiama **differenziale** di f nel punto x_0 l'incremento/decremento $df(x_0)$ dei valori della funzione da x_0 a $x_0 + dx$ valutato lungo la retta tangente:

$$df(x_0) = f'(x_0) dx$$

- Date due funzioni f e g , le regole di calcolo dei differenziali sono analoghe a quelle di derivazione:

$$d(f \pm g)(x_0) = df(x_0) \pm dg(x_0), \quad d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) df(x_0) + f(x_0) dg(x_0)$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0) df(x_0) - f(x_0) dg(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- In tutti i tipi di approssimazione occorre fornire informazioni (qualitative o quantitative) sull'**errore commesso**. Qual è l'errore commesso nell'approssimazione? Quanto vale $\Delta f(x_0) - df(x_0)$?

Per rispondere, osserviamo che dx equivale a $x - x_0$, quindi abbiamo:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + x - x_0) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) \quad \text{e} \quad df(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$$

Inoltre dalla definizione di derivata abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) &= 0 \end{aligned}$$

e dalla definizione di o piccolo abbiamo:

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{=\Delta f(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{=df(x_0)} = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (8.1)$$

Quindi l'errore $\Delta f(x_0) - df(x_0)$ tende a zero più rapidamente di $(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$.

Definizione 8.2: sviluppo asintotico del primo ordine

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, si chiama **sviluppo asintotico del primo ordine** o **lineare** di f nel punto x_0 la seguente espressione:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (8.2)$$

L'espressione (8.2) segue direttamente dalla (8.1) e nel caso $x_0 = 0$, abbiamo:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (8.3)$$

Esempio 8.1: sviluppi asintotici al primo ordine o lineari e errori di approssimazione

Calcoliamo lo sviluppo asintotico al primo ordine o lineare per $x \rightarrow 0$ di:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Abbiamo $x_0 = 0$ e inoltre:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(0) = 1$$

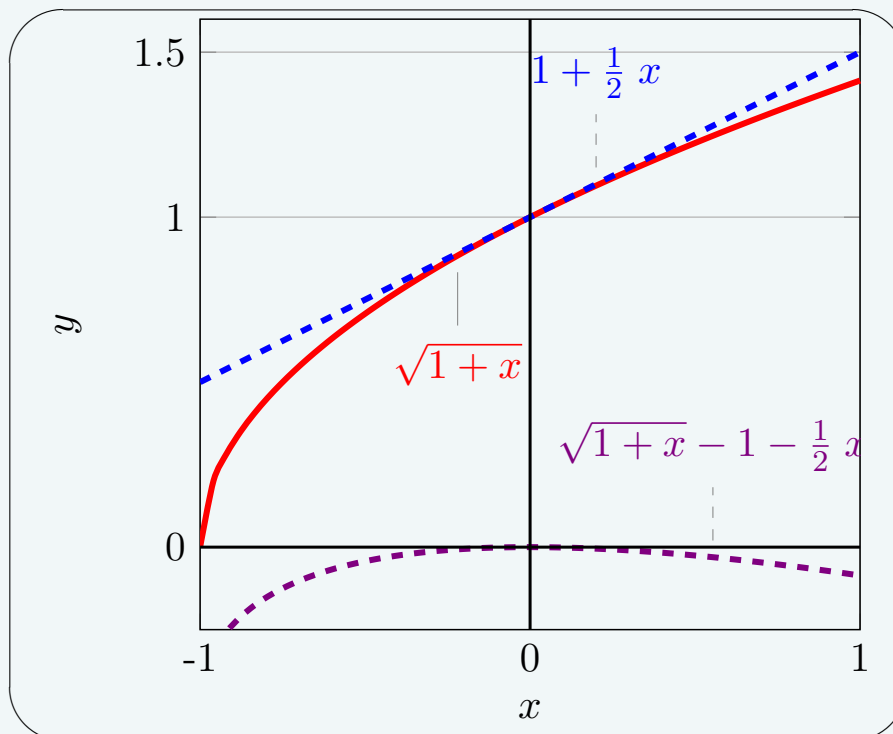
Quindi abbiamo il seguente sviluppo asintotico al primo ordine o lineare:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Inoltre l'errore commesso dall'approssimazione è:

$$\underbrace{\sqrt{1+x} - 1}_{=\Delta f(0)=f(x)-f(0)} - \underbrace{\frac{1}{2}x}_{=df(0)=f'(0)x} = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Graficamente abbiamo:



Esempio 8.2: di sviluppi asintotici al primo ordine o lineari

Calcoliamo lo sviluppo asintotico al primo ordine o lineare per $x \rightarrow 1$ di:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Abbiamo $x_0 = 1$ e inoltre:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad f(1) = \sqrt{2}$$

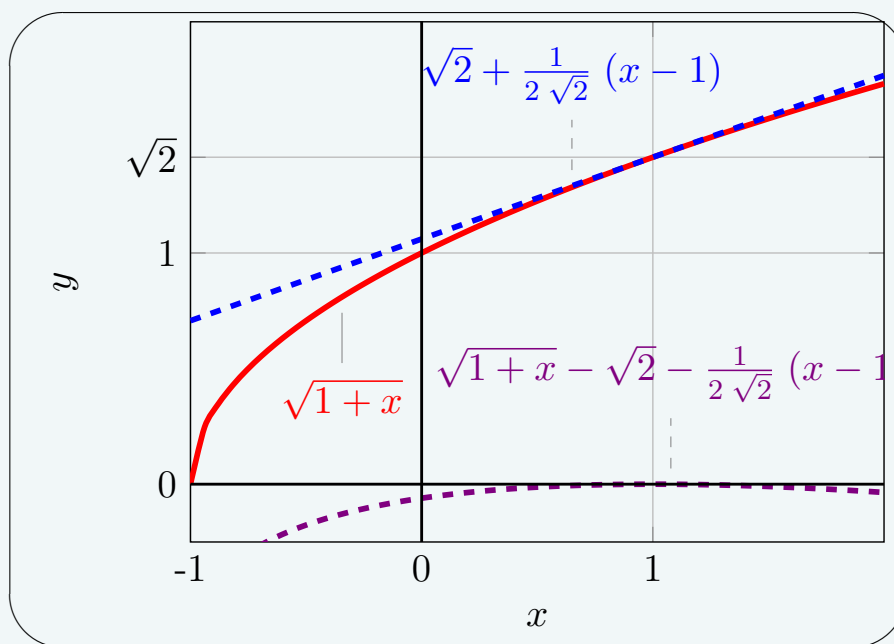
Quindi abbiamo il seguente sviluppo asintotico al primo ordine o lineare:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) + o(x-1) \quad \text{per } x \rightarrow 1$$

Inoltre l'errore commesso dall'approssimazione è:

$$\underbrace{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}}_{=\Delta f(1)=f(x)-f(1)} - \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)}_{=df(1)=f'(1)(x-1)} = o(x-1) \quad \text{per } x \rightarrow 1$$

Graficamente abbiamo:



8.2 Derivate di polinomi

- Un polinomio di grado n si può scrivere come:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ e } a_n \neq 0.$$

Il valore a_i è il **coefficiente** del monomio di grado i , con $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, mentre x^i è la **parte letterale** del monomio, una potenza intera positiva di x . Il valore a_0 è il **termine noto** (o la parte costante) del polinomio.

Le funzioni derivata prima e seconda di un polinomio di grado $n \geq 2$ sono:

$$P'_n(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \quad P''_n(x) = \sum_{i=2}^n (i-1) \cdot i \cdot a_i x^{i-2}$$

$$P'_n(0) = a_1 \quad P''_n(0) = 2 a_2$$

Esempio 8.3: derivata prima e derivata seconda di un polinomio

Consideriamo il seguente polinomio di grado 5:

$$P_5(x) = 10 + 7x + 3x^2 - 6x^3 + 4x^4 - 2x^5$$

la funzione derivata prima è:

$$P'_5(x) = 1 \cdot 7 x^{1-1} + 2 \cdot 3 x^{2-1} + 3 \cdot (-6) x^{3-1} + 4 \cdot 4 x^{4-1} + 5 \cdot (-2) x^{5-1}$$

$$= 7 + 6x - 18x^2 + 16x^3 - 10x^4$$

$$P'_5(0) = 7$$

la funzione derivata seconda è:

$$P''_5(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 x^{2-2} + 2 \cdot 3 \cdot (-6) x^{3-2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 x^{4-2} + 4 \cdot 5 \cdot (-2) x^{5-2} = 6 - 36x + 48x^2 - 40x^3$$

$$P''_5(0) = 2 \cdot 3 = 6$$

La funzione derivata k -esima di un polinomio di grado n con $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ è:

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n \underbrace{(i-k+1) \cdots (i-2) \cdot (i-1) \cdot i}_{=\prod_{j=1}^k (i-j+1)} a_i x^{i-k}$$

$$P_n^{(k)}(0) = k! a_k$$

Esempio 8.4: derivata terza quarta e quinta di un polinomio

Consideriamo il seguente polinomio di grado 5:

$$P_5(x) = 10 + 7x + 3x^2 - 6x^3 + 4x^4 - 2x^5$$

la funzione derivata terza è:

$$P_5^{(3)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-6) x^{3-3} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 x^{4-3} + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-2) x^{5-3} = -36 + 96x - 120x^2$$

$$P_5^{(3)}(0) = 3! \cdot (-6) = 6 \cdot (-6) = -36$$

la funzione derivata quarta è:

$$P_5^{(4)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 x^{4-4} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-2) x^{5-4} = 96 - 240x$$

$$P_5^{(4)}(0) = 4! \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96$$

la funzione derivata quinta è:

$$P_5^{(5)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-2) x^{5-5} = -240$$

$$P_5^{(5)}(0) = 5! \cdot (-2) = 120 \cdot (-2) = -240$$

- Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, in maniera equivalente, un polinomio di grado n si può scrivere come:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (x - x_0)^i \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ e } a_n \neq 0.$$

La funzione derivata k -esima $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ è in questo caso:

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n (i - k + 1) \cdots (i - 2) \cdot (i - 1) \cdot i \cdot a_i \cdot (x - x_0)^{i-k}$$

$$P_n^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$$

8.3 Formula/sviluppo di Taylor con resto secondo Peano

- L'approssimazione lineare (o per linearizzazione) approssima una funzione con la sua retta tangente in un punto $(x_0, f(x_0))$ ovvero un polinomio di primo grado che ha la derivata uguale a quella della funzione nel punto x_0 e come termine costante il valore della funzione in x_0 .

Per semplicità cominciamo a ragionare con $x_0 = 0$.

- Con i polinomi di primo grado abbiamo:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x, \quad P_1'(x) = a_1, \quad \text{fissando } a_0 = f(0) \text{ e } a_1 = f'(0)$$

dalla (8.2) si ottiene lo sviluppo asintotico al primo ordine:

$$f(x) = \underbrace{a_0}_{=f(0)} + \underbrace{a_1}_{=f'(0)} x + o(x)$$

e l'errore commesso utilizzando il polinomio di primo grado al posto della funzione:

$$\underbrace{f(x) - a_0}_{\Delta f(0)} - \underbrace{a_1 x}_{df(0)} = o(x)$$

tende a zero più velocemente di una qualsiasi funzione lineare.

- Vogliamo ora generalizzare il procedimento di “**approssimazione lineare**” a quello di “**approssimazione polinomiale**”.

Ci chiediamo: data una funzione, derivabile tutte le volte che sarà necessario, esiste un polinomio di grado $n \geq 2$ che, nell'intorno di un punto fissato, approssima la funzione “meglio” della sua retta tangente? **Procediamo in due steps.**

Primo step

- Individuiamo un polinomio candidato ad approssimare “bene” la funzione, cercando un polinomio che abbia tutte le derivate fino all'ordine n uguali a quelle della funzione f , nel punto $x_0 = 0$. Il polinomio deve essere di grado n per avere la derivata n -esima uguale a $f^{(n)}(0)$.

Teorema 8.3: del polinomio di MacLaurin

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n - 1$ volte in (a, b) e n volte in $0 \in (a, b)$, esiste uno e un solo polinomio $T_{n,f}$ di grado $\leq n$ con la proprietà che:

$$T_{n,f}(0) = f(0), \quad T'_{n,f}(0) = f'(0), \quad \dots, \quad T^{(n)}_{n,f}(0) = f^{(n)}(0)$$

e questo polinomio, detto **polinomio di MacLaurin** di f di grado n , è:

$$T_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (\text{posto } f^{(0)} = f)$$

Dimostrazione. Dimostriamo che il polinomio di MacLaurin di una funzione f che rispetti le ipotesi del teorema ha le stesse derivate in 0 della funzione fino all'ordine n . La derivata k -esima in $x_0 = 0$ del polinomio di MacLaurin di grado n , con $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, è:

$$T^{(k)}_{n,f}(0) = k! \cdot \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = f^{(k)}(0) \quad \text{e con } k = 0 \text{ abbiamo } T_{n,f}(0) = f(0)$$

Quindi tutte le derivate in 0 fino all'ordine n sono uguali a quelle della funzione f (e ha lo stesso valore della funzione in 0).

Dimostriamo ora che tale polinomio è unico. Consideriamo ora un polinomio generico di grado n :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i = 0, 1, \dots, n, \text{ e } a_n \neq 0.$$

La sua derivata k -esima in $x_0 = 0$, con $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, è

$$P^{(k)}_n(0) = k! \cdot a_k$$

Dunque se il polinomio ha la stessa derivata k -esima della funzione si ha:

$$k! \cdot a_k = f^{(k)}(0) \quad \text{che implica} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

ovvero i coefficienti del polinomio di MacLaurin. □

La scrittura estesa del polinomio di MacLaurin di grado n di una funzione f è:

$$T_{n,f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

- Quando è chiara la funzione a cui si fa riferimento, per comodità omettiamo il pedice f del polinomio di MacLaurin e scriviamo semplicemente $T_n(x)$.

Esempio 8.5: Calcolo del polinomio di MacLaurin

Calcoliamo il polinomio di MacLaurin di grado 3 della funzione

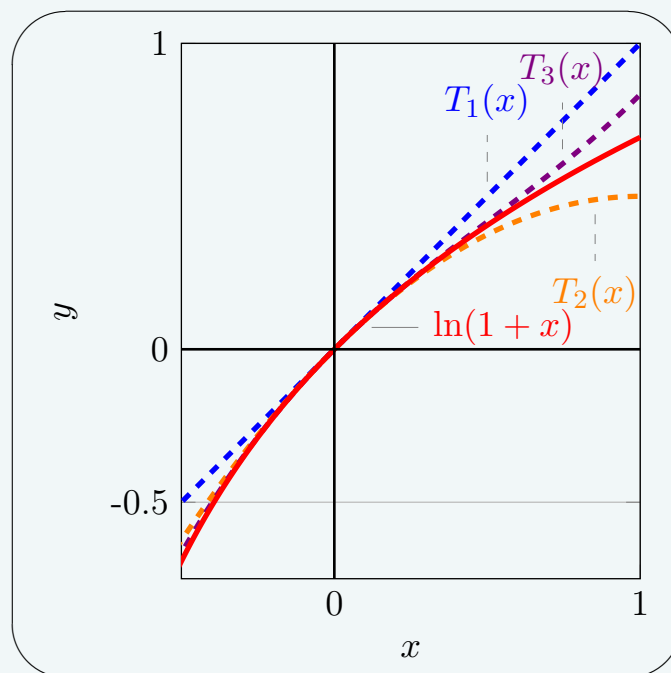
$$f(x) = \log(1+x)$$

Abbiamo $f(0) = 0$ e per le derivate abbiamo:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x}, & f^{(1)}(0) &= 1, \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & f^{(2)}(0) &= -1, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f^{(3)}(0) &= 2 \end{aligned}$$

Quindi il polinomio di MacLaurin di grado 3 della funzione è:

$$T_3(x) = 0 + 1x + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \frac{1}{6}2x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$



La derivata quarta è:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -6$$

Generalizzando alla derivata n -esima, ne segue che il polinomio di MacLaurin di grado n della funzione è:

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Esempio 8.6: Calcolo del polinomio di MacLaurin

Calcoliamo il polinomio di MacLaurin di grado 3 della funzione

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

Abbiamo $f(0) = 1$ e per le derivate abbiamo:

$$f^{(1)}(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}, \quad f^{(1)}(0) = \alpha, \quad f^{(2)}(x) = (\alpha-1)\alpha (1+x)^{\alpha-2}, \quad f^{(2)}(0) = (\alpha-1)\alpha$$

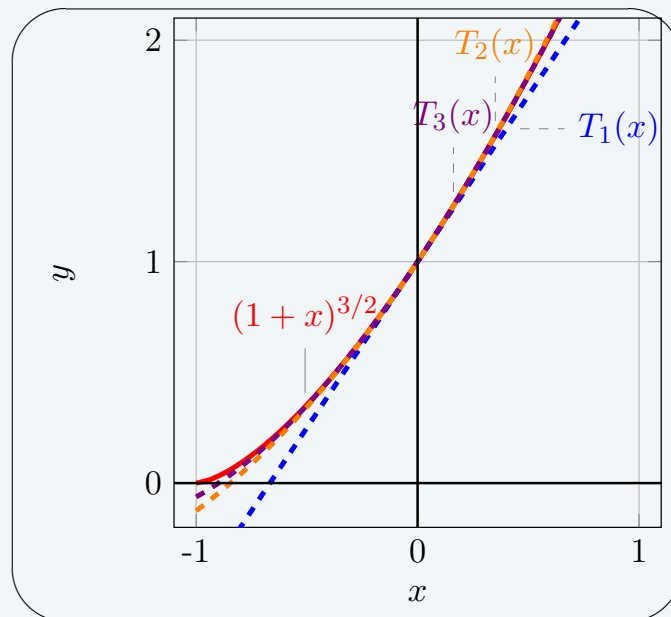
$$f^{(3)}(x) = (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha (1+x)^{\alpha-3}, \quad f^{(3)}(0) = (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha$$

Quindi il polinomio di MacLaurin di grado 3 della funzione è:

$$T_3(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3$$

Ad esempio con $\alpha = \frac{3}{2}$ abbiamo:

$$T_3(x) = 1 + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3$$



La derivata quarta è:

$$f^{(4)}(x) = (\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha (1+x)^{\alpha-4}, \quad f^{(4)}(0) = (\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha$$

Generalizzando alla derivata n -esima, ne segue che il polinomio di MacLaurin di grado n della funzione è:

$$T_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Secondo step

- Proviamo ora che il polinomio di MacLaurin approssima “bene” $f(x)$, in un intorno di $x_0 = 0$. Precisamente, vale il seguente teorema:

Teorema 8.4: della formula di MacLaurin all'ordine n con resto secondo Peano

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile $n - 1$ volte in (a, b) e n volte in $0 \in (a, b)$. Allora

$$f(x) = T_{n,f}(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

- La formula ha la struttura: **funzione da approssimare uguale al polinomio approssimante più l'errore di approssimazione**. L'errore è il termine $o(x^n)$ e viene detto resto secondo Peano. Per $x \rightarrow 0$, l'errore è tanto più piccolo quanto maggiore è n .

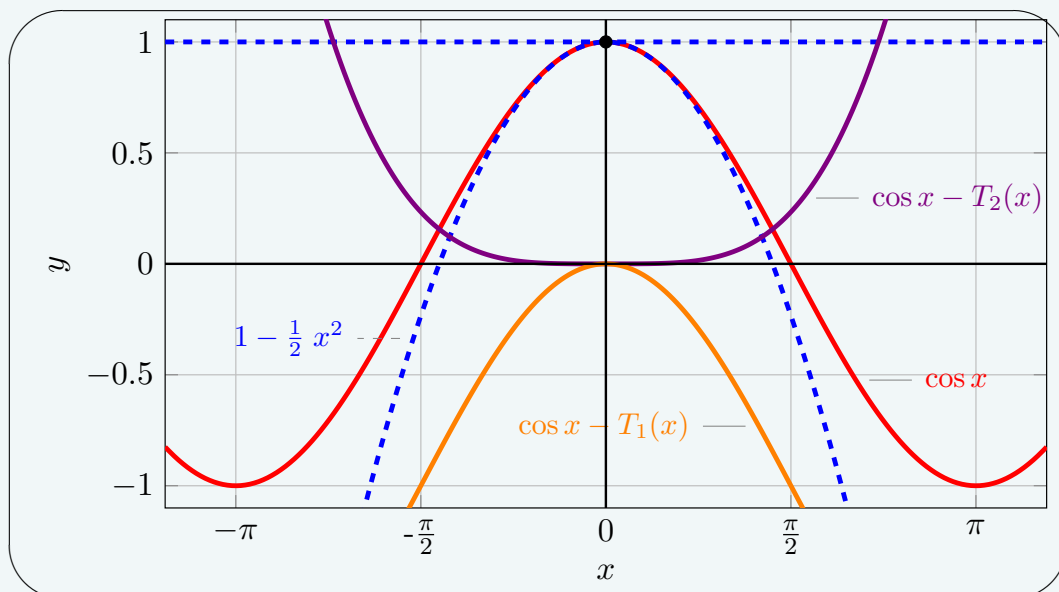
Esempio 8.7: degli errori delle approssimazioni polinomiali

Consideriamo $f(x) = \cos x$, abbiamo:

$$f(0) = 1, \quad f^{(1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(1)}(0) = 0, \quad f^{(2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(2)}(0) = -1$$

I polinomi di MacLaurin di primo e secondo grado e gli errori di approssimazione sono:

$$T_1(x) = 1, \quad T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad \cos x - 1 = o(x) \quad \text{e} \quad \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$$



Il polinomio di secondo grado $T_2(x)$ approssima la funzione $\cos x$ vicino a $x_0 = 0$ “meglio” del polinomio di primo grado $T_1(x)$. Lo scarto tra la funzione e $T_2(x)$ tende a zero più rapidamente di x^2 ; mentre lo scarto con $T_1(x)$ solo più rapidamente di x .

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso $n = 2$, ossia:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Occorre quindi provare che:

$$f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 \right) = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ossia (per definizione di o piccolo) che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 \right)}{x^2} = 0$$

Questo limite dà una forma di indeterminazione $[0/0]$, applichiamo ora il teorema di De L'Hospital e otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - (f'(0) + f''(0)x)}{2x}$$

che è ancora in forma indeterminata $[0/0]$. Applichiamo ancora il teorema di De L'Hospital e otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - (f'(0) + f''(0)x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{2} = 0$$

il limite fa 0 aggiungendo l'ipotesi che $f''(x)$ sia continua in $x = 0$.

Vediamo come procedere anche senza chiedere la continuità in 0 di f'' e proviamo direttamente che:

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - (f'(0) + f''(0)x)}{x} = 0$$

Per ipotesi, f è derivabile due volte in 0, quindi f' è derivabile; se applichiamo l'approssimazione lineare (equazione (8.3)) alla funzione $f'(x)$ otteniamo:

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

quindi segue che (definizione di o piccolo):

$$\frac{f'(x) - (f'(0) + f''(0)x)}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

□

Dimostrazione. Il caso generale (n qualsiasi) si può dimostrare per induzione su n . Abbiamo già provato che la tesi vale per $n = 2$.

Supponiamo ora di sapere che per qualsiasi funzione derivabile $n - 1$ volte in $x = 0$ vale la formula di MacLaurin, e proponiamoci di dimostrare che

$$f(x) = T_{n,f}(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_{n,f}(x)}{x^n} = 0 \quad (8.4)$$

Applicando il teorema di De L'Hospital, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - T'_{n,f}(x)}{n x^{n-1}} \quad (8.5)$$

Osserviamo ora che la derivata del polinomio $T_{n,f}(x)$ di f non è altro che il polinomio $T_{n-1,f'}(x)$ della funzione f' :

$$T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x)$$

come si verifica direttamente dalla definizione di $T_{n,f}$. D'altro canto, per l'ipotesi induttiva, applicata alla funzione f' , sappiamo che

$$f'(x) = T_{n-1,f'}(x) + o(x^{n-1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - T_{n-1,f'}(x)}{x^{n-1}} = 0$$

quindi il limite (8.5) è zero e, per il teorema di De L'Hospital, anche il limite (8.4) è zero, come volevamo dimostrare. $\square$

Esempio 8.8: di calcolo dei polinomi di MacLaurin

Per comprendere meglio l'uguaglianza:

$$T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x)$$

consideriamo una funzione f , il suo polinomio di MacLaurin ad esempio di grado 3 è:

$$T_{3,f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3$$

e la derivata del polinomio $T_{3,f}(x)$ è:

$$T'_{3,f}(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{1}{2} f'''(0)x^2$$

Consideriamo ora la sua funzione derivata $f'(x)$ e calcoliamo il suo polinomio di MacLaurin di grado 2:

$$T_{2,f'}(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{1}{2} f'''(0)x^2$$

ovvero otteniamo il medesimo polinomio, il ragionamento si estende facilmente al grado n .

- La derivata $T'_{n,f}(x)$ del polinomio di MacLaurin $T_{n,f}(x)$ di f è il polinomio di MacLaurin $T_{n-1,f'}(x)$ di grado $n-1$ della funzione derivata f' , ovvero:

$$T'_{n,f}(x) = \sum_{k=1}^n k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k)!} x^k = T_{n-1,f'}(x)$$

Esempio 8.9: formula o sviluppo di MacLaurin del seno

Consideriamo

$$f(x) = \sin x$$

$f(0) = 0$ e inoltre abbiamo:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos x, & f^{(2)}(x) &= -\sin x, & f^{(3)}(x) &= -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x), & f^{(5)}(x) &= \cos x = f^{(1)}(x) \dots \end{aligned}$$

Ne segue che le derivate di ordine $2k$ (pari) sono nulle per $x = 0$, mentre quelle di ordine $2k + 1$ (dispari) sono alternativamente $+1$ e -1 per $x = 0$. I polinomi di MacLaurin della funzione seno contengono perciò solo termini di grado dispari:

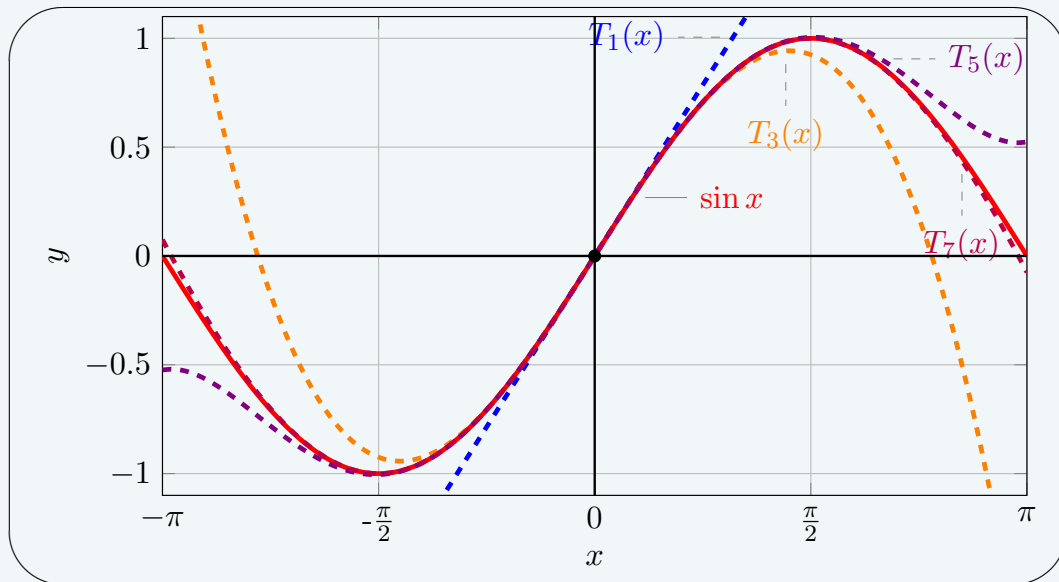
$$\sin x = T_1(x) + o(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = T_3(x) + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = T_5(x) + o(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = T_7(x) + o(x^7) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Graficamente i polinomi di MacLaurin per la funzione $f(x) = \sin x$ sono:

**Esempio 8.10: formula o sviluppo di MacLaurin del coseno**

Consideriamo

$$f(x) = \cos x$$

$f(0) = 1$ e inoltre abbiamo:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\sin x, & f^{(2)}(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \sin x, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x = f(x), & f^{(5)}(x) &= -\sin x = f^{(1)}(x) \dots \end{aligned}$$

Ne segue che le derivate di ordine $2k + 1$ (dispari) sono nulle per $x = 0$, mentre quelle di ordine $2k$ (pari) sono alternativamente -1 e $+1$ per $x = 0$. I polinomi di MacLaurin della funzione coseno contengono perciò solo termini di grado pari:

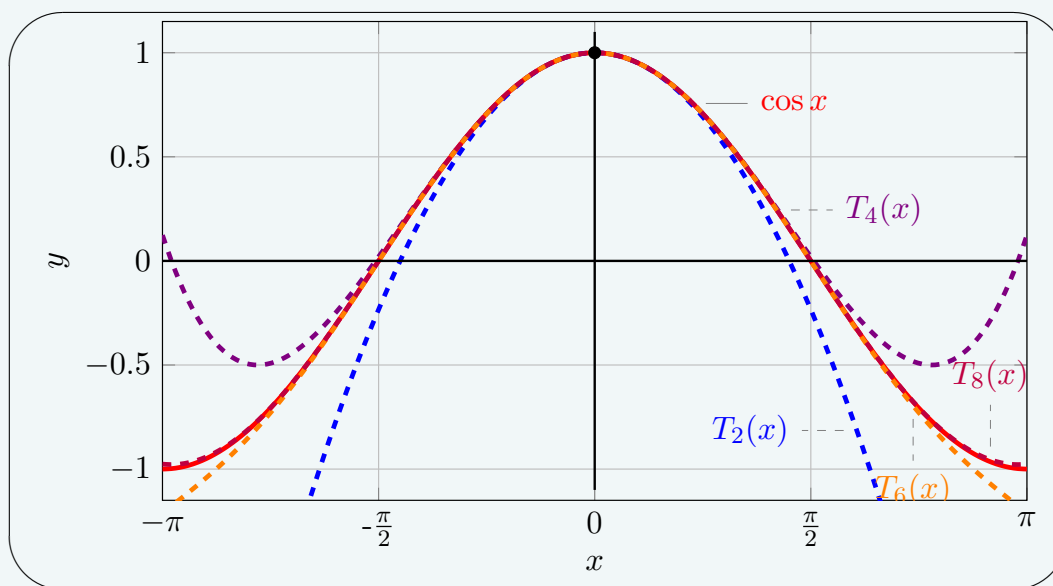
$$\cos x = T_2(x) + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = T_4(x) + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = T_6(x) + o(x^6) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = T_8(x) + o(x^8) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^8) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Graficamente i polinomi di MacLaurin per la funzione $f(x) = \cos x$ sono:



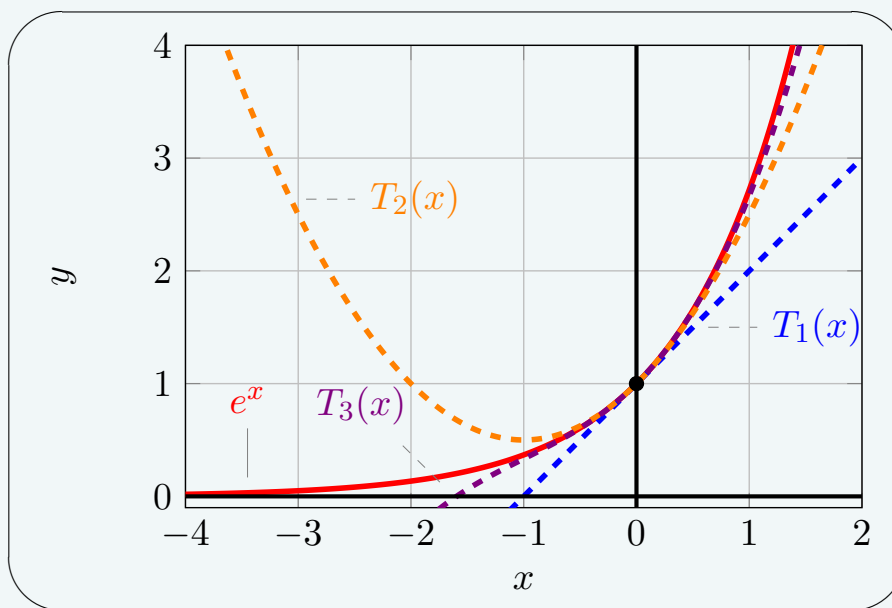
Esempio 8.11: formula o sviluppo di MacLaurin

Consideriamo:

$$f(x) = e^x \quad \text{abbiamo} \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{e} \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Quindi:

$$e^x = T_n(x) + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



Esempio 8.12: Calcolo dei limiti con lo sviluppo di MacLaurin

Vogliamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Sviluppando la funzione al primo ordine $\cos x = 1 + o(x)$, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + o(x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^2}$$

Il simbolo $o(x)$ per $x \rightarrow 0$ indica l'insieme delle funzioni che divise per x tendono a 0 per $x \rightarrow 0$. Quindi ad esempio $5x^2 = o(x)$ ma anche $x^3 = o(x)$ e il valore del limite non può ancora essere determinato. Sviluppando la funzione al secondo ordine $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\rightarrow 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il simbolo $o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ indica l'insieme di funzioni che divise per x^2 tendono a 0 per $x \rightarrow 0$, quindi il secondo termine tende a 0 per $x \rightarrow 0$. In maniera equivalente $\frac{o(x^2)}{x^2} = o(1)$ ovvero una generica funzione che tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

Esempio 8.13: Calcolo dei limiti con lo sviluppo di MacLaurin

Vogliamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Sviluppando le funzioni al primo ordine abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x) - (1 - x + o(x)) - 2x}{x - (x + o(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{o(x)}$$

Il simbolo $o(x)$ per $x \rightarrow 0$ indica l'insieme delle funzioni che divise per x tendono a 0 per $x \rightarrow 0$. Quindi ad esempio $5x^2 = o(x)$ ma anche $x^3 = o(x)$ e il valore del limite non può ancora essere determinato. Sviluppando le funzioni al secondo ordine abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 2x}{x - (x + o(x^2))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{o(x^2)}$$

Il limite è ancora non risolubile, sviluppando le funzioni al terzo ordine abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - 2x}{x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} = 2 \end{aligned}$$

Esempio 8.14: Calcolo del polinomio di MacLaurin

Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 4 della funzione

$$f(x) = \log(1 + \sin x)$$

I polinomi di MacLaurin di grado 4 delle funzioni $\sin x$ e $\log(1 + x)$ sono:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}, \quad \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Quindi, sostituendo, il polinomio di MacLaurin della funzione $f(x)$ è:

$$T_4(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3}{3} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} \right)^4}{4}$$

Abbiamo $\left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{6} + \frac{x^6}{36}$ e l'ultimo termine ha grado superiore a 4. Visto che cerchiamo solo i termini fino al grado 4 scartiamo l'ultimo addendo. Facendo lo stesso ragionamento con gli altri numeratori abbiamo:

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 - \frac{2x^4}{6}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$$

Formule o sviluppi di MacLaurin di alcune funzioni elementari, con il resto di Peano per $x \rightarrow 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Gli sviluppi chiaramente valgono anche sostituendo a x una qualsiasi funzione $\varepsilon(x)$ che tende a 0, ovvero un infinitesimo (non importa per cosa tenda x in questo caso).

- Tutto questo discorso si può generalizzare ad un punto $x_0 \neq 0$. Le dimostrazioni sono analoghe a quelle precedenti e sono lasciate per esercizio.

Teorema 8.5: del polinomio di Taylor

Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte in (a, b) e n volte in $x_0 \in (a, b)$, esiste uno e un solo polinomio T_{n,f,x_0} di grado $\leq n$ con la proprietà che:

$$T_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0), \quad T'_{n,f,x_0}(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad T^{(n)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

e questo polinomio, detto **polinomio di Taylor** di f di grado n , è:

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (\text{posto } f^{(0)} = f)$$

La scrittura estesa del polinomio di Taylor di grado n di una funzione f in x_0 è:

$$\begin{aligned} T_{n,f,x_0}(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{aligned}$$

- Quando è chiara la funzione a cui si fa riferimento, per comodità omettiamo il pedice f del polinomio di Taylor e scriviamo semplicemente $T_{n,x_0}(x)$.

Teorema 8.6: della formula di Taylor all'ordine n con resto secondo Peano

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile $n - 1$ volte in (a, b) e n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora

$$f(x) = T_{n,f,x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

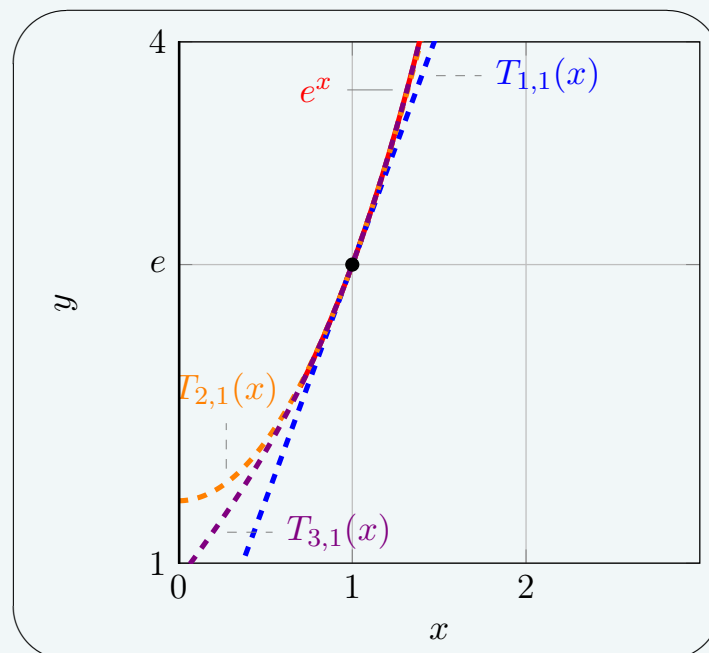
Esempio 8.15: formula o sviluppo di Taylor

Consideriamo $x_0 = 1$ e :

$$f(x) = e^x \quad \text{abbiamo} \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{e} \quad f^{(n)}(1) = e, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} e^x &= T_{n,1}(x) + o((x - 1)^n) \\ &= e + e(x - 1) + e \frac{(x - 1)^2}{2} + e \frac{(x - 1)^3}{3!} \\ &\quad + \dots + e \frac{(x - 1)^n}{n!} + o((x - 1)^n) \quad \text{per } x \rightarrow 1 \end{aligned}$$



8.4 Formula/sviluppo di Taylor con resto secondo Lagrange

- Nella formula di Taylor-MacLaurin con resto secondo Peano l'informazione che abbiamo sull'errore commesso nell'approssimare f col suo polinomio di Taylor- MacLaurin è di **tipo dinamico**: al tendere a zero dell'incremento $(x - x_0)$, sappiamo che il resto tende a zero più rapidamente di $(x - x_0)^n$.

Per un valore fissato dell'incremento $(x - x_0)$ la formula di Taylor-MacLaurin con resto secondo Peano non dice nulla sull'entità dell'errore commesso.

- In varie questioni di calcolo approssimato è essenziale invece stimare l'errore che si commette approssimando una funzione col suo polinomio di Taylor, quando l'incremento $(x - x_0)$ ha un valore fissato, o un valore che non supera una soglia fissata.
- A questo tipo di problema risponde il prossimo risultato, che dà un modo alternativo di quantificare l'errore di approssimazione commesso.

Teorema 8.7: della formula di Taylor all'ordine n con resto secondo Lagrange

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile $n + 1$ volte in $[a, b]$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Allora esiste un punto c compreso tra x_0 e x tale che:

$$f(x) = T_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (8.6)$$

- La formula ha la struttura: **funzione da approssimare uguale al polinomio approssimante più l'errore di approssimazione**. L'errore è il termine $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ e viene detto resto secondo Lagrange.
- Per $n = 0$, il teorema coincide col teorema di Lagrange, ponendo $x_0 = a$ e $b = x$ abbiamo:

$$\exists c \in [a, b] : f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) \quad \text{ovvero} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

che è il teorema di Lagrange. Attenzione: l'intervallo da (a, b) diventa $[a, b]$.

Il punto c dipende da x_0 , x e n , ed è compreso tra x_0 e x . Se si riesce a dimostrare che

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M, \quad \forall t \in [x_0, x] \quad (8.7)$$

allora la formula di Taylor con resto secondo Lagrange dice che

$$|f(x) - T_{n,x_0}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad (8.8)$$

Esempio 8.16: stima degli errori col resto secondo Lagrange

Consideriamo $f(x) = e^x$, sappiamo che i polinomi di MacLaurin al secondo e terzo ordine di e^x sono:

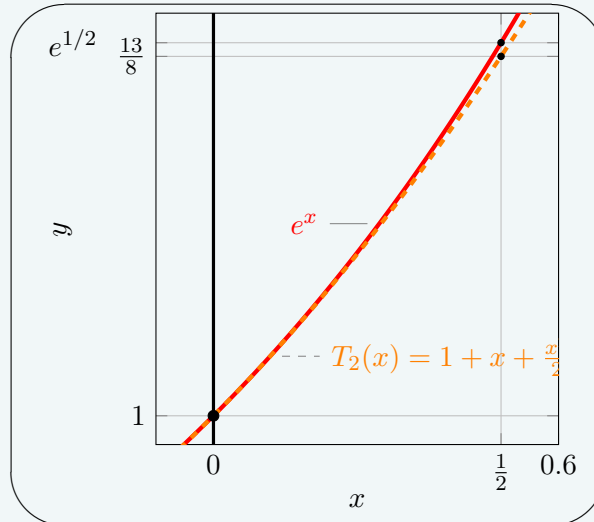
$$T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

Ora se volessimo utilizzare il polinomio per calcolare un valore approssimato di $e^{1/2}$ ossia

pensassimo di approssimare

$$e^{1/2} \quad \text{con} \quad T_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8} \quad \text{oppure con} \quad T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{79}{48}$$

come possiamo stimare a priori (ossia senza conoscere già il valore vero di $e^{1/2}$) di quanto stiamo sbagliando?



Abbiamo $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$. Nella formula (8.6) sviluppando fino al terzo grado ($n = 3$) otteniamo:

$$e^{1/2} = \underbrace{T_3\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{79}{48}} + \frac{e^c}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \text{con} \quad c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Il valore c è ignoto quindi anche il valore e^c è ignoto, occorre dunque utilizzare la (8.7) per sovrastimare e^c con la (8.7). Abbiamo:

$$f^{(4)}(t) = e^t \quad \text{di conseguenza} \quad |e^t| \leq \underbrace{3^{1/2}}_{=M}, \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \text{dato che} \quad e < 3$$

Quindi dalla (8.8) otteniamo:

$$\left| e^{1/2} - T_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{3^{1/2}}{2^4 \cdot 4!}$$

Questo significa che approssimando $e^{1/2}$ con il valore $\frac{79}{48}$ si commette un errore non superiore a $\sqrt{3}/384$ che vale circa 0.0045.

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso $n = 1$. Ponendo per comodità $x_0 = a$, $x = b$ l'enunciato diviene: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte in $[a, b]$, allora esiste un punto

$c \in [a, b]$ tale che:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2$$

Poniamo

$$f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a)) = k(b-a)^2$$

e cerchiamo di determinare la forma di k .

Consideriamo quindi la funzione:

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k(b-x)^2$$

e applichiamo ad essa il teorema del valor medio o di Lagrange. Poiché $g(b) = g(a) = 0$ (la seconda uguaglianza segue dalla definizione di k) si trova che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$0 = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

Ma abbiamo:

$$g'(x) = -f'(x) - f''(x)(b-x) + f'(x) + 2k(b-x) = (b-x) \cdot (2k - f''(x))$$

e quindi $g'(c) = 0$ implica, essendo $c \neq b$:

$$k = \frac{1}{2} f''(c)$$

Il procedimento appena visto si può estendere per un n qualsiasi.

Definiamo ora:

$$g(x) = f(b) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)(b-x)^j}{j!} - k(b-x)^{n+1}$$

con k definito implicitamente dall'identità

$$f(b) - T_{n,a}(b) = k(b-a)^{n+1} \quad (8.9)$$

□

Dimostrazione. Ora si procede così:

1. Si verifica che $g(a) = g(b) = 0$ dato che

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0, \quad g(a) = f(b) - T_{n,a}(b) - k(b-a)^{n+1} = 0 \text{ per def. di } k$$

2. Si applica il teorema di Lagrange a g in $[a, b]$, e si mostra che l'affermazione "esiste $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$ " è esattamente il teorema.

Cominciamo a calcolare g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j+1)}(x) (b-x)^j}{j!} + \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(x) (b-x)^{j-1}}{(j-1)!} + k(n+1)(b-x)^n \\ &= - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j+1)}(x) (b-x)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x) (b-x)^j}{j!} + k(n+1)(b-x)^n \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(x) (b-x)^n}{n!} + k(n+1)(b-x)^n \end{aligned}$$

Allora $g'(c) = 0$ significa:

$$- \frac{f^{(n+1)}(c) (b-c)^n}{n!} + k(n+1)(b-c)^n = 0$$

ovvero

$$k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

che, inserita nella (8.9), dà la tesi. □

8.4.1 Relazioni con la convessità

- Consideriamo la formula (8.6), con $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2$$

e supponiamo che in ogni punto di (a, b) si abbia $f''(x) \geq 0$ ovvero f sia convessa in (a, b) . Allora si ha

$$\frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2 \geq 0$$

e perciò si può scrivere, per ogni coppia di punti x_0 e $x \in (a, b)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (8.10)$$

Geometricamente significa che il grafico di $f(x)$ si mantiene in tutto (a, b) sopra il grafico della sua retta tangente in x_0 (e questo vale per ogni scelta del punto $x_0 \in (a, b)$).

Abbiamo dunque dimostrato che se una funzione (due volte derivabile) è convessa, è anche “convessa per tangenti”

- Se invece f è concava, ossia $f''(x) \leq 0$ in tutto (a, b) , e abbiamo

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (8.11)$$

e il grafico di $f(x)$ si mantiene in tutto (a, b) sotto il grafico della sua retta tangente in x_0 .

Abbiamo dunque dimostrato che se una funzione (due volte derivabile) è concava, è anche “concava per tangenti”

Studio di funzioni

9.1 Grafico di funzioni reali di variabile reale

- Il calcolo infinitesimale e differenziale sviluppato fin qui ci permette di affrontare in modo completo il problema di tracciare il grafico di una funzione f , ovvero effettuare lo **studio di funzione**.

I passi dello studio di funzione:

1. Determinare l'**insieme di definizione** o **dominio** (massimale) di f .
2. Calcolare i **limiti alla frontiera** del dominio. Determinare eventuali **asintoti orizzontali/verticali** e **punti di discontinuità**. Studiare il **segno della funzione** e i **punti in cui si annulla** (possibile solo per funzioni relativamente semplici).
3. Se per $x \rightarrow \infty$ la funzione tende a ∞ , si determinano gli eventuali **asintoti obliqui**.
4. Calcolare la **funzione derivata** f' , nei punti in cui esiste. Studiare i punti in cui f è continua ma non derivabile e stabilirne la natura (**punti angolosi**, **flessi a tangente verticale** o **cuspidi**). In punti angolosi o agli estremi del dominio è utile il calcolo di **derivate destre o sinistre** che determinano la **pendenza del grafico in quei punti**.
5. Studiare il segno di f' (sul suo insieme di definizione), per ottenere le informazioni sulla **monotonia** di f e sui suoi **punti di massimo e minimo relativi**. Determinare quindi i **punti di massimo e minimo assoluti**.

Informazioni aggiuntive:

1. Può essere utile determinare una **stima asintotica all'infinito** che ci dica se la funzione tende a ∞ in modo *sopra* o *sottolineare* o in modo *lineare* (e in tal caso può avere asintoto obliquo). La stima asintotica all'infinito dà normalmente anche un'informazione sulla **concavità** di f all'infinito.
2. Calcolare la **funzione derivata seconda** f'' e studiarne il segno, per dedurne informazioni sulla **concavità** e i **flessi** di f .
3. Determinare un'eventuale simmetria di f (**funzioni pari o dispari**) e restringere lo studio a $x \geq 0$.

4. Determinare un'eventuale periodicità di f (**funzioni periodiche**) e restringere lo studio a un periodo.

9.2 Esempi

Esempio 9.1: Studio e grafico di funzione

Studiamo e tracciamo il grafico della funzione:

$$f(x) = e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

Ci aspettiamo un punto angoloso in $x = 0$ per la presenza di $|x|$ e punti a tangente verticale dove si annulla il radicando.

Punto 1. Il dominio (massimale) di f è:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0, \quad (x-3)(x-2) \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Punto 2. I limiti alla frontiera sono:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e^{2x} (x^2 - 5x + 6)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{y^2 + 5y + 6}{e^{2y}}} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{-x} \sqrt{(x-3)(x-2)} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-|x|} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-x} \sqrt{(x-3)(x-2)} = 0^+$$

Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$ e non ci sono asintoti verticali. Nel dominio non ci sono punti di discontinuità. Abbiamo $f(x) \geq 0$ per ogni x nel dominio e $f(x) = 0$ per $x = 2$ e $x = 3$.

Punto 3. La funzione non ha asintoti obliqui.

Punto 4. Calcoliamo la funzione derivata per $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-|x|} \left(-\operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \right) \\ &= \frac{e^{-|x|}}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} \left(-2\operatorname{sgn}(x)(x^2 - 5x + 6) + 2x - 5 \right) \end{aligned}$$

O in maniera equivalente:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} \cdot \frac{-2x^2 + 12x - 17}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} & \text{se } x > 0 \\ e^x \cdot \frac{2x^2 - 8x + 7}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esempio 9.2: Studio e grafico di funzione

Calcoliamo la derivata destra e sinistra in $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} (-2x^2 + 12x - 17)}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} = -\frac{17}{2\sqrt{6}}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x (2x^2 - 8x + 7)}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} = \frac{7}{2\sqrt{6}}$$

quindi $x = 0$ è un punto angoloso, ovvero $f'(0)$ non esiste. Calcoliamo il limite destro in $x = 3$ e il limite sinistro $x = 2$ della funzione derivata:

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{e^{-x} \overbrace{(-2x^2 + 12x - 17)}^{\rightarrow 1}}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} = +\infty$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{-x} \overbrace{(-2x^2 + 12x - 17)}^{\rightarrow -1}}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}} = -\infty$$

Quindi la funzione ha punti a tangente verticale in $x = 2$ e $x = 3$.

Punto 5. Studiamo il segno della funzione derivata:

- Per $x > 0$ abbiamo:

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{se} \quad 2x^2 - 12x + 17 \leq 0, \quad \text{ovvero} \quad x \in \left[\underbrace{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}_{\approx 2.3}, \underbrace{\frac{6+\sqrt{2}}{2}}_{\approx 3.7} \right]$$

quindi:

$$f \text{ è decrescente per } x \in [0, 2] \cup \left[\frac{6+\sqrt{2}}{2}, +\infty \right),$$

$$f \text{ è crescente per } x \in \left[3, \frac{6+\sqrt{2}}{2} \right]$$

Abbiamo $f'\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ quindi, $x = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$ è punto di massimo relativo. Il massimo relativo è $f\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.027$

- Per $x < 0$ abbiamo:

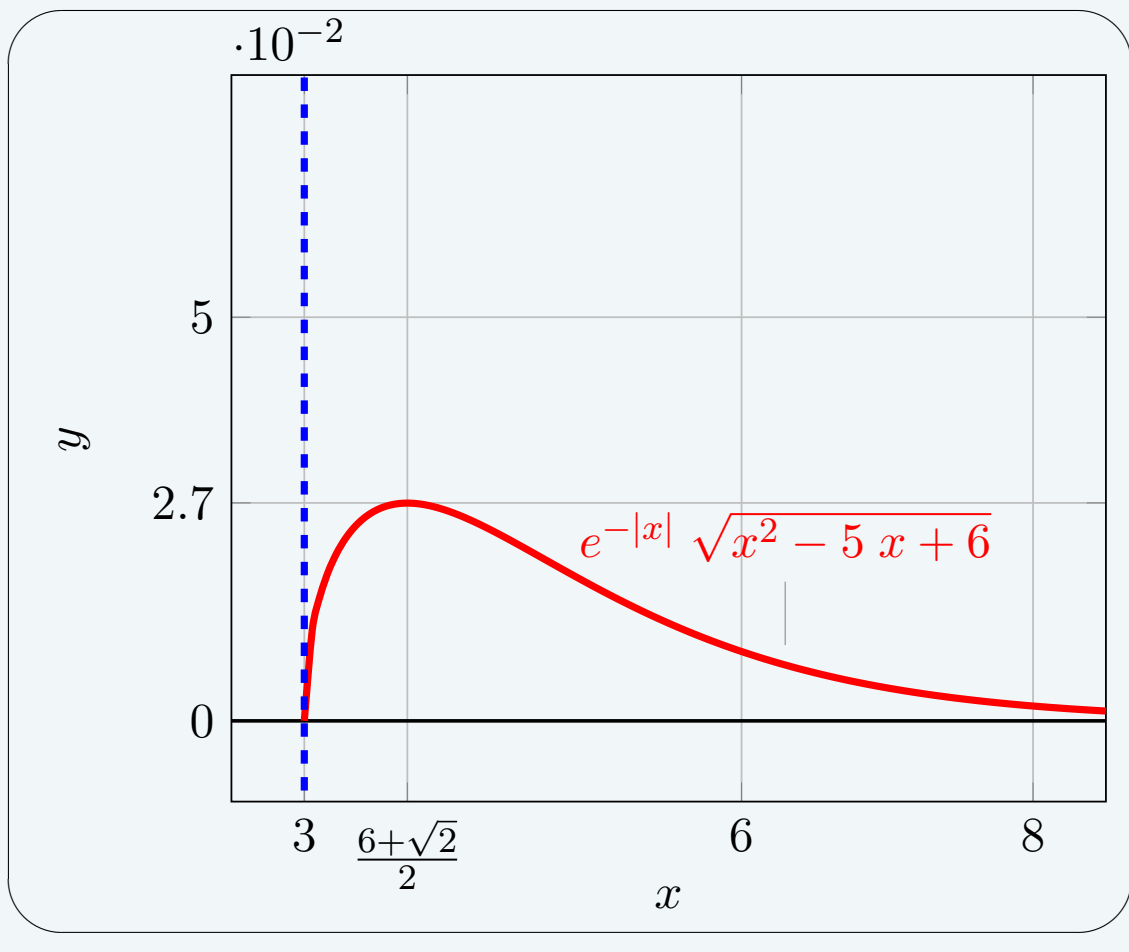
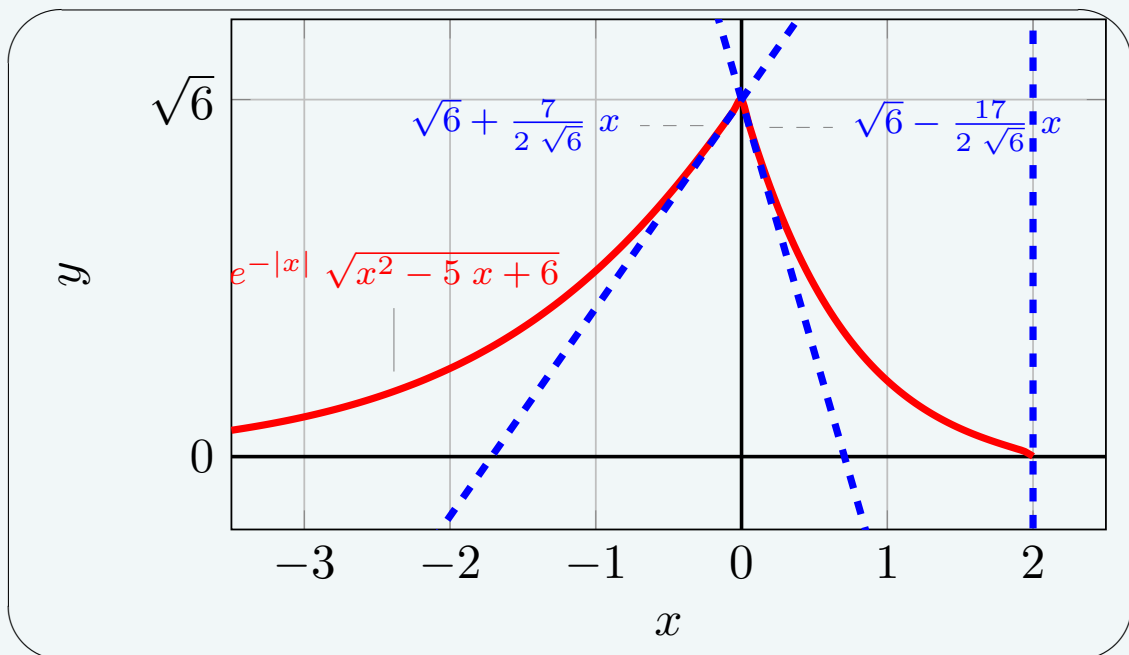
$$f'(x) \geq 0 \quad \text{se} \quad 2x^2 - 8x + 7 \geq 0, \quad \text{ovvero se} \quad x \in \left[-\infty, \frac{4-\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}, +\infty \right]$$

quindi $f(x)$ è crescente per $x < 0$.

Possiamo dedurre che $x = 0$ (in cui f non è derivabile) è punto di massimo assoluto; il massimo assoluto è $\sqrt{6} \approx 2.44$.

Ci sono anche due punti di flesso, uno in $(0, 2)$ e uno in $(3, +\infty)$ ottenibili con lo studio del segno della derivata seconda.

Esempio 9.3: Studio e grafico di funzione



Esempio 9.4: Studio e grafico di funzione

Studiamo e tracciamo il grafico della funzione:

$$f(x) = x \cdot \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Punto 1. Il dominio (massimale) di f è:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Punto 2. I limiti alla frontiera sono:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\frac{x+2}{x-1} \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow 1^+, \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\frac{x+2}{x-1} \rightarrow -\infty \text{ per } x \rightarrow 1^-, \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 0$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali e $x = 1$ è un punto di discontinuità. Inoltre $x = 1$ è asintoto verticale per $x \rightarrow 1^+$. Abbiamo $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$.

Punto 3. Calcoliamo una stima asintotica, abbiamo:

$$\frac{x+2}{x-1} \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow +\infty, \quad \frac{x+2}{x-1} \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow -\infty$$

quindi

$$x \cdot \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \sim x \cdot e \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty \text{ perciò } f \text{ ha crescita lineare}$$

Verifichiamo quindi la presenza di asintoti obliqui. Cerchiamo di calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) - x e \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot e \cdot \left(\exp\left(\frac{x+2}{x-1} - 1\right) - 1 \right)$$

Abbiamo

$$\frac{x+2}{x-1} - 1 = \frac{3}{x-1} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty$$

perciò

$$\exp\left(\frac{x+2}{x-1} - 1\right) - 1 \sim \frac{3}{x-1} \text{ per } x \rightarrow \pm\infty;$$

$$x \cdot e \cdot \left(\exp\left(\frac{x+2}{x-1} - 1\right) - 1 \right) \sim \frac{3 \cdot x \cdot e}{x-1} \text{ per } x \rightarrow \pm\infty$$

di conseguenza:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) - x e \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 \cdot x \cdot e}{x-1} = 3 \cdot e$$

Quindi la funzione ha asintoto obliquo: $y = e x + 3 e$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Esempio 9.5: Studio e grafico di funzione

Punto 4. Calcoliamo la funzione derivata per $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \left(1 + x \cdot \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2}\right) = \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-1)^2 - 3x}{(x-1)^2} \\ &= \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Per ogni $x \neq 1$, f' è definita. Calcoliamo il limite sinistro in $x = 1$:

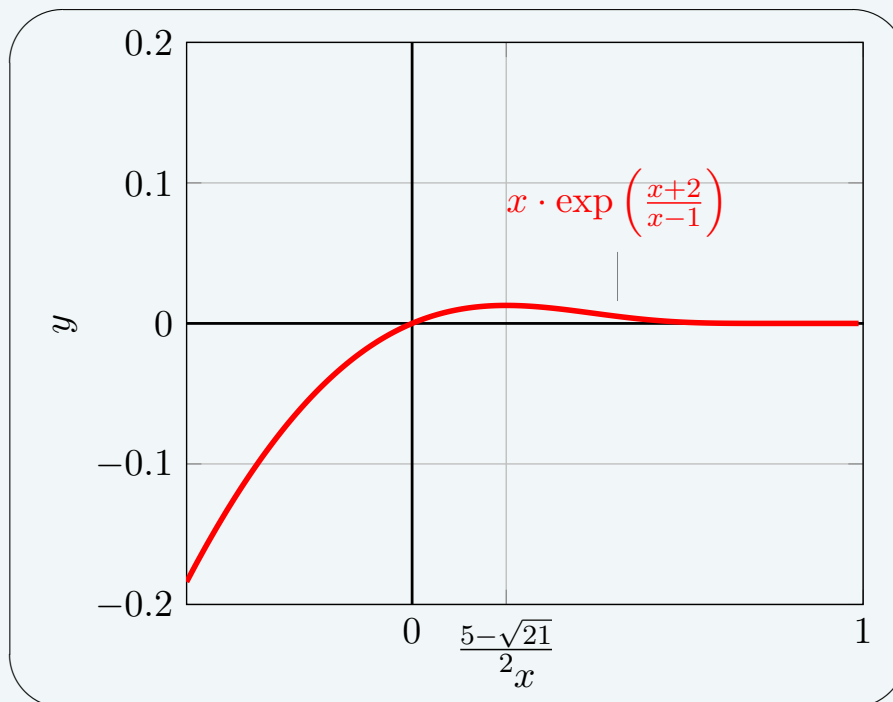
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2} = 0$$

l'esponenziale va a zero più rapidamente di $(x-1)^2$; il grafico quindi arriva in $x = 1$ con tangente orizzontale, da sinistra.

Punto 5. Studiamo il segno della funzione derivata:

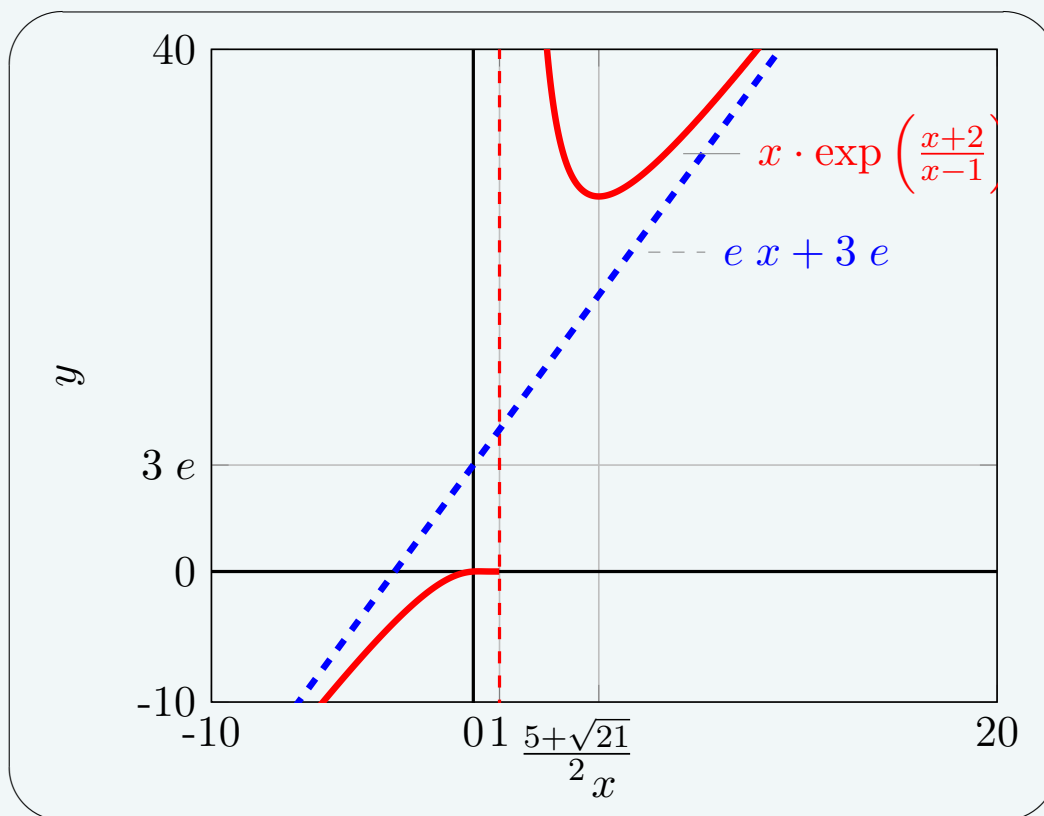
$$f'(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad x^2 - 5x + 1 \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad x \in \left[-\infty, \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{21}}{2}, +\infty\right]$$

quindi $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ è punto di minimo relativo e $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ di massimo relativo.



C'è un punto di flesso in $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, 1\right)$ ottenibile con lo studio del segno della derivata seconda.

Esempio 9.6: Studio e grafico di funzione



Abbiamo $f'_-(1) = 0$ dato che:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}{(x-1)^2} \cdot \underbrace{(x^2 - 5x + 1)}_{\rightarrow -3 \text{ per } x \rightarrow 1^-}$$

facendo il cambio di variabile: $y = \frac{x+2}{x-1}$, se $x \rightarrow 1^-$ allora $y \rightarrow -\infty$, inoltre:

$$y = \frac{x+2}{x-1}, \quad y = \frac{x-1+3}{x-1}, \quad y = 1 + \frac{3}{x-1} \text{ e } x = 1 + \frac{3}{y-1}$$

quindi abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\exp\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}{(x-1)^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^y}{\left(\frac{3}{y-1}\right)^2} = \frac{1}{9} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot \underbrace{(y-1)^2}_{\sim y^2 \text{ per } y \rightarrow -\infty}$$

facendo un secondo cambio di variabile: $z = -y$, se $y \rightarrow -\infty$ allora $z \rightarrow +\infty$ e abbiamo

$$\frac{1}{9} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y^2 = \frac{1}{9} \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} \cdot (-z)^2 = \frac{1}{9} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^2}{e^z} = 0$$

per il teorema della gerarchia degli infiniti.

Metodo di Newton

10.1 Metodo di Newton

- Supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$f(x) = 0$$

che equivale a cercare le intersezioni del grafico di f con l'asse x o gli zeri della funzione. Supponiamo inoltre: i) che la soluzione $x = c$ esista sia unica e si trovi all'interno dell'intervallo $[a, b]$; ii) che la funzione sia derivabile in $[a, b]$; iii) che $f'(x) \leq 0$ (funzione decrescente) e che $f''(x) \geq 0$ (funzione convessa) per ogni $x \in [a, b]$.

- Partiamo allora da $x_0 = a$ e linearizziamo l'equazione $f(x) = 0$ sostituendo a f la retta tangente al suo grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. Tale retta ha equazione:

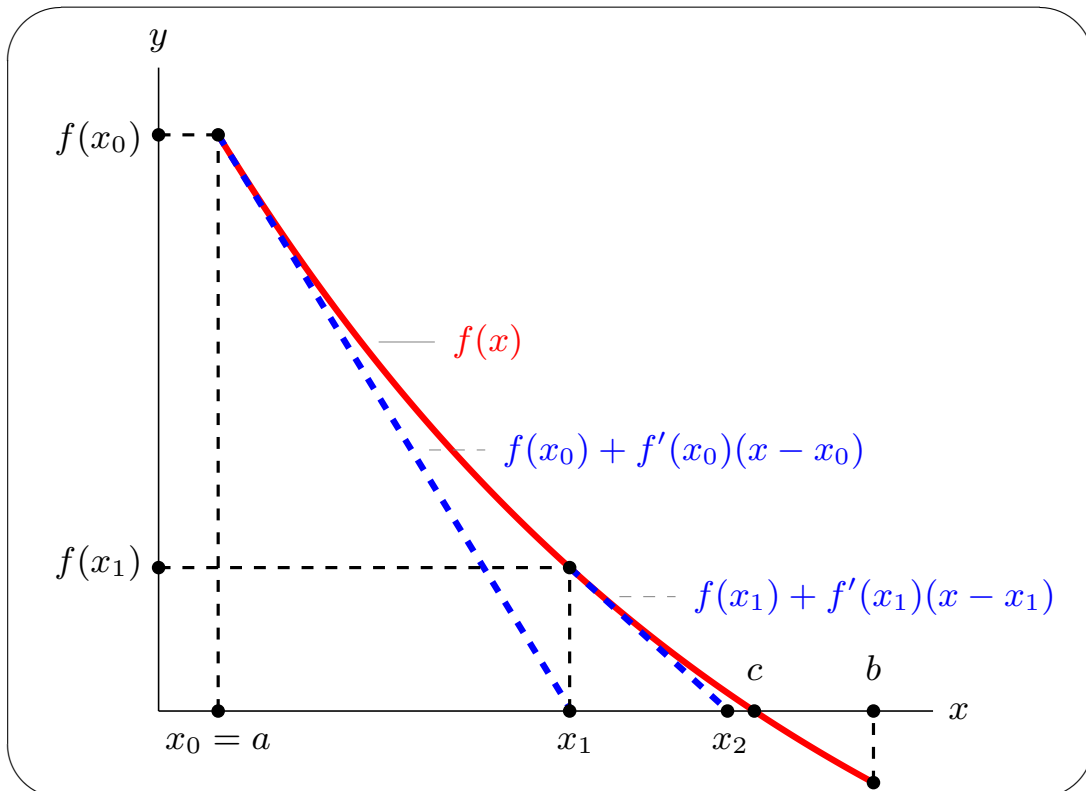
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Invece di risolvere $f(x) = 0$, risolviamo:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

chiamando la soluzione x_1 otteniamo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad \text{la prima approssimazione di } c$$



- Partiamo ora da x_1 e linearizziamo come prima con la retta tangente nel nuovo punto $(x_1, f(x_1))$. Tale retta ha equazione:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Come prima risolviamo:

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$$

ottenendo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad \text{la seconda approssimazione di } c$$

Proseguendo con x_2 come con x_1 e continuando si ottiene la seguente successione definita per ricorrenza:

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

In questo modo, il termine x_n può essere costruito a partire da x_0 con n iterazioni del medesimo algoritmo. Il metodo, perciò, si presta molto bene al calcolo automatico.

- L'idea principale di questo metodo, chiamato **metodo di Newton** è quindi quella di costruire una successione che, **sotto determinate ipotesi**, converge a c .

Teorema 10.1: del metodo di Newton

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in $[a, b]$, se valgono le seguenti tre ipotesi:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. $f'(x)$ e $f''(x)$ hanno segno costante in $[a, b]$
3. $f(a) \cdot f''(a) > 0$

Allora esiste uno e un solo punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$ e la successione

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge a c per difetto. Se invece di valere l'ipotesi 3 vale la seguente ipotesi

$$3'. \quad f(b) \cdot f''(b) > 0$$

allora la successione

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge a c per eccesso.

- Notiamo che, sotto le ipotesi 1. e 2. è senz'altro verificata la 3. o la 3'. La funzione f'' ha lo stesso segno in a e b per la 2. e la funzione f ha segni opposti in a e b per la 1. Perciò o vale la 3. o vale la 3'.
- Questo significa che il metodo è applicabile ogni volta che le ipotesi 1. e 2. sono verificate: si tratta solo di scegliere opportunamente se porre $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$.
- La condizione 2, apparentemente restrittiva, sarà in generale soddisfatta pur di scegliere un intervallo $[a, b]$ abbastanza piccolo.

Dimostrazione. Poiché f è continua in quanto derivabile in $[a, b]$ e vale la 1, per il teorema degli zeri esiste almeno un $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Inoltre, poiché $f'(x)$ ha segno costante in (a, b) , la f è strettamente monotona, quindi tale punto c è unico (una funzione strettamente monotona non può annullarsi in due punti distinti).

Questo prova esistenza e unicità del punto c in cui f si annulla. Proveremo ora che la successione è monotona. Da questo seguirà che la successione è convergente per il teorema di monotonia delle successioni.

Cominciamo mostrando che se la successione x_n converge, allora $x_n \rightarrow c$. Se $x_n \rightarrow \ell \in [a, b]$, passando al limite nell'uguaglianza

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{si ha} \quad \ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

(abbiamo sfruttato il fatto che f è continua, e anche f' è continua, in quanto f' è

derivabile, perché esiste per ipotesi f''). Dall'ultima uguaglianza segue $f(\ell) = 0$, per cui $\ell = c$ (l'unico punto in cui la funzione si annulla).

Proviamo dunque che x_n è monotona, sotto le ipotesi 1, 2, 3. Senza perdita di generalità, supponiamo $f(a) < 0$ e, per la 1, di conseguenza $f(b) > 0$. Poiché per la 2, $f'(x)$ ha segno costante in $[a, b]$, dovrà essere $f'(x) > 0$ in tutto $[a, b]$ (se valesse l'altra disuguaglianza, f sarebbe decrescente, e non potrebbe essere $f(a) < 0 < f(b)$). Poiché $f(a) < 0$ e vale la 3, $f''(a) < 0$, dunque, poiché per la 2 $f''(x)$ ha segno costante, $f''(x) < 0$ in tutto $[a, b]$.

Stiamo quindi dimostrando il caso di funzione monotona crescente e concava.
Gli altri casi si dimostrano in maniera analoga. $\square$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \text{abbiamo } x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{e} \quad g(c) = c \quad \text{dato che } f(c) = 0$$

Abbiamo:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} > 0 \iff f(x) < 0$$

perché $f''(x) < 0$ in tutto $[a, b]$. Quindi $g'(x) > 0$ per $x \in [a, c]$, ossia in $[a, c]$ la funzione g è strettamente crescente.

Tenendo presenti queste cose, proviamo ora che:

$$x_n < x_{n+1} < c, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10.1)$$

Per $n = 0$ si ha

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$$

perché $f(a) < 0$ e $f'(a) > 0$, quindi $x_1 > x_0$. Inoltre $a < c$ (e $x_0 = a$), e poiché g è crescente, questo implica:

$$g(a) < g(c) \quad \text{ovvero} \quad x_1 < c$$

Quindi abbiamo provato che

$$x_0 < x_1 < c$$

Applicando ora la g alle disuguaglianze precedenti (g è strettamente crescente in $[a, c]$, e i tre punti stanno in questo intervallo, quindi g conserva le disuguaglianze), si ha

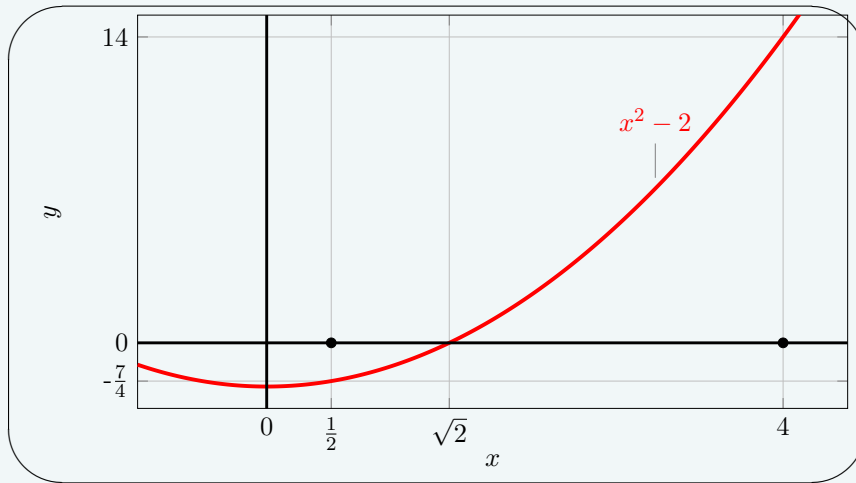
$$g(x_0) < g(x_1) < g(c) \quad \text{ovvero} \quad x_1 < x_2 < c$$

Applicando ancora la g , troveremo $x_2 < x_3 < c$, e così via. Perciò la (10.1) è vera, e in particolare x_n è monotona. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Esempio 10.1: metodo di Newton

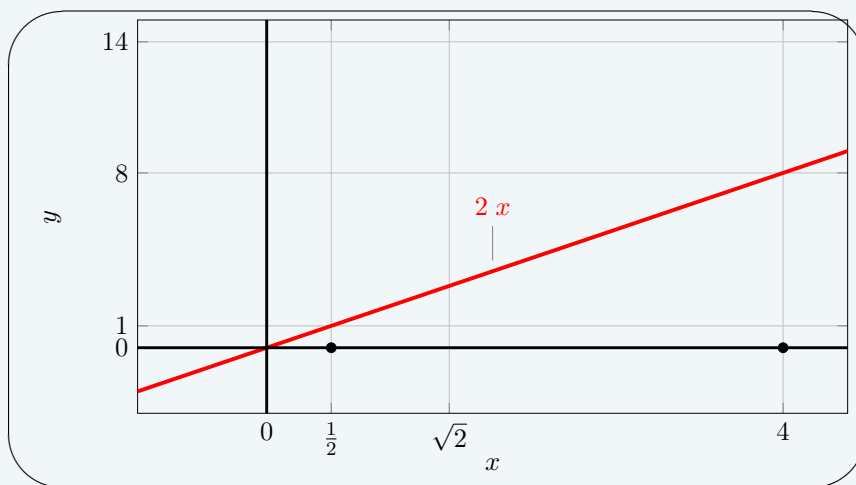
Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^2 - 2, \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2$$



Abbiamo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4} < 0 \quad \text{e} \quad f(4) = 14 > 0$$



Consideriamo l'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, abbiamo:

$$f'(x) > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) > 0, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$$

Esempio 10.2: metodo di Newton

Quindi nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ la funzione $f(x) = x^2 - 2$ rispetta le ipotesi del teorema.

Siamo nel caso di funzione strettamente crescente in $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, dato che $f'(x) > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$.
E funzione convessa in $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, dato che $f''(x) > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$. Gli estremi dell'intervallo

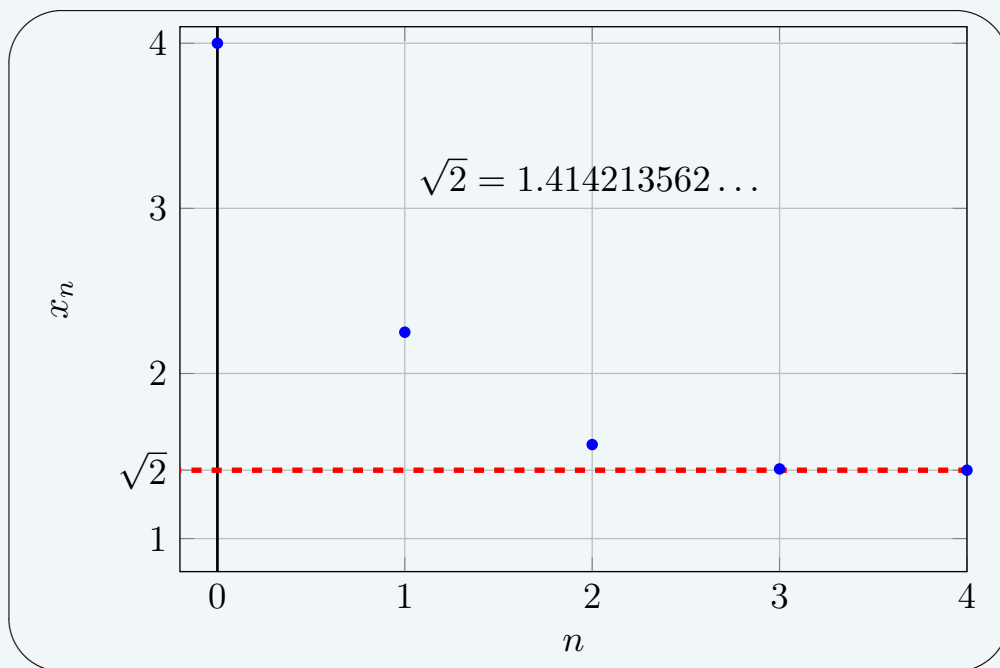
scelto sono: $a = \frac{1}{2}$ e $b = 4$.

Vale l'ipotesi 3', ovvero $f(4) \cdot f''(4) > 0$ e la successione diventa:

$$x_0 = 4, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Calcolando i primi valori della successione abbiamo:

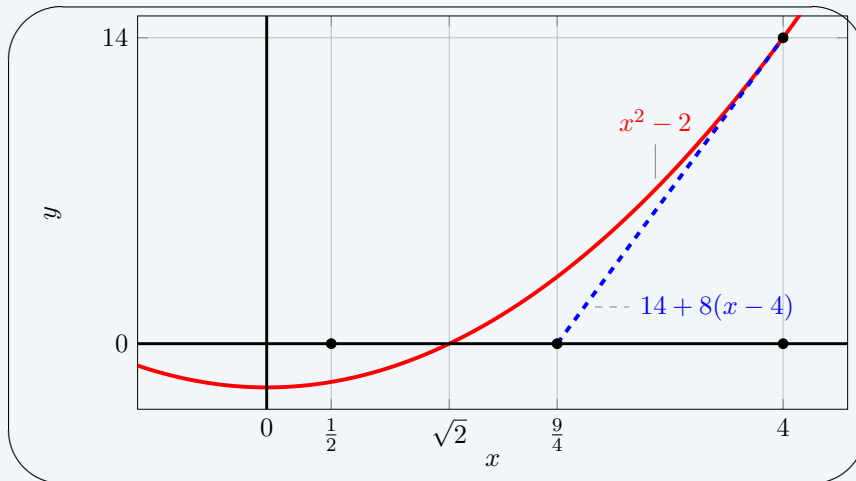
$$\begin{aligned} x_0 &= 4, & x_1 &= \frac{9}{4} = 2.25, & x_2 &= \frac{113}{72} = 1.569444444\dots \\ x_3 &= \frac{23,137}{16,272} = 1.421890363\dots, & x_4 &= \frac{1,064,876,737}{752,970,528} = 1.414234285\dots \end{aligned}$$



Esempio 10.3: metodo di Newton

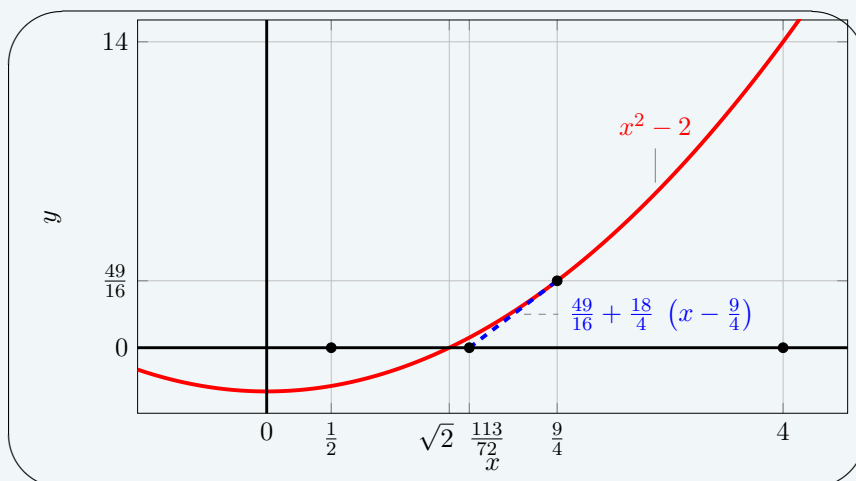
Alla prima iterazione la retta tangente è:

$$y = 14 + 8(x - 4) \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{9}{4}$$



Alla seconda iterazione la retta tangente è:

$$y = \frac{49}{16} + \frac{18}{4} \left(x - \frac{9}{4} \right) \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{113}{72}$$



- Il metodo di Newton può essere ad esempio utilizzato per calcolare la radice k -esima di un numero $c \in \mathbb{R}_+$, cercando gli zeri della seguente funzione:

$$f(x) = x^k - c \quad \text{ovvero} \quad x = \sqrt[k]{c}$$

Dato un valore $b \geq \sqrt[k]{c}$, abbiamo la successione definita per ricorrenza:

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{k x_n^{k-1}} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}$$

sviluppando otteniamo

$$x_n - \frac{x_n^k - c}{k x_n^{k-1}} = \frac{k x_n^k - x_n^k + c}{k x_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{c}{x_n^{k-1}} \right)$$

e quindi la successione diventa:

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{c}{x_n^{k-1}} \right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Con $k = 2$ otteniamo la successione dell'algoritmo di Erone:

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

10.2 Stima degli errori del metodo di Newton

- L'errore assoluto del metodo di Newton è:

$$\varepsilon_n = |x_n - c|$$

dove $c \in (a, b)$ è lo zero della funzione, ovvero $f(c) = 0$.

Il valore di c è ignoto quindi ci serve un modo per analizzare i valori degli errori assoluti che sia indipendente da c . Vogliamo inoltre capire con che “velocità” decresca l'errore comparando gli errori di due iterazioni consecutive, ovvero vogliamo determinare la “**velocità di convergenza**” dell'algoritmo.

- Usando il teorema della formula di Taylor con resto secondo Lagrange possiamo scrivere:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\mu)(x - x_n)^2$$

per un qualche μ tra x_n e x . In particolare, scegliendo $x = c$ abbiamo:

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\mu)(c - x_n)^2 \quad (10.2)$$

Ricordando che x_{n+1} è stato ottenuto come soluzione dell'equazione:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

allora abbiamo

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad (10.3)$$

Sottraendo la (10.3) dalla (10.2), otteniamo:

$$0 = f'(x_n)(c - x_{n+1}) + \frac{1}{2} f''(\mu)(c - x_n)^2$$

che a sua volta implica:

$$x_{n+1} - c = \frac{1}{2} \frac{f''(\mu)}{f'(x_n)} (x_n - c)^2 \quad \text{quindi} \quad |x_{n+1} - c| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\mu)|}{|f'(x_n)|} |x_n - c|^2 \quad (10.4)$$

Ora se x_n è vicino a c (ovvero $x_n \approx c$) allora anche μ , che sta tra x_n e c , è vicino a c ; quindi in questi casi:

$$f''(\mu) \approx f''(c) \quad \text{e} \quad f'(x_n) \approx f'(c)$$

allora sostituendo otteniamo:

$$|x_{n+1} - c| \approx \frac{1}{2} \frac{|f''(c)|}{|f'(c)|} |x_n - c|^2 \quad \text{quindi} \quad \varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{|f''(c)|}{|f'(c)|} \varepsilon_n^2 \quad (10.5)$$

L'errore assoluto del metodo di Newton ad ogni passo è proporzionale al quadrato dell'errore assoluto nel passaggio precedente. **La velocità di convergenza è quadratica.**

- L'errore però è proporzionale anche alla costante:

$$\frac{|f''(c)|}{2|f'(c)|}$$

quindi se $|f'(c)|$ è molto piccolo, o zero, oppure $|f''(c)|$ molto grande, la convergenza può essere però molto lenta o addirittura non verificarsi.

- Riprendiamo l'equazione (10.4), determinando $L, M > 0$, per i quali risulti:

$$|f'(x_n)| \geq L \quad \text{e} \quad |f''(\mu)| \leq M$$

allora possiamo scrivere:

$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{L} |x_n - c|^2 \quad \text{quindi} \quad \varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{2} \frac{M}{L} \varepsilon_n^2$$

Abbiamo ottenuto il legame tra ε_{n+1} e ε_n , indipendente sia da x_n che da c (che dipende però da M e L).

Esempio 10.4: Stima degli errori del metodo di Newton ($\sqrt{2} = 1.414213562\dots$)

Riprendiamo l'esempio precedente:

$$f(x) = x^2 - 2, \quad f'(x) = 2x \quad \text{e} \quad f''(x) = 2$$

Quindi possiamo scegliere $M = 2$ e dato che $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, possiamo scegliere $L = 2$ (in questo caso $\frac{M}{L} = \frac{2}{2} = 1$).

Sappiamo che $\sqrt{2} > 1$ quindi con $n = 2$ abbiamo $\varepsilon_2 \leq \left| \frac{113}{72} - 1 \right| \approx 0.56944$, e abbiamo:

iter.	x_n	stima di $\sqrt{2}$	ε_n
$n = 3$	$\frac{23,137}{16,272}$	1.421890363...	$\leq \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \approx 0.16213\dots$
$n = 4$	$\frac{1,064,876,737}{752,970,528}$	1.414234285...	$\leq \frac{1}{2} \varepsilon_3^2 \approx 0.01314\dots$