



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Volume 4 — Limiti

Il quarto volume: i limiti, in due parti numerate ciascuna da 1 come le note. Limiti di successioni: proprietà e limiti, calcolo dei limiti, il numero di Nepero, confronti e stime asintotiche, gerarchie degli infiniti e criterio del rapporto, successioni per ricorrenza. Limiti di funzioni e continuità: limiti e asintoti, calcolo dei limiti, polinomi e funzioni razionali, funzioni continue, confronto degli infiniti, limiti notevoli, sviluppi asintotici, teorema degli zeri e bisezione, teorema di Weierstrass e dei valori intermedi, funzioni monotone e invertibilità. Gli esercizi, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 4.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

I	Limiti di successioni	3
1	Successioni e limiti di successioni	4
1.1	Definizione di successione e proprietà	4
1.2	Insiemi non limitati e loro estremi superiori/inferiori	19
1.3	Successioni infinitesime e infinite	19
1.4	Successioni monotone	23
1.5	Limiti delle progressioni geometriche	27
2	Calcolo dei limiti delle successioni	32
2.1	Il calcolo dei limiti delle successioni	32
3	Il numero di Nepero	45
3.1	Il numero e di Nepero	45
3.2	Il numero di Nepero in finanza	52
4	Confronti e stime asintotiche	54
4.1	Confronti e stime asintotiche	54
5	Gerarchie degli infiniti e criterio del rapporto	60
5.1	Gerarchie degli infiniti delle successioni parte 1 e parte 2	60
5.2	Teorema del criterio del rapporto	62
5.3	Gerarchie degli infiniti delle successioni parte 3 e parte 4	64
6	Successioni definite per ricorrenza	66
6.1	Successioni definite per ricorrenza	66
6.2	L'algoritmo di Erone	69
II	Limiti di funzioni e continuità	78
1	Limiti di funzioni, asintoti e continuità	79
1.1	Definizione successionale di limite	79
2	Calcolo dei limiti di funzioni	95
2.1	Il calcolo dei limiti di funzioni	95
2.2	Teorema del cambio di variabile nel limite	101

3	Limiti di polinomi e funzioni razionali	104
3.1	Limiti di polinomi a $\pm\infty$	104
3.2	Limiti di funzioni razionali a $\pm\infty$	105
3.3	Limiti di quozienti di somme di potenze a esponente razionale	106
4	Funzioni continue	109
4.1	Teorema dell'algebra delle funzioni continue	109
4.2	Teorema di continuità delle funzioni elementari	110
4.3	Teorema di continuità della funzione composta	112
5	Confronto degli infiniti	115
5.1	Confronto degli infiniti per funzioni	115
6	Limiti notevoli e stime asintotiche	122
6.1	Limiti notevoli	122
6.2	Stime asintotiche	130
6.3	Stime asintotiche e grafici	132
7	Sviluppi asintotici	137
7.1	Simbolo di "o piccolo" e sviluppi asintotici	137
7.2	Sviluppi asintotici derivanti dai limiti notevoli	140
8	Teorema degli zeri e metodo della bisezione	143
8.1	Zeri di una funzione	143
8.2	Metodo della bisezione	148
9	Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi	154
9.1	Teorema di Weierstrass	154
9.2	Teorema dei valori intermedi	157
9.3	Teorema di esistenza della radice n -esima	160
10	Funzioni monotone su un intervallo e invertibilità	162
10.1	Funzioni monotone su un intervallo	162
10.2	Continuità e invertibilità	164

Parte I

Limiti di successioni

Successioni e limiti di successioni

1.1 Definizione di successione e proprietà

- Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ degli interi non negativi ordinato secondo l'ordine naturale

$$\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Definizione 1.1: di successione

Una **successione** è una relazione che associa a ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ (o da un certo numero naturale n_0 in poi) un numero reale $a_n \in \mathbb{R}$.

- Una successione è quindi una **funzione**:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : n \mapsto a_n$$

o eventualmente

$$f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

per un certo intero $n_0 \in \mathbb{N}$ fissato.

La successione associa alla **variabile di input** n il **valore in output** a_n .

- Il fatto che il dominio della funzione f sia l'insieme dei naturali, rende possibile scrivere la successione **enumerando i suoi valori**, nell'ordine in cui essi si succedono al crescere di n :

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- I puntini di sospensione dopo a_n indicano che non stiamo considerando soltanto i primi n termini della successione (cioè un **insieme finito** di numeri), ma l'intera successione di *infiniti termini* (cioè un **insieme infinito** di numeri).

Esempio 1.1: Successioni

$n \in \mathbb{N}$	$n \mapsto n^2$	$0, 1, 4, 9, 16, \dots$
$n \in \mathbb{N}$	$n \mapsto (-1)^n$	$1, -1, 1, -1, 1, \dots$
$n \in \mathbb{N}$	$n \mapsto a \in \mathbb{R}$	$a, a, a, a, a, \dots$

L'ultima successione si chiama **successione costante**.

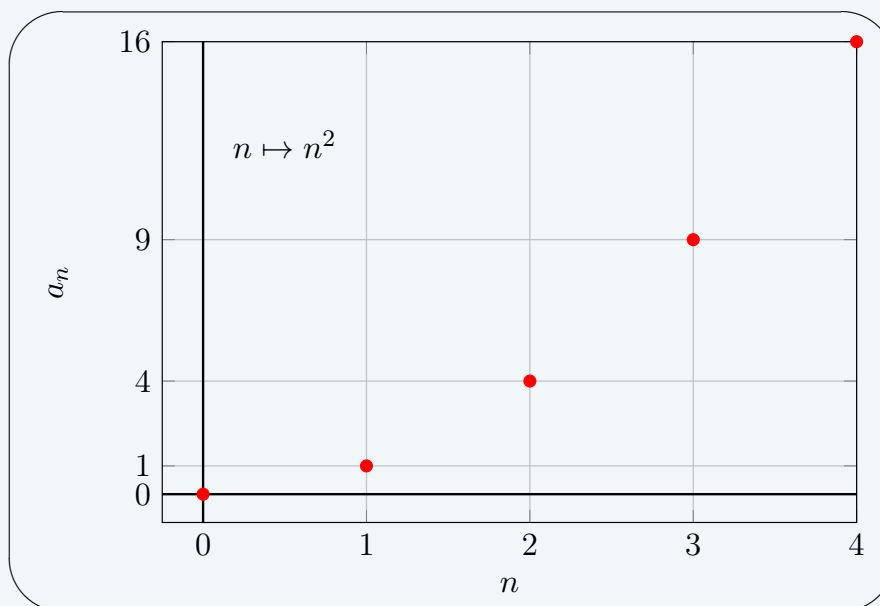
Esempio 1.2: Successioni

$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$n \mapsto \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$n \mapsto \frac{n+1}{n-1}$	$3, 2, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \dots$

Possiamo rappresentare graficamente le successioni con i **punti** del piano cartesiano di coordinate (n, a_n) .

Esempio 1.3: Grafico di successione

Il grafico della successione $n \mapsto n^2$ con $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ è:



Per indicare una successione useremo la notazione:

$$\{a_n\} \quad \text{oppure} \quad n \mapsto a_n$$

eventualmente precisando l'insieme in cui varia la variabile di input n (tutto l'insieme $\mathbb{N}$ o da un certo valore $n_0 \in \mathbb{N}$ in poi).

Una successione $\{a_n\}$ è **limitata** se esistono due numeri $m \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che:

$$m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

È **limitata inferiormente** se esiste m . È **limitata superiormente** se esiste M .

Esempio 1.4: Successioni limitate

- la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata
- la successione $\{n^2\}$ è limitata solo inferiormente
- la successione $\{(-2)^n\}$ non è limitata (né inferiormente, né superiormente).

Definizione 1.2: di proprietà posseduta definitivamente

Diciamo che una successione $\{a_n\}$ possiede (o acquista) **definitivamente** una certa proprietà se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà per ogni $n \geq \tilde{n}$.

Definizione 1.3: di successione positiva e negativa

Una successione $\{a_n\}$ si dice **non negativa** se:

$$a_n \geq 0, \quad \forall n$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **positiva** se:

$$a_n > 0, \quad \forall n$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **non positiva** se:

$$a_n \leq 0, \quad \forall n$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **negativa** se:

$$a_n < 0, \quad \forall n$$

Definizione 1.4: di successione definitivamente positiva e definitivamente negativa

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente non negativa** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n \geq 0, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente positiva** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n > 0, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente non positiva** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

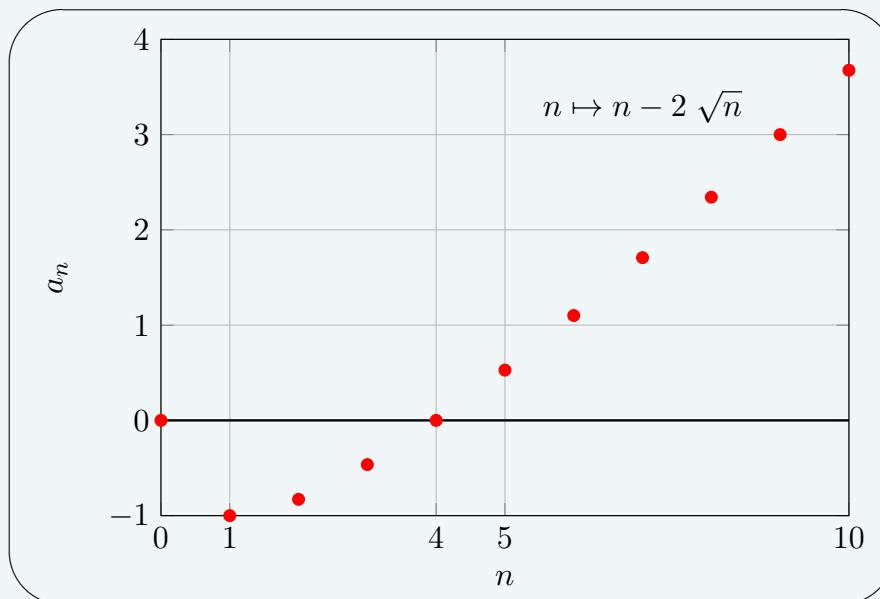
$$a_n \leq 0, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente negativa** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n < 0, \forall n \geq \tilde{n}$$

Esempio 1.5: Proprietà possedute definitivamente

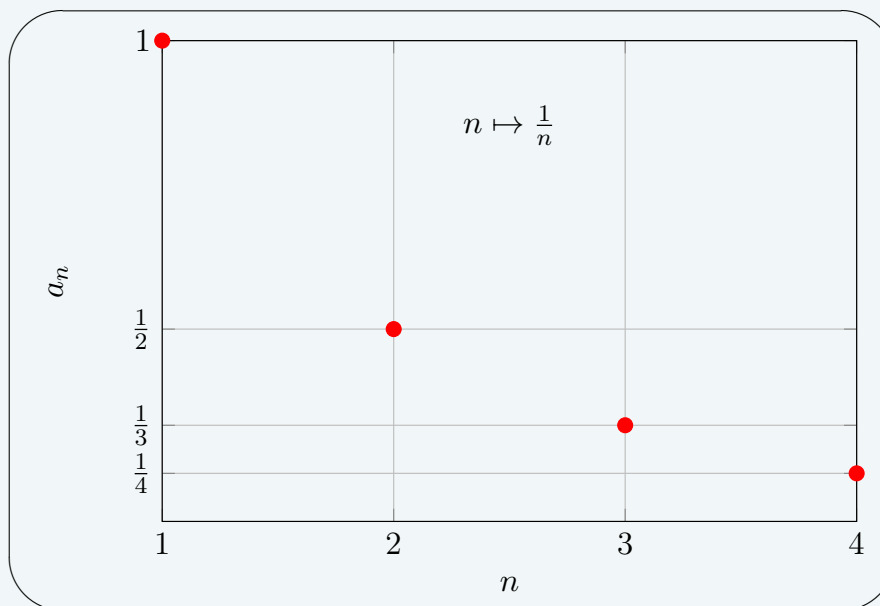
Consideriamo la successione $\{n - 2\sqrt{n}\}$. Il grafico della successione con $n \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ è:



Questa successione è definitivamente positiva. Con $n = 4$ abbiamo $a_n = 0$, quindi prendendo $\tilde{n} = 5$, si ha $a_n > 0$ con $n \geq \tilde{n}$.

Esempio 1.6: Proprietà possedute definitivamente

Consideriamo ora la successione $\{\frac{1}{n}\}$. Il grafico della successione con $n \in \{1, 2, \dots, 4\}$ è:



Questa successione è definitivamente minore di 10^{-100} . Con $n = 10^{100}$ abbiamo $a_n = 10^{-100}$, quindi prendendo ad esempio $\tilde{n} = 10^{100} + 1$ si ha $a_n < 10^{-100}$ con $n \geq \tilde{n}$.

1.1.1 Successioni convergenti e definizione di limite di successioni**Definizione 1.5: di successione convergente**

Una successione $\{a_n\}$ si dice **convergente** se esiste un numero $\ell \in \mathbb{R}$ tale che:

$$|a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \text{definitivamente} \quad (1.1)$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Una successione $\{a_n\}$ si dice quindi **convergente** se per ogni $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) esiste un numero $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \geq n(\varepsilon)$$

Il numero $n(\varepsilon)$ dipende (in generale) dal valore di ε . Se la successione $\{a_n\}$ è convergente, ad essa è quindi associato il numero $\ell \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.6: di limite della successione

Il numero $\ell \in \mathbb{R}$ che compare nella disuguaglianza (1.1) si chiama **limite della**

successione $\{a_n\}$, e si scrive della successione che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad \text{o, equivalentemente} \quad a_n \rightarrow \ell \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

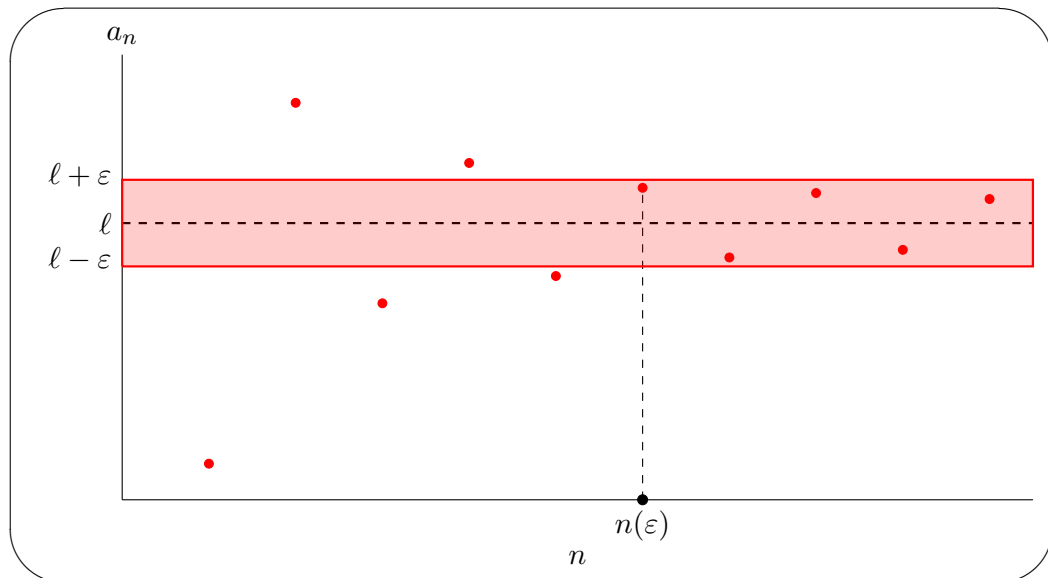
- si legge, rispettivamente:

il limite di a_n , per n che tende all'infinito, è ℓ
 a_n tende a ℓ per n che tende all'infinito

La disuguaglianza (1.1) corrisponde alle seguenti due:

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad (1.2)$$

- Rappresentando graficamente i punti di una successione abbiamo:



La condizione di convergenza significa che, fissata una striscia orizzontale “stretta a piacere”:

$$(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

da un certo valore di n in poi, chiamato $n(\varepsilon)$, i punti a_n della successione non escono più da questa striscia. Nel grafico di prima, fissata la larghezza della striscia, abbiamo i valori a_n all'interno della striscia per $n \geq n(\varepsilon)$.

Teorema 1.7: di unicità del limite della successione

Se una successione $\{a_n\}$ converge al limite $\ell \in \mathbb{R}$ allora tale limite è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due limiti differenti, ℓ_1 e ℓ_2 , associati alla medesima successione $\{a_n\}$. Allora risulterebbe, definitivamente, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq \underbrace{|\ell_1 - a_n|}_{=|a_n - \ell_1| < \varepsilon} + \underbrace{|a_n - \ell_2|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \quad (1.3)$$

Abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare. La (1.3), potendo scegliere $\varepsilon > 0$ piccolo in maniera arbitraria, può essere soddisfatta se e solo se:

$$\ell_1 = \ell_2$$

Quindi non possono esistere due valori differenti ℓ_1 e ℓ_2 e di conseguenza il limite (se esiste) è unico. $\square$

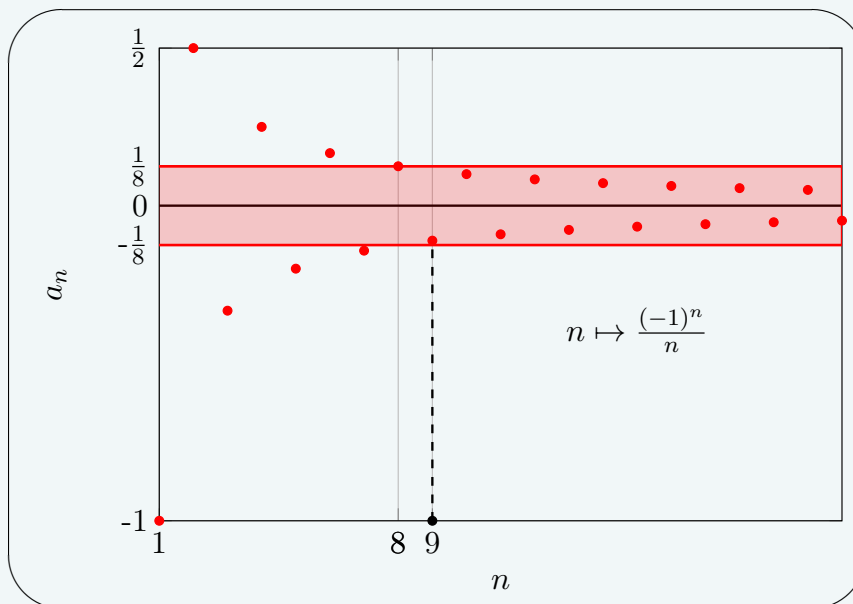
Esempio 1.7: Verifica del limite di successione

Il grafico della successione $n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$, ad esempio a partire da $n = 9$, è compreso nella striscia orizzontale:

$$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

data da $\ell = 0$ e $\varepsilon = \frac{1}{8}$. Con $n = 8$ abbiamo $a_n = \frac{1}{8}$, con $n = 9$ abbiamo $a_n = -\frac{1}{9}$, quindi

$$|a_n| < \frac{1}{8} \quad \text{per ogni} \quad n \geq 9$$



Per dimostrare che:

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

La disuguaglianza equivale a

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon \quad \text{che è soddisfatta per } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Osservazione 1.8

Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ convergente al limite $\ell \in \mathbb{R}$. Scegliendo $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite, esiste $n(1) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < 1 \quad \text{per ogni } n \geq n(1)$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo quindi

$$|a_n| = |(a_n - \ell) + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell| \quad \text{per ogni } n \geq n(1)$$

I termini rimanenti $a_0, a_1, \dots, a_{n(1)-1}$ sono in numero *finito*, perciò possiamo porre

$$M = \max \{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n(1)-1}|, 1 + |\ell| \} \in \mathbb{R}$$

e otteniamo

$$-M \leq a_n \leq M \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

ossia la successione è limitata. □

- Per contronominale otteniamo anche: se una successione **non** è limitata, allora **non** è convergente.
- L'implicazione non vale invece nel verso opposto: una successione limitata non è necessariamente convergente. Un controesempio è la successione $\{(-1)^n\}$, che è limitata ($-1 \leq (-1)^n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) ma non è convergente. Supponiamo infatti per assurdo che $(-1)^n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$: fissato $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dovremmo avere $|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2}$ definitivamente, mentre

$$\text{se } \ell \geq 0, \text{ per ogni } n \text{ dispari abbiamo } |(-1)^n - \ell| = |-1 - \ell| = 1 + \ell \geq 1;$$

$$\text{se } \ell < 0, \text{ per ogni } n \text{ pari abbiamo } |(-1)^n - \ell| = |1 - \ell| = 1 + |\ell| > 1.$$

In entrambi i casi la disuguaglianza $|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2}$ è violata per infiniti valori di n (quindi non vale definitivamente), e abbiamo l'assurdo. Perciò

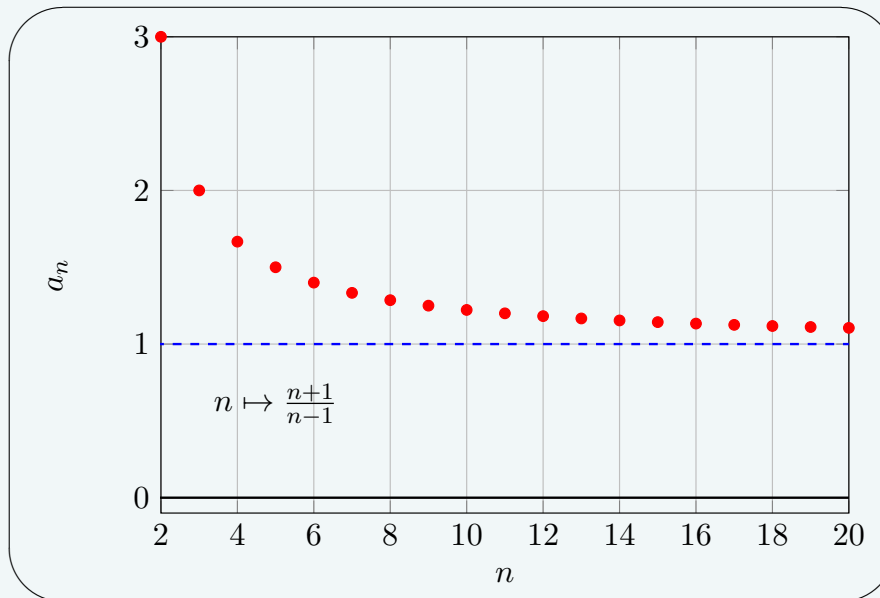
$$\{a_n\} \text{ limitata} \not\Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente}$$

Esempio 1.8: Verifica del limite di successione

Consideriamo la successione:

$$n \mapsto \frac{n+1}{n-1} \quad \left(\frac{n+1}{n-1} = \frac{n-1+1+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1} \right)$$

Questo è il grafico della successione con $n \in \{2, 3, \dots, 20\}$:



Vediamo che i valori a_n si avvicinano a 1, quindi cerchiamo di dimostrare, usando la definizione di limite, che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon$$

La disuguaglianza di sinistra è sempre soddisfatta (il numeratore della frazione è sempre più grande del denominatore). Prendiamo quella di destra:

$$\frac{n+1}{n-1} - 1 < \varepsilon, \quad \frac{n+1 - (n-1)}{n-1} < \varepsilon, \quad \frac{2}{n-1} < \varepsilon, \quad n-1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\text{quindi è soddisfatta se} \quad n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

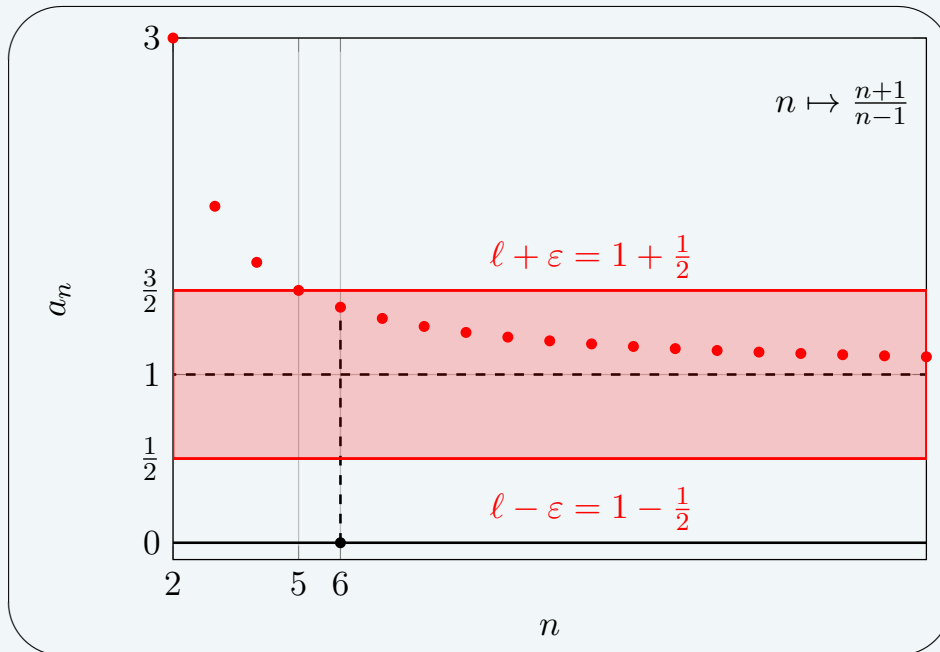
Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

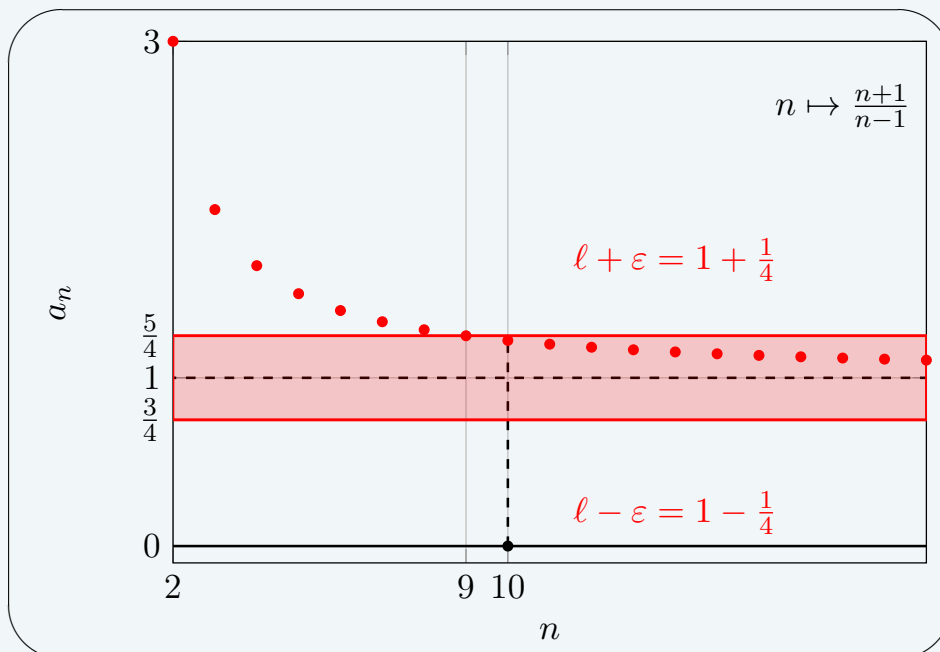
per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Esempio 1.9: Verifica del limite di successione

Per l'esempio precedente, abbiamo dimostrato che il limite vale 1. Verifichiamo ora cosa succede fissando $\varepsilon = \frac{1}{2}$. In questo caso $n(\frac{1}{2}) > \frac{2+1/2}{1/2} = 5$.



Fissando invece $\varepsilon = \frac{1}{4}$, in questo caso abbiamo $n(\frac{1}{4}) > \frac{2+1/4}{1/4} = 9$.

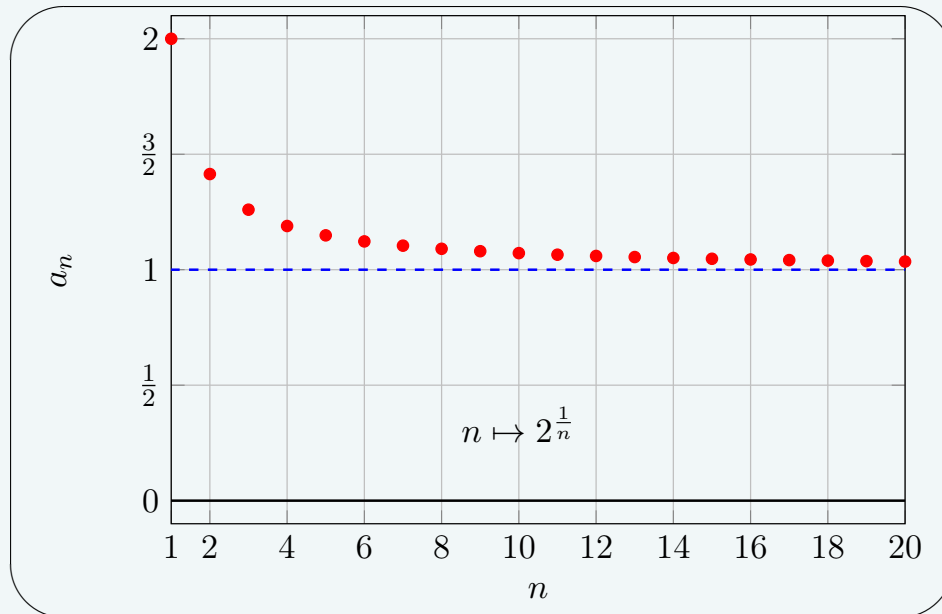


Esempio 1.10: Verifica del limite di successione

Consideriamo la successione:

$$n \mapsto 2^{\frac{1}{n}}$$

Questo è il grafico della successione con $n \in \{1, 2, \dots, 20\}$:



Vediamo che i valori a_n si avvicinano a 1, quindi cerchiamo di dimostrare, usando la definizione di limite, che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow 1 - \varepsilon < 2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

La disuguaglianza di sinistra è sempre soddisfatta (2 elevato a un numero razionale positivo), mentre quella di destra, prendendo il logaritmo in base 2, otteniamo:

$$\frac{1}{n} < \log_2(1 + \varepsilon)$$

Quindi è soddisfatta se:

$$n > \frac{1}{\log_2(1 + \varepsilon)}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basta scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{\log_2(1 + \varepsilon)}$$

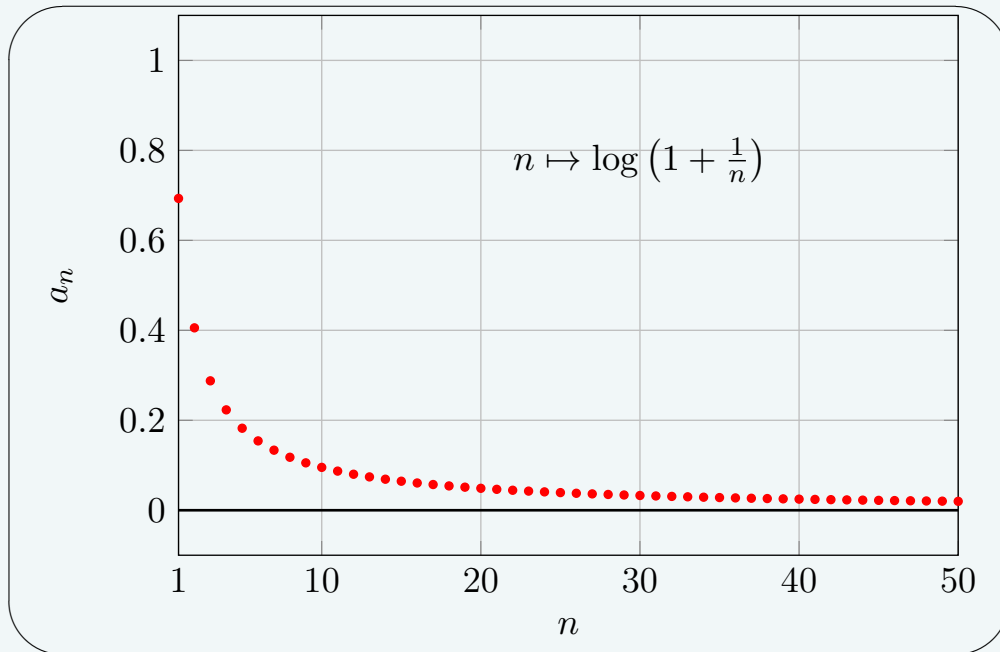
per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Esempio 1.11: Limite di successioni

Consideriamo la successione:

$$n \mapsto \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Questo è il grafico della successione con $n \in \{1, 2, \dots, 50\}$:



Vediamo che i valori a_n si avvicinano a 0, quindi cerchiamo di dimostrare, usando la definizione di limite, che :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \varepsilon$$

La disuguaglianza di sinistra è sempre soddisfatta (il logaritmo in base e di un numero più grande di 1), mentre quella di destra, elevando a potenza, otteniamo:

$$\frac{1}{n} + 1 < e^\varepsilon \quad \text{quindi è soddisfatta se} \quad n > \frac{1}{e^\varepsilon - 1} \quad (e^\varepsilon - 1 > 0 \text{ con } \varepsilon > 0)$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basta scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{e^\varepsilon - 1}$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

1.1.2 Successioni divergenti e successioni irregolari

Definizione 1.9: di successione divergente a $+\infty$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **divergente** a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un numero $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n \geq n(M)$$

Definizione 1.10: di successione divergente a $-\infty$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **divergente** a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un numero $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n < -M \quad \text{per ogni } n \geq n(M)$$

Il numero $n(M)$ dipende (in generale) dal valore di M .

- Diremo nei due casi, rispettivamente, che $+\infty$ e $-\infty$ sono i limiti della successione e scriveremo, rispettivamente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

I valori di una successione divergente a $+\infty$ superano, definitivamente, qualunque numero reale fissato. I valori di una successione divergente a $-\infty$ scendono al di sotto, definitivamente, di qualunque numero reale fissato.

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri.

- Se rappresentiamo i numeri reali sulla **retta euclidea**, ogni numero corrisponde a un punto e ogni punto a un numero.
- Con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ conveniamo di indicare due “punti”:

$+\infty$ sta alla *destra* di ogni punto di $\mathbb{R}$

$-\infty$ sta alla *sinistra* di ogni punto di $\mathbb{R}$

a questi due punti non corrisponde però alcun numero.

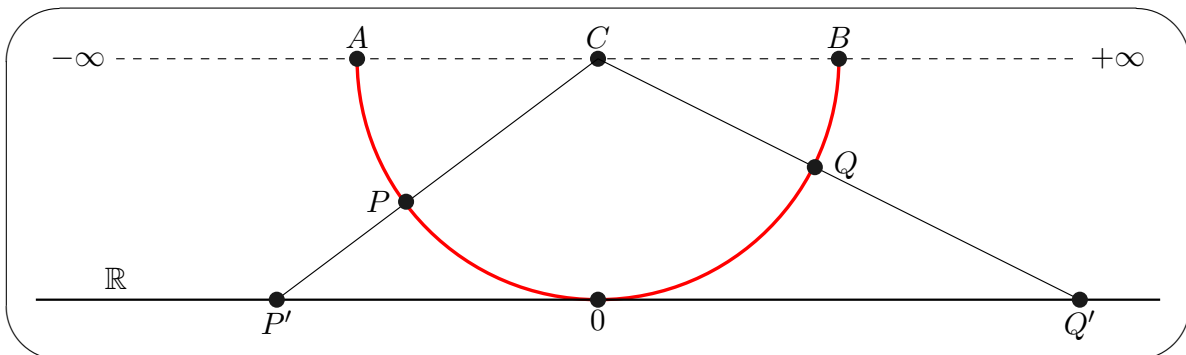
- Sui simboli $+\infty$ e $-\infty$ le operazioni di somma e prodotto con le proprietà indicate in R_1 e R_2 non sono definite, anche se potremo fare “parzialmente” queste operazioni (come vedremo in seguito).

Definizione 1.11: dell'insieme $\mathbb{R}^*$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con l'aggiunta dei due elementi $+\infty$ e $-\infty$ sarà indicato:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

- Possiamo rappresentare “visivamente” l’insieme $\mathbb{R}^*$ mettendo in corrispondenza biunivoca i punti della **retta** con quelli di una **semicirconferenza** (proiettandoli dal centro della semicirconferenza sulla retta $\mathbb{R}$):



- Ai punti A e B non corrisponde su $\mathbb{R}$ alcun punto; diremo che $-\infty$ è il “corrispondente” del punto A e $+\infty$ il “corrispondente” di B .
- L’operazione di limite risulta *completamente significativa* se ambientata in $\mathbb{R}^*$ invece che in $\mathbb{R}$, cioè il limite di una successione può essere un numero reale ℓ oppure $+\infty$ oppure $-\infty$.

Le successioni il cui limite è un numero reale sono **convergenti**, quelle il cui limite è $+\infty$ oppure $-\infty$ sono **divergenti**.

Esempio 1.12: Successioni convergenti e divergenti

- la successione canonica $\{n\}$ è divergente a $+\infty$;
- la successione $\{2^n\}$ è divergente a $+\infty$;
- la successione $\{-2^n\}$ è divergente a $-\infty$;
- la successione $\{2^{\frac{1}{n}}\}$ è convergente a 1.

Osservazione 1.12

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $\alpha > 0$, dobbiamo dimostrare che la successione diverge a $+\infty$. Dobbiamo quindi verificare che per ogni $M > 0$ esiste $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq n(M) \Rightarrow a_n > M$$

La disuguaglianza

$$n^\alpha > M \quad \text{è soddisfatta per } n > M^{\frac{1}{\alpha}}$$

Fissato $M > 0$, quindi basterà scegliere il primo intero

$$n(M) > M^{\frac{1}{\alpha}}$$

per soddisfare la condizione richiesta di divergenza.

Quindi non esiste nessun $M > 0$ tale per cui $n^\alpha \leq M$ con $n \in \mathbb{N}$ e la successione non è limitata. Quindi $n^\alpha \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$.

Se $\alpha < 0$, dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < n^\alpha < \varepsilon$$

La disuguaglianza di sinistra è sempre soddisfatta. La disuguaglianza di destra, dato che $n^\alpha = \frac{1}{n^{|\alpha|}}$, otteniamo

$$\frac{1}{n^{|\alpha|}} < \varepsilon$$

che è soddisfatta se

$$n^{|\alpha|} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ossia per } n > \frac{1}{\varepsilon^{1/|\alpha|}}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^{1/|\alpha|}}$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite. □

- Infine osserviamo che ci sono successioni che non sono né convergenti né divergenti

Definizione 1.13: di successione irregolare o indeterminata

Una successione che non è né convergente né divergente si dice **irregolare** o **indeterminata**.

Esempio 1.13: Successioni irregolari

- la successione $\{(-1)^n\}$ non è né convergente né divergente (ma è limitata)
- la successione $\{(-2)^n\}$ non è né convergente né divergente (e nemmeno limitata).

Dimostrazione. Verifichiamo che la successione $\{(-1)^n\}$ è irregolare, ossia che non è né convergente né divergente.

Non è convergente: lo abbiamo dimostrato nell'osservazione 1.8, dove $\{(-1)^n\}$ è servita come controesempio all'implicazione inversa.

Non è divergente: per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Fissato $M = 1$, per ogni n *dispari* risulta $(-1)^n = -1 < M$, quindi non può essere $(-1)^n \rightarrow +\infty$; per ogni n *pari* risulta $(-1)^n = 1 > -M$, quindi non può essere $(-1)^n \rightarrow -\infty$.

Il limite di $\{(-1)^n\}$ quindi non esiste. $\square$

- Per le successioni **irregolari**, l'operazione di limite non è definita, ovvero il loro **limite non esiste**.

Riassumendo, l'operazione di calcolare il limite consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda: **come si comportano i numeri a_n quando n diventa sempre più grande?**

1.2 Insiemi non limitati e loro estremi superiori/inferiori

- È comodo adottare la convenzione introdotta per i limiti anche per il sup e per l'inf, estendendo la definizione di queste quantità nel modo seguente

Definizione 1.14: di estremo superiore e inferiore sup e inf (insiemi non limitati)

Se un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente (inferiormente) diremo che

$$\sup E = +\infty \quad (\inf E = -\infty)$$

- In questo modo la proprietà R_4 dei numeri reali può essere enunciata così:

$R_4 \rightarrow$ ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è dotato di estremo superiore e inferiore; $\sup E$ ($\inf E$) è un numero se E è limitato superiormente (inferiormente) altrimenti è $+\infty$ ($-\infty$).

1.3 Successioni infinitesime e infinite

Definizione 1.15: di successione infinitesima

Una successione $\{a_n\}$ tendente a zero si dice **infinitesima**

Esempio 1.14: Successioni infinitesime

- la successione $\{\frac{1}{n}\}$ è infinitesima
- la successione $\{\frac{1}{n^2}\}$ è infinitesima

Teorema 1.16: sulle successioni infinitesime

Una successione $\{a_n\}$ è infinitesima se e solo se la successione dei valori assoluti $\{|a_n|\}$ è infinitesima:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo le due implicazioni.

($\Rightarrow$) Se $\{a_n\}$ è infinitesima, allora $a_n \rightarrow 0$ e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\underbrace{|a_n - 0|}_{= |a_n|} < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n(\varepsilon)$$

che è esattamente la condizione $|a_n| \rightarrow 0$.

($\Leftarrow$) Se $|a_n| \rightarrow 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\underbrace{||a_n| - 0|}_{= |a_n| = |a_n - 0|} < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n(\varepsilon)$$

che è esattamente la condizione $a_n \rightarrow 0$, ossia $\{a_n\}$ è infinitesima.

□

- Attenzione: il teorema vale **solo** per il limite 0. Per esempio $(-1)^n$ ha $|(-1)^n| = 1 \rightarrow 1$, ma la successione $\{(-1)^n\}$ non è convergente.
- Il concetto di *infinitesimo* gioca un ruolo centrale ed è fondamentale anche per avere un'immagine intuitiva corretta ed efficace dei concetti del *calcolo infinitesimale*.

“**infinitesimo**” non è un “numero infinitamente piccolo” (concetto privo di senso) ma una **quantità variabile** (successione o, come vedremo, funzione), che **diviene indefinitamente piccola**.

Definizione 1.17: di successione infinita

Una successione $\{a_n\}$ tendente a $\pm\infty$ si dice **infinita**

Esempio 1.15: Successioni infinite

- la successione $\{n^2\}$ è infinita
- la successione $\{n!\}$ è infinita

- Talvolta è possibile precisare se una successione convergente **si avvicina al suo limite per eccesso o per difetto**

Definizione 1.18: di limite per eccesso

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per **eccesso** e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell^+$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$0 \leq a_n - \ell < \varepsilon, \quad \text{definitivamente.}$$

Definizione 1.19: di limite per difetto

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per **difetto** e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell^-$$

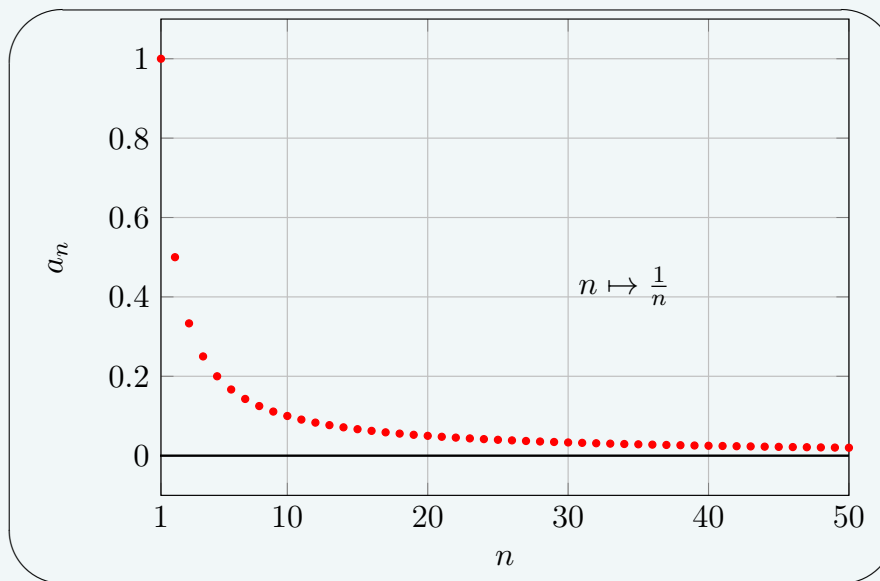
se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$0 \leq \ell - a_n < \varepsilon, \quad \text{definitivamente.}$$

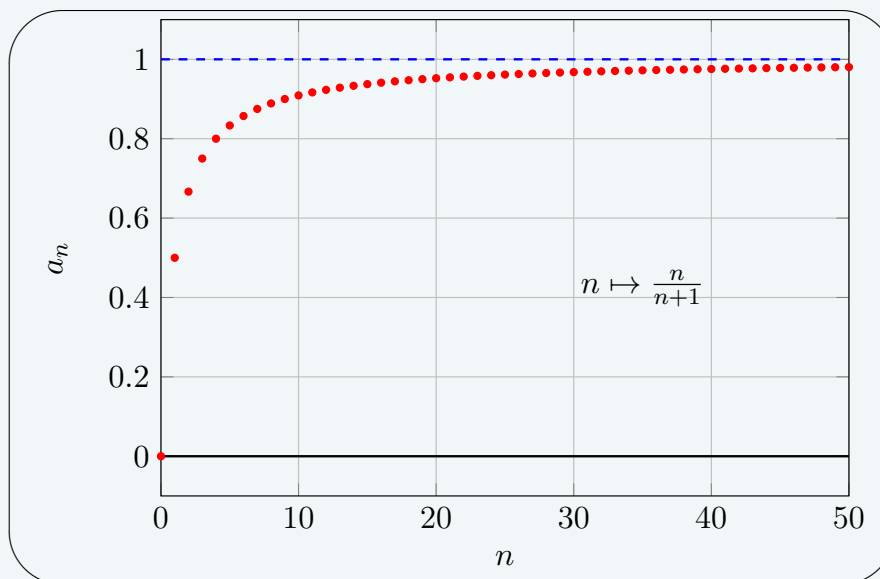
- Dire che $a_n \rightarrow \ell^+$ per $n \rightarrow +\infty$ significa affermare che $a_n \rightarrow \ell$ e inoltre $a_n \geq \ell$ definitivamente; dunque a_n si avvicina ad ℓ *da sopra*, ossia approssima ℓ per eccesso.
- Dire che $a_n \rightarrow \ell^-$ per $n \rightarrow +\infty$ significa affermare che $a_n \rightarrow \ell$ e inoltre $a_n \leq \ell$ definitivamente; dunque a_n si avvicina ad ℓ *da sotto*, ossia approssima ℓ per difetto.

Esempio 1.16: Successione con limite per eccesso

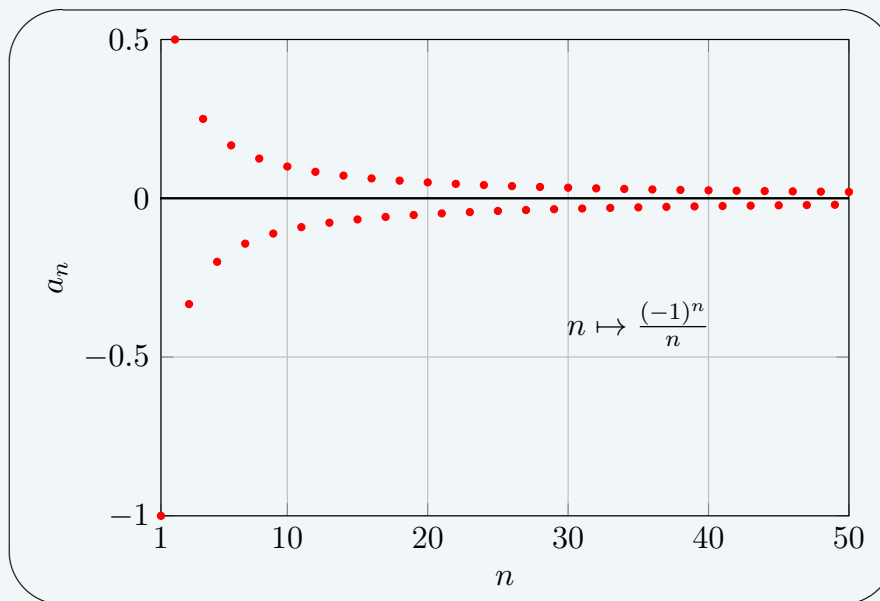
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$$


Esempio 1.17: Successione con limite per difetto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1^- \quad \left(\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$


Esempio 1.18: Successione con limite ma né per difetto né per eccesso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$



In questo caso non si può affermare né che $a_n \rightarrow 0^+$ né $a_n \rightarrow 0^-$ per $n \rightarrow +\infty$.

1.4 Successioni monotone

Definizione 1.20: di successioni monotone

Una successione $\{a_n\}$ si dice **non decrescente** se:

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **crescente** se:

$$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **non crescente** se:

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **decrescente** se:

$$a_n > a_{n+1}, \quad \forall n$$

Una successione è **monotona** se è non decrescente oppure non crescente; è **strettamente monotona** se è crescente oppure decrescente.

Definizione 1.21: di successioni definitivamente monotone

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente non decrescente** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale

che:

$$a_n \leq a_{n+1}, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente crescente** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n < a_{n+1}, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente non crescente** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice **definitivamente decrescente** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n > a_{n+1}, \forall n \geq \tilde{n}$$

Una successione è **definitivamente monotona** se è definitivamente non decrescente oppure definitivamente non crescente; è **definitivamente strettamente monotona** se è definitivamente crescente oppure definitivamente decrescente.

Esempio 1.19: Successioni crescenti e decrescenti

- La successione $\{n^2\}$ è crescente
 - La successione $\{\frac{1}{n}\}$ è decrescente
 - La successione $\{(-1)^n\}$ non è monotona
 - ogni successione costante è monotona (è sia non decrescente sia non crescente), ma non è strettamente monotona
- Riguardo all'operazione di limite, queste successioni hanno una importanza particolare; infatti esse non sono **mai irregolari**, ma sono **convergenti oppure divergenti** a seconda che siano **limitate oppure no**.

Teorema 1.22: di monotonia delle successioni

- Sia $\{a_n\}$ una **successione non decrescente e superiormente limitata**. Allora $\{a_n\}$ è convergente, e il suo limite è uguale a

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- Sia $\{a_n\}$ una **successione non crescente e inferiormente limitata**. Allora $\{a_n\}$ è convergente, e il suo limite è uguale a

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso delle successioni non decrescenti e superiormente limitate.

Poiché la successione è limitata superiormente, l'insieme dei valori assunti dalla successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente.

Per la *proprietà dell'estremo superiore* di cui gode $\mathbb{R}$, esiste quindi l'estremo superiore a valore finito, che denotiamo ℓ :

$$\ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Occorre ora dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$$

e quindi che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{definitivamente.}$$

La seconda disuguaglianza è ovvia. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$a_n \leq \ell \quad (\text{e quindi } a_n < \ell + \varepsilon)$$

dato che ℓ è l'estremo superiore di $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e un maggiorante.

Per definizione di estremo superiore, ℓ è il minimo dei maggioranti dell'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Perciò, essendo

$$\ell - \varepsilon < \ell,$$

certamente $\ell - \varepsilon$ non è un maggiorante dell'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Questo significa che esiste un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ per cui

$$a_{n(\varepsilon)} > \ell - \varepsilon.$$

D'altro canto la successione è non decrescente, perciò per ogni $n \geq n(\varepsilon)$ risulta $a_n \geq a_{n(\varepsilon)}$. Abbiamo quindi provato che

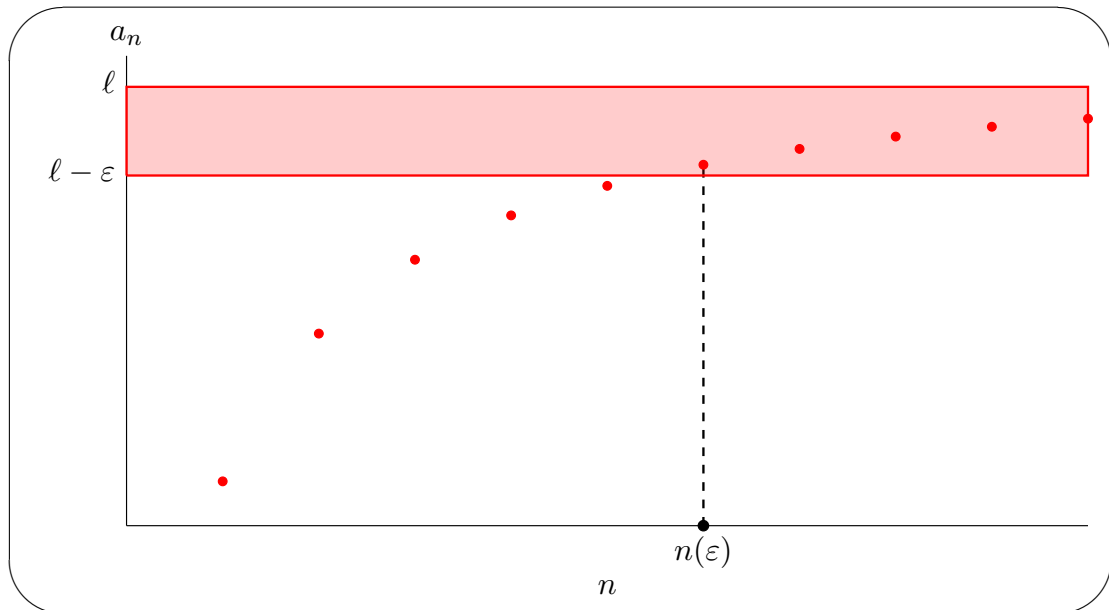
$$a_n \geq a_{n(\varepsilon)} > \ell - \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n(\varepsilon)$$

Abbiamo di conseguenza la tesi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$$

In maniera analoga si dimostra il caso delle successioni non crescenti e inferiormente limitate. □

- L'idea della prova è resa dalla seguente figura:



- Per esprimere anche simbolicamente che il limite è il sup (o l'inf) di una successione non decrescente (o non crescente) si usa la notazione

$$a_n \uparrow \ell \quad \text{oppure} \quad a_n \downarrow \ell$$

Questo in particolare implica che $a_n \rightarrow \ell^-$ (rispettivamente, ℓ^+), ma contiene una ulteriore informazione: la monotonia della successione.

- Questo teorema è una conseguenza dell'assioma di continuità R_4 dei numeri reali e pertanto vale se l'ambiente che consideriamo è $\mathbb{R}$. Ad esempio non è vero che una successione crescente e limitata di numeri razionali ammette sempre limite razionale, cioè in $\mathbb{Q}$.

Esempio 1.20: Successione crescente e limitata di $\mathbb{Q}$

Sia $\{a_n\}$ la successione così definita:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, 1, a_2 = 0, 1011, a_3 = 0, 10110111, a_4 = 0, 1011011101111 \dots$$

Al passo n si aggiunge al numero decimale ottenuto al passo precedente una cifra zero seguita da n cifre uguali a 1. La successione $\{a_n\}$ è evidentemente crescente, e superiormente limitata (ad esempio, $a_n \leq 1$).

- In $\mathbb{R}$ la successione converge al numero $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, che dopo la virgola presenta un allineamento decimale illimitato e non periodico di cifre (una cifra 1, una cifra 0, due cifre 1, una cifra 0, tre cifre 1, una cifra 0, e così via all'infinito)
- Quindi il limite della successione è un numero irrazionale. Quest'esempio mostra che nell'insieme $\mathbb{Q}$ il teorema di monotonia è falso.

- Il teorema di monotonia delle successioni si può completare con il prossimo corollario, che considera successioni limitate o illimitate.

Corollario 1.23: del teorema di monotonia delle successioni

Sia $\{a_n\}$ una successione non decrescente. Allora esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dimostrazione. Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata, l'enunciato è contenuto nel teorema 1.22 di monotonia delle successioni.

Se invece $\{a_n\}$ è superiormente illimitata, questo significa che fissato $M > 0$ esiste un $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n(M)} > M$$

D'altro canto la successione è non decrescente, perciò per ogni $n \geq n(M)$ si ha

$$a_n \geq a_{n(M)} > M$$

Abbiamo quindi provato che per ogni $M > 0$ abbiamo $a_n > M$, definitivamente. Questo significa che $a_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. □

Riassumendo abbiamo:

- se $\{a_n\}$ è superiormente limitata, allora converge (e il suo limite è uguale all'estremo superiore dei suoi valori, che in questo caso è un numero reale)
- se invece $\{a_n\}$ è superiormente illimitata, allora a_n tende a $+\infty$ (che in questo caso è pari all'estremo superiore dei suoi valori).

Una successione monotona, converge o diverge (non può essere irregolare).

1.5 Limiti delle progressioni geometriche

- Consideriamo la **progressione geometrica** di ragione $a \in \mathbb{R}$:

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$$

equivale alla successione $\{a^n\}$:

$$n \mapsto a^n$$

- Se $a > 1$, la successione è crescente e illimitata superiormente.
- Se $a = 1$, la successione è costante.
- Se $0 < a < 1$, la successione è decrescente e tende a zero.
- Se a è negativo, la successione non è monotona.

Osservazione 1.24

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $a = 0$, abbiamo $a^n = 0$ per ogni $n \geq 1$: la successione è definitivamente nulla e quindi $a^n \rightarrow 0$.

Se $0 < |a| < 1$, dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a^n| < \varepsilon$$

Poiché $|a^n| = |a|^n$, si deve verificare che

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a|^n < \varepsilon$$

Passando al logaritmo in base $|a|$, che è *decreciente* dato che $0 < |a| < 1$, la disuguaglianza è soddisfatta se

$$n > \log_{|a|} \varepsilon$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere il primo intero

$$n(\varepsilon) > \log_{|a|} \varepsilon$$

per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

Se $a > 1$, dobbiamo verificare che per ogni $M > 0$ esiste $n(M) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq n(M) \Rightarrow a_n > M$$

La disuguaglianza

$$a^n > M \quad \text{è soddisfatta per } n > \log_a M$$

Fissato $M > 0$, quindi basterà scegliere il primo intero

$$n(M) > \log_a M$$

per soddisfare la condizione richiesta di divergenza. □

Dimostrazione. Se $a \leq -1$, abbiamo $|a| \geq 1$ e quindi

$$a^n = (-1)^n |a|^n \quad \text{con} \quad |a|^n \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

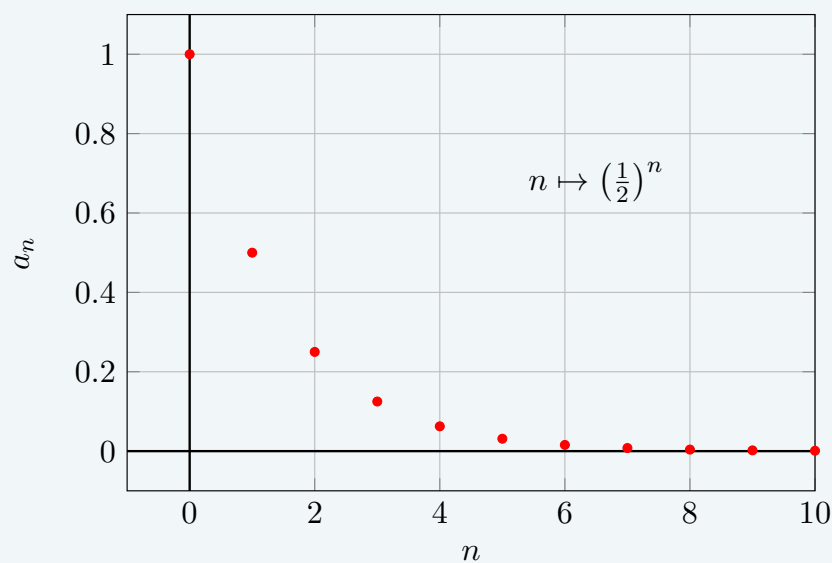
ossia $a^n \geq 1$ per n pari e $a^n \leq -1$ per n dispari. Mostriamo che la successione non è né convergente né divergente, ovvero che è irregolare.

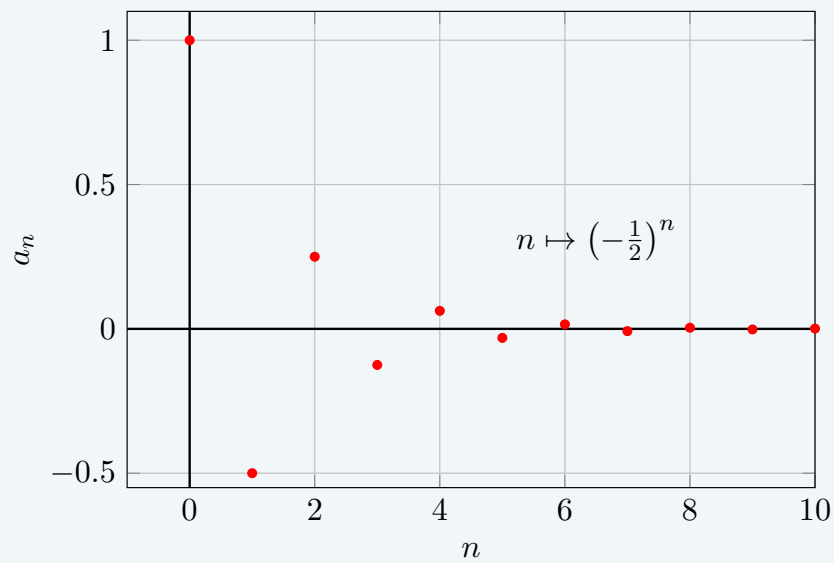
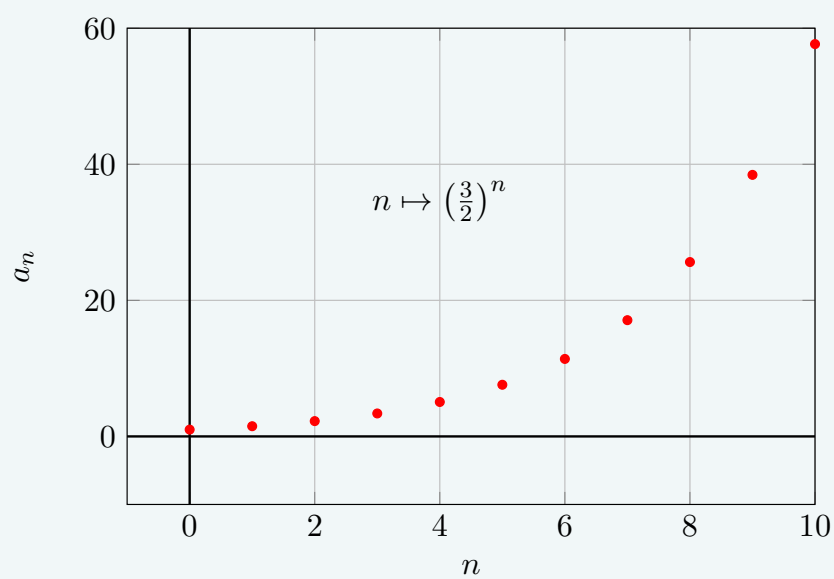
Non è convergente: se per assurdo fosse $a^n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, fissato $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dovremmo avere $|a^n - \ell| < \frac{1}{2}$ definitivamente. Invece, se $\ell \geq 0$, per ogni n *dispari* abbiamo $|a^n - \ell| = |a|^n + \ell \geq 1$, mentre se $\ell < 0$, per ogni n *pari* abbiamo $|a^n - \ell| = |a|^n + |\ell| > 1$. In entrambi i casi la disuguaglianza è violata per infiniti valori di n .

Non è divergente: fissato $M = 1$, per ogni n *dispari* abbiamo $a^n \leq -1 < M$, quindi non può essere $a^n \rightarrow +\infty$; per ogni n *pari* abbiamo $a^n \geq 1 > -M$, quindi non può essere $a^n \rightarrow -\infty$.

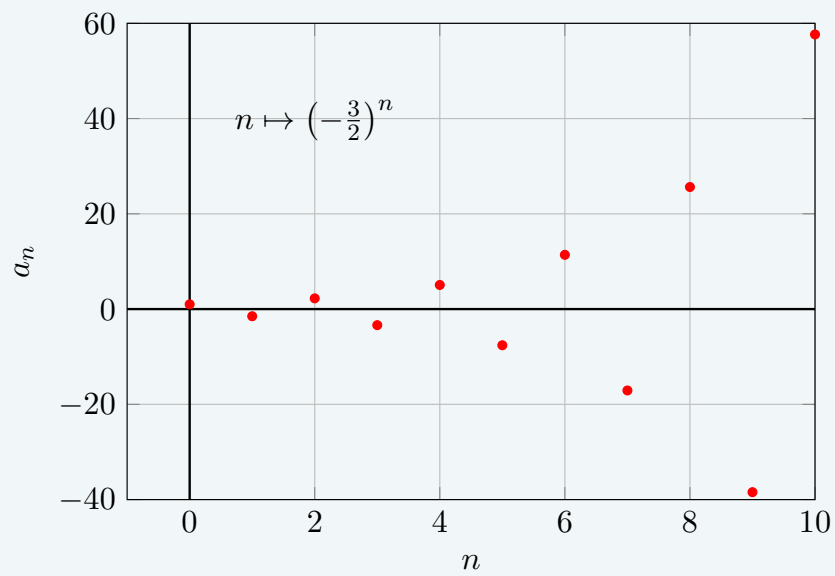
Il limite quindi non esiste. □

Esempio 1.21: Progressione geometrica infinitesima e decrescente



Esempio 1.22: Progressione geometrica infinitesima (ma non monotona)**Esempio 1.23: Progressione geometrica divergente**

Esempio 1.24: Progressione geometrica né convergente né divergente



Calcolo dei limiti delle successioni

2.1 Il calcolo dei limiti delle successioni

- Le dimostrazioni dei **teoremi basilari** sul calcolo limiti si basano sulla **definizione di limite**, sull'**uso di disuguaglianze**, e sull'uso di **proprietà definitivamente vere**.
- In particolare, questi teoremi illustrano la relazione tra l'operazione di limite e le strutture algebriche¹ e le strutture d'ordine² presenti in $\mathbb{R}$.

Scriveremo semplicemente $a_n \rightarrow \ell$ per intendere $a_n \rightarrow \ell$ per $n \rightarrow +\infty$

Proprietà dell'operazione di limite rispetto alle operazioni algebriche.

Teorema 2.1: dell'algebra dei limiti caso dei limiti finiti

Ipotesi:

$$1. \ a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad 2. \ b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R}.$$

Tesi:

$$\begin{aligned}
 1. \ a_n \pm b_n &\rightarrow \ell_a \pm \ell_b & 2. \ \frac{a_n}{b_n} &\rightarrow \frac{\ell_a}{\ell_b} \quad (b_n, \ell_b \neq 0, \text{ definitivamente}) \\
 3. \ a_n b_n &\rightarrow \ell_a \ell_b & 4. \ a_n^{b_n} &\rightarrow \ell_a^{\ell_b} \quad (a_n, \ell_a > 0, \text{ definitivamente}).
 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \ b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \ell_a + \ell_b$$

Consideriamo

$$|(a_n + b_n) - (\ell_a + \ell_b)| = |(a_n - \ell_a) + (b_n - \ell_b)| \leq |a_n - \ell_a| + |b_n - \ell_b| \quad (2.1)$$

per la disuguaglianza triangolare. Poiché per ipotesi $a_n \rightarrow \ell_a$ e $b_n \rightarrow \ell_b$, si ha che

$$|a_n - \ell_a| < \varepsilon_a \quad \text{e} \quad |b_n - \ell_b| < \varepsilon_b \quad (\text{definitivamente})$$

¹Un insieme su cui è definita un'operazione è detto struttura algebrica

²Un insieme è dotato di una struttura d'ordine se su di esso è definita una relazione d'ordine

per ogni $\varepsilon_a > 0$ e $\varepsilon_b > 0$. Maggiorando i termini della parte destra di (2.1) concludiamo che

$$|(a_n + b_n) - (\ell_a + \ell_b)| < \underbrace{2 \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } >0}$$

Per l'arbitrarietà di $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo la tesi. $\square$

Dimostrazione. Dimostriamo che:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow \ell_a - \ell_b$$

Per ogni $\varepsilon_a > 0$ e $\varepsilon_b > 0$, abbiamo:

$$|(a_n - b_n) - (\ell_a - \ell_b)| = |(a_n - \ell_a) + (\ell_b - b_n)| \leq \underbrace{|a_n - \ell_a|}_{< \varepsilon_a} + \underbrace{|\ell_b - b_n|}_{=|b_n - \ell_b| < \varepsilon_b}$$

Quindi

$$|(a_n - b_n) - (\ell_a - \ell_b)| < \underbrace{2 \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } >0}$$

Per l'arbitrarietà di $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo la tesi. $\square$

Dimostrazione. Dimostriamo che:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \ell_a \ell_b$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} |(a_n b_n) - (\ell_a \ell_b)| &= |a_n b_n - a_n \ell_b + a_n \ell_b - \ell_a \ell_b| \\ &= |a_n (b_n - \ell_b) + \ell_b (a_n - \ell_a)| \leq |a_n (b_n - \ell_b)| + |\ell_b (a_n - \ell_a)| \\ &= |a_n| |b_n - \ell_b| + |\ell_b| |a_n - \ell_a| \end{aligned}$$

per la disuguaglianza triangolare e le proprietà del valore assoluto. Quindi

$$|(a_n b_n) - (\ell_a \ell_b)| \leq |a_n| |b_n - \ell_b| + |\ell_b| |a_n - \ell_a| \quad (2.2)$$

Poiché per ipotesi $a_n \rightarrow \ell_a$ e $b_n \rightarrow \ell_b$, si ha che per ogni $\varepsilon_a > 0$ e $\varepsilon_b > 0$ abbiamo

$$|a_n - \ell_a| < \varepsilon_a \quad \text{e} \quad |b_n - \ell_b| < \varepsilon_b \quad (\text{definitivamente}).$$

Inoltre dato che

$$|a_n - \ell_a| \geq |a_n| - |\ell_a| \quad \text{abbiamo} \quad |a_n| < |\ell_a| + \varepsilon_a, \quad \text{definitivamente.}$$

Perciò, maggiorando i termini della parte destra di (2.2), concludiamo che

$$|(a_n b_n) - (\ell_a \ell_b)| < (|\ell_a| + \varepsilon_a) \varepsilon_b + |\ell_b| \varepsilon_a = \underbrace{|\ell_a| \varepsilon_b + |\ell_b| \varepsilon_a + \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } >0}$$

Per l'arbitrarietà di $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo la tesi. $\square$

- L'operazione di limite mantiene inoltre l'ordinamento

Teorema 2.2: di permanenza del segno 1^a forma

Ipotesi:

$$1. \ a_n \rightarrow \ell_a \quad 2. \ \ell_a \leq 0.$$

Tesi:

$$a_n \leq 0, \text{ definitivamente.}$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso con $\ell_a > 0$. Per definizione di limite abbiamo che

$$|a_n - \ell_a| < \varepsilon, \text{ definitivamente,}$$

per ogni $\varepsilon > 0$, che riscriviamo nella forma:

$$\ell_a - \varepsilon < a_n < \ell_a + \varepsilon, \text{ definitivamente.}$$

Poiché $\ell_a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_a - \varepsilon > 0$, allora la disuguaglianza

$$0 < \ell_a - \varepsilon < a_n$$

mostra che $a_n > 0$, definitivamente.

In modo analogo si dimostra il caso con $\ell_a < 0$. □

Teorema 2.3: di permanenza del segno (forma generalizzata)

Ipotesi:

$$1. \ a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad 2. \ \lambda \in \mathbb{R} \quad 3. \ \ell_a > \lambda.$$

Tesi:

$$a_n > \lambda, \text{ definitivamente.}$$

Dimostrazione. Poiché $\ell_a > \lambda$, il numero $\varepsilon = \ell_a - \lambda$ è strettamente positivo. Applicando la definizione di limite proprio con questo valore di ε , abbiamo, definitivamente:

$$\underbrace{\ell_a - (\ell_a - \lambda)}_{=\lambda} < a_n < \ell_a + (\ell_a - \lambda)$$

e quindi $a_n > \lambda$, definitivamente. □

- In modo analogo si dimostra che, se $a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}$ e $\ell_a < \lambda$, allora $a_n < \lambda$ definitivamente: basta scegliere $\varepsilon = \lambda - \ell_a > 0$ e ottenere, definitivamente,

$$\ell_a - (\lambda - \ell_a) < a_n < \underbrace{\ell_a + (\lambda - \ell_a)}_{=\lambda}$$

- Con $\lambda = 0$ si ritrova il teorema di permanenza del segno 1^a forma.
- Possiamo ora dimostrare il caso del **quoziente** nel teorema 2.1 dell'algebra dei limiti.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che:

$$b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R}, \ell_b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{\ell_b}$$

Il caso del quoziente segue poi dal caso del prodotto, già dimostrato, applicato alle successioni $\{a_n\}$ e $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \rightarrow \ell_a \frac{1}{\ell_b} = \frac{\ell_a}{\ell_b}$$

Supponiamo $\ell_b > 0$ (se $\ell_b < 0$ si ragiona allo stesso modo sulla successione $\{-b_n\}$). Per il teorema di permanenza del segno (forma generalizzata), applicato con $\lambda = \frac{\ell_b}{2} < \ell_b$, abbiamo

$$b_n > \frac{\ell_b}{2} > 0, \quad \text{definitivamente}$$

in particolare $b_n \neq 0$ definitivamente e il quoziente $\frac{1}{b_n}$ è ben definito. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $|b_n - \ell_b| < \varepsilon$ definitivamente, e quindi, definitivamente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_b} \right| &= \left| \frac{\ell_b - b_n}{b_n \ell_b} \right| = \frac{|b_n - \ell_b|}{|b_n| |\ell_b|} \\ &< \frac{2}{\ell_b |\ell_b|} |b_n - \ell_b| < \underbrace{\frac{2}{\ell_b^2} \varepsilon}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } > 0} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $|b_n| > \frac{\ell_b}{2}$. Per l'arbitrarietà di $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo la tesi. $\square$

Teorema 2.4: di permanenza del segno 2^a forma (parte I)

Ipotesi:

$$1. \quad a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad 2. \quad a_n \geq 0, \quad \text{definitivamente.}$$

Tesi:

$$\ell_a \geq 0.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema precedente. Infatti, se per assurdo fosse $\ell_a < 0$, dal teorema precedente si avrebbe $a_n < 0$ definitivamente, il che è incompatibile con l'ipotesi che sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Questo caso non può accadere ovvero si verifica il contrario, la tesi del teorema. $\square$

Teorema 2.5: di permanenza del segno 2^a forma (parte II)*Ipotesi:*

$$1. \quad a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad 2. \quad b_n \rightarrow \ell_b \in \mathbb{R} \quad 3. \quad a_n \geq b_n, \text{ definitivamente.}$$

Tesi:

$$\ell_a \geq \ell_b.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione $a_n - b_n$, abbiamo per il Teorema dell'Algebra dei limiti

$$a_n - b_n \rightarrow \ell_a - \ell_b.$$

Dato che per ipotesi

$$a_n \geq b_n \quad \text{e quindi} \quad a_n - b_n \geq 0,$$

per il teorema permanenza del segno 2^a forma (parte I) applicato alla successione $a_n - b_n$ abbiamo

$$\ell_a - \ell_b \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad \ell_a \geq \ell_b.$$

□

- Questo teorema ci dice che in una disuguaglianza tra due successioni si può passare al limite ad ambo i membri, mantenendo il “ $\leq$ ” o il “ $\geq$ ”.
- Si noti che in generale, invece, nel passaggio al limite non si conservano le disuguaglianze strette “ $<$ ” e “ $>$ ”.

Esempio 2.1: Passaggio al limite con disuguaglianze strette

Ad esempio, anche se gli a_n sono strettamente positivi, il loro limite ℓ_a è positivo o nullo come mostra il semplice esempio di $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Teorema 2.6: del confronto*Ipotesi:*

$$1. \quad a_n \rightarrow \ell, c_n \rightarrow \ell \quad \text{e} \quad \ell \in \mathbb{R}, \quad 2. \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \text{ definitivamente.}$$

Tesi:

$$b_n \rightarrow \ell.$$

Dimostrazione. Per definizione di limite abbiamo, definitivamente, che

$$\ell - \varepsilon_a < a_n < \ell + \varepsilon_a \quad \text{e} \quad \ell - \varepsilon_c < c_n < \ell + \varepsilon_c$$

per ogni $\varepsilon_a > 0$ e $\varepsilon_c > 0$. Quindi:

$$\ell - \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\} < a_n < \ell + \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\} \quad \text{e} \quad \ell - \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\} < c_n < \ell + \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\}$$

Dalle ipotesi del teorema abbiamo quindi, definitivamente, che

$$\ell - \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\} < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\}$$

Ma allora, definitivamente, abbiamo

$$\underbrace{\ell - \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\}}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } >0} < b_n < \ell + \underbrace{\max\{\varepsilon_a, \varepsilon_c\}}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } >0}.$$

Per l'arbitrarietà di $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo la tesi. □

Teorema 2.7: del confronto per successioni divergenti

Ipotesi:

$$1. \ a_n \rightarrow +\infty, \quad 2. \ a_n \leq b_n, \text{ definitivamente.}$$

Tesi:

$$b_n \rightarrow +\infty.$$

Dimostrazione. Poiché $a_n \rightarrow +\infty$, per ogni $M > 0$ si ha, definitivamente,

$$a_n > M$$

Per ipotesi si ha inoltre $a_n \leq b_n$, definitivamente. Le due proprietà valgono entrambe definitivamente, quindi, definitivamente, abbiamo

$$b_n \geq a_n > M$$

Per l'arbitrarietà di $M > 0$ concludiamo che $b_n \rightarrow +\infty$. □

- In modo analogo si dimostra che, se $a_n \rightarrow -\infty$ e $a_n \geq b_n$ definitivamente, allora $b_n \rightarrow -\infty$.
- Casi particolari del teorema del confronto che si usano frequentemente sono espressi dai prossimi corollari, molto utili quando si studia il prodotto tra una successione oscillante (ma limitata) e una che tende a zero

Corollario 2.8: del teorema del confronto (parte I)

Ipotesi:

$$1. \ c_n \rightarrow 0 \quad 2. \ |b_n| \leq c_n, \text{ definitivamente.}$$

Tesi:

$$b_n \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. Sappiamo che definitivamente abbiamo $-c_n \leq b_n \leq c_n$. Ovviamente

$$\text{se } c_n \rightarrow 0 \text{ allora } -c_n \rightarrow 0.$$

Quindi per il teorema del confronto (con $a_n = -c_n$ e $\ell = 0$) si ha che $b_n \rightarrow 0$. $\square$

Corollario 2.9: del teorema del confronto (parte II)

Ipotesi:

1. $c_n \rightarrow 0$ 2. $\{b_n\}$ è limitata (ma non necessariamente convergente).

Tesi:

$$c_n b_n \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. Se $\{b_n\}$ è limitata, ossia $|b_n| \leq M$ per un certo $M > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi scrivere

$$|b_n c_n| \leq M |c_n|.$$

Poiché

$$c_n \rightarrow 0 \text{ anche } M |c_n| \rightarrow 0,$$

per il corollario 2.8 si conclude che $b_n c_n \rightarrow 0$. $\square$

Il prodotto di una successione infinitesima e una limitata è infinitesimo.

Esempio 2.2: Applicazione del corollario

Consideriamo la successione di un rapporto di due espressioni ognuna costituita dalla somma di potenze di n , come ad esempio:

$$n \mapsto \frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2}$$

Mettendo in evidenza a numeratore come a denominatore la potenza maggiore si ottiene:

$$\frac{n^{5/2} \left(1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}}{1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}}$$

Ora per il teorema 2.1 sull'algebra dei limiti e sapendo che potenze negative di n tendono a zero possiamo affermare che:

$$1 - \underbrace{\frac{3}{n^{3/2}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{7}{n^{5/2}}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 1, \quad 1 + \underbrace{\frac{1}{n^{5/2}}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{3}{n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}}{1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}} \right) \rightarrow 1$$

quindi l'ultima successione è convergente e di conseguenza limitata. Ora per il corollario 2.9 e dato che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{abbiamo} \quad \frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2} \rightarrow 0$$

Esempio 2.3: Applicazione del corollario

La successione

$$n \mapsto \frac{\sin n}{n}$$

è il prodotto di due successioni

$$n \mapsto \frac{1}{n} \quad (\text{convergente, infinitesima}) \quad \text{e} \quad n \mapsto \sin n \quad (\text{irregolare}),$$

quindi il teorema 2.1 sull'algebra dei limiti non è applicabile (il secondo limite non esiste).

- Tuttavia è applicabile il corollario 2.9. La successione $\{\frac{1}{n}\}$ è infinitesima e, dato che $|\sin n| \leq 1$, la successione $\{\sin n\}$ è limitata, perciò abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

- I teoremi sull'algebra dei limiti visti fin qui operano su coppie di successioni entrambe convergenti o comunque limitate.

Successioni con limiti $+\infty$ e $-\infty$

- Supponiamo per esempio, che

$$a_n \rightarrow \ell_a \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow +\infty$$

allora è facile (e intuitivo) vedere che

$$a_n + b_n \rightarrow +\infty$$

Abbrevieremo questa scrittura così:

$$\ell_a + \infty = +\infty$$

- Ragionando in maniera analoga possiamo compendiare le regole per il limite della somma (o differenza) di due successioni delle quali una o entrambe sono divergenti.

Regole di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito

Teorema 2.10: di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito (addizione)

Ipotesi:

$$1. a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad 2. b_n \rightarrow +\infty \quad 3. c_n \rightarrow +\infty.$$

Tesi:

$$\begin{aligned} 1. a_n + b_n &\rightarrow \ell_a + \infty = +\infty & 2. a_n - b_n &\rightarrow \ell_a - \infty = -\infty \\ 3. b_n + c_n &\rightarrow +\infty + \infty = +\infty & 4. -b_n - c_n &\rightarrow -\infty - \infty = -\infty. \end{aligned}$$

Teorema 2.11: di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito (prodotto)

Ipotesi:

$$1. a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R} \quad 2. b_n \rightarrow 0^+ \text{ oppure } b_n \rightarrow 0^- \quad 3. c_n \rightarrow \infty.$$

Tesi:

$$1. a_n c_n \rightarrow \ell_a \infty = \infty \quad (\ell_a \neq 0) \quad 2. \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\ell_a}{0} = \infty \quad (\ell_a \neq 0) \quad 3. \frac{a_n}{c_n} \rightarrow \frac{\ell_a}{\infty} = 0.$$

- il **segno** di ∞ va determinato con la **usuale regola dei segni**;
- nella tesi **2.** si intende, come di consueto, $b_n \neq 0$ definitivamente, così che il quoziente sia ben definito;
- l'ipotesi **2.**, ovvero che $\{b_n\}$ tenda a zero *per eccesso* o *per difetto* (e quindi che sia definitivamente di segno costante), è **necessaria**: con $a_n = 1$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ abbiamo

$$\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n n$$

che è una successione irregolare (non tende né a $+\infty$ né a $-\infty$).

Esempio 2.4: Regola dei segni

Abbiamo:

- se $a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \ell_a > 0$ e $b_n \rightarrow 0^+$ allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$
- se $a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \ell_a < 0$ e $b_n \rightarrow 0^-$ allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$
- se $a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \ell_a > 0$ e $b_n \rightarrow 0^-$ allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow -\infty$
- se $a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \ell_a < 0$ e $b_n \rightarrow 0^+$ allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow -\infty$

È quindi necessario, per applicare le regole di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito, determinare se b_n tenda a zero per eccesso o per difetto.

Dimostrazione. Dimostriamo che:

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \quad c_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, poiché $a_n \rightarrow \ell_a$, definitivamente, si ha

$$\underbrace{|a_n - \ell_a|}_{\geq |a_n| - |\ell_a|} < \varepsilon \quad \text{quindi} \quad |a_n| < |\ell_a| + \varepsilon.$$

Inoltre, poiché $c_n \rightarrow +\infty$, definitivamente, si ha

$$c_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ne segue che, definitivamente, si ha

$$\frac{|a_n|}{|c_n|} < \frac{|\ell_a| + \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{e quindi} \quad \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < \varepsilon (|\ell_a| + \varepsilon) = \underbrace{|\ell_a| \varepsilon + \varepsilon^2}_{=\tilde{\varepsilon} \text{ e } > 0}$$

Per l'arbitrarietà di $\tilde{\varepsilon}$, abbiamo la tesi. □

Le quattro operazioni mancanti:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

si chiamano **forme di indecisione**, poiché nessuna regola può essere stabilita a priori per determinarne il risultato.

Esempio 2.5: Risoluzione di forme di indecisione $+\infty - \infty$

Consideriamo la successione

$$n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Abbiamo la differenza di due successioni:

$$n \mapsto \sqrt{n+1} \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$$

$$n \mapsto \sqrt{n-1} \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n-1} = +\infty$$

Quindi ricadiamo nella forma di indecisione $+\infty - \infty$.

Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ otteniamo

$$\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

Ricordando che $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ora considerando la successione al denominatore abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = +\infty + \infty = +\infty$$

Usando la regola

$$a_n \rightarrow \ell_a \in \mathbb{R}, \quad c_n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

del teorema di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito (prodotto), abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

- Limiti di successioni che si presentano nella forma:

$$\{a_n^{b_n}\}$$

si possono trattare considerando la successione dei loro logaritmi, prendendo per semplicità la base e .

Data una successione $\{a_n^{b_n}\}$, abbiamo che:

$$\text{se } b_n \log a_n \rightarrow \ell \text{ allora } a_n^{b_n} \rightarrow e^\ell \quad (2.3)$$

$$\text{se } b_n \log a_n \rightarrow +\infty \text{ allora } a_n^{b_n} \rightarrow +\infty \quad (2.4)$$

$$\text{se } b_n \log a_n \rightarrow 0 \text{ allora } a_n^{b_n} \rightarrow 1 \quad (2.5)$$

$$\text{se } b_n \log a_n \rightarrow -\infty \text{ allora } a_n^{b_n} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Se la successione $\{b_n \log a_n\}$ è indeterminata allora anche $\{a_n^{b_n}\}$ è indeterminata.

Esempio 2.6: Calcolo dei limiti col passaggio al logaritmo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n)^{(-3n^2+7)}$$

passando ai logaritmi abbiamo

$$\underbrace{(-3n^2+7)}_{b_n} \log \underbrace{3n}_{a_n}$$

dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2+7) \log(3n) = -\infty \cdot +\infty = -\infty$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n)^{(-3n^2+7)} = 0$$

Esempio 2.7: Calcolo dei limiti col passaggio al logaritmo (metodo alternativo)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n)^{(-3n^2+7)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log((3n)^{(-3n^2+7)})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(-3n^2+7) \log(3n)}$$

dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2 + 7) \log(3n) = -\infty \cdot +\infty = -\infty$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n)^{(-3n^2+7)} = e^{-\infty} = 0$$

Abbiamo anche le seguenti **forme di indecisione**:

$$1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Passando al logaritmo corrispondono alla forma di indecisione

$$0 \cdot \infty$$

dato che:

$$\log(1^\infty) = \infty \log 1 = \infty \cdot 0$$

$$\log(0^0) = 0 \log 0 = 0 \cdot -\infty$$

$$\log(+\infty^0) = 0 \log(+\infty) = 0 \cdot +\infty$$

Nelle potenze $\{a_n^{b_n}\}$ la base è sempre (definitivamente) positiva, perciò nella forma ∞^0 alla base compare $+\infty$.

I limiti nella forma

$$0^{+\infty} \text{ e } 0^{-\infty}$$

non sono forme di indecisione. Abbiamo:

$$0^{+\infty} = 0 \text{ e } 0^{-\infty} = +\infty.$$

dato che passando al logaritmo abbiamo

$$\log(0^{+\infty}) = +\infty \cdot \log 0 = +\infty \cdot -\infty = -\infty \quad \text{e} \quad e^{-\infty} = 0$$

$$\log(0^{-\infty}) = -\infty \cdot \log 0 = -\infty \cdot -\infty = +\infty \quad \text{e} \quad e^{+\infty} = +\infty$$

Esempio 2.8: Limiti nelle forme $0^{+\infty}$ e $0^{-\infty}$

- Esempio del caso $0^{+\infty} = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n} = 0^{+\infty} = 0.$$

Infatti abbiamo

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\log n} = e^{\log\left(\frac{1}{n}\right)^{\log n}} = e^{\log n \log \frac{1}{n}}$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\overbrace{\log n}^{\rightarrow +\infty} \overbrace{\log \frac{1}{n}}^{\rightarrow -\infty}} = e^{-\infty} = 0.$$

- Esempio del caso $0^{-\infty} = +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\log n} = 0^{-\infty} = +\infty.$$

Infatti abbiamo

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{-\log n} = e^{\log\left(\frac{1}{n}\right)^{-\log n}} = e^{-\log n \log \frac{1}{n}}$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\overbrace{-\log n}^{\rightarrow -\infty} \overbrace{\log \frac{1}{n}}^{\rightarrow -\infty}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Il numero di Nepero

3.1 Il numero e di Nepero

Teorema 3.1

La successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{con } n \geq 1$$

è convergente.

Dimostrazione. Proveremo che la successione $\{a_n\}$ è non decrescente ($a_n \geq a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) e limitata ($m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$); quindi è convergente per il teorema di monotonia delle successioni. La dimostrazione è divisa in tre parti: (1) la monotonia di $\{a_n\}$ e la sua limitatezza inferiore; (2) la monotonia e la limitatezza superiore di una successione ausiliaria $\{b_n\}$; (3) la sintesi dei due risultati.

Parte (1). Per provare che $\{a_n\}$ è non decrescente, studiamo per $n \geq 2$, il rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \geq \frac{1 - n \cdot \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

dove per il “ $\geq$ ” si è applicata la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{con } x = -\frac{1}{n^2} \geq -1 \text{ e } n \geq 2$$

Quindi abbiamo

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$$

ossia $a_n \geq a_{n-1}$ e la successione è non decrescente.

Per provare che $\{a_n\}$ è limitata *inferiormente*, osserviamo che, essendo $a_1 = 2$ e la successione non decrescente, segue $a_n \geq 2, \forall n \geq 1$. $\square$

Dimostrazione. Parte (2). Consideriamo la successione ausiliaria

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{con } n \geq 1$$

Per provare che $\{b_n\}$ è decrescente, studiamo per $n \geq 2$, il rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\ &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right)} \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &< \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \end{aligned}$$

dove per il “ $\leq$ ” si è applicata la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{con } x = \frac{1}{n^2-1} \geq -1 \quad \text{e } n \geq 2$$

e per il “ $<$ ” si è applicata la disuguaglianza

$$\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n} \quad \text{dato che } n^2 > n^2-1 \quad \text{per } n \geq 2$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1 \quad \text{quindi } b_n < b_{n-1}$$

e la successione $\{b_n\}$ è decrescente.

Poiché $b_1 = 4$ e la successione è decrescente, risulta quindi

$$b_n \leq b_1 = 4, \quad \forall n \geq 1$$

ossia $\{b_n\}$ è limitata superiormente. $\square$

Dimostrazione. Parte (3). Le due successioni sono legate da

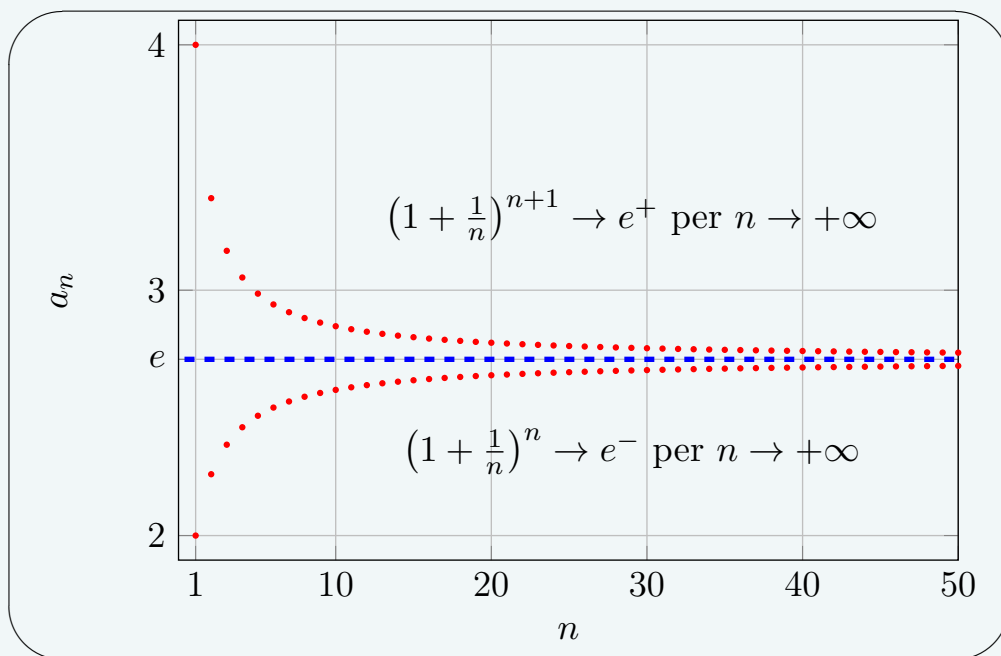
$$b_n = a_n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1, \forall n \geq 1} \text{ perciò } b_n > a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

e di conseguenza

$$2 \leq a_n < b_n \leq 4, \forall n \geq 1$$

La successione $\{a_n\}$ è quindi non decrescente e limitata e, per il teorema di monotonia delle successioni, è convergente. □

Esempio 3.1: Grafici delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$



- Il limite della successione a_n appena studiata è un numero **irrazionale** molto importante in matematica. Questo limite viene indicato con la lettera e (**numero di Nepero**) e la sua rappresentazione decimale inizia così:

$$2.7182818284 \dots$$

Per definizione, abbiamo:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3.1)$$

- Questo numero viene molto spesso usato come base dei logaritmi, i quali, quando si usa questa base, vengono detti naturali o neperiani (dal nome del matematico **John Napier**) e indicati semplicemente col simbolo $\log$ (oppure $\ln$) senza indicazione della base.

- Abbiamo di conseguenza:

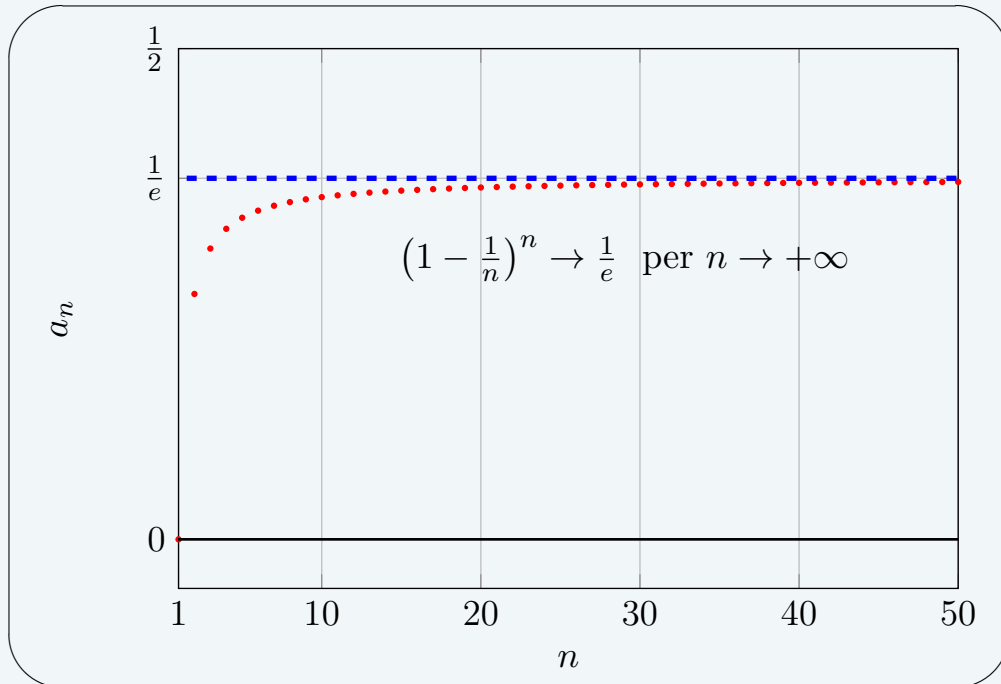
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \log e = 1$$

Esempio 3.2: Calcolo dei limiti con la successione che tende a e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$$

Dato che:

$$\left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = \frac{1}{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)}_{\rightarrow 1}}$$


Teorema 3.2

Sia $\{c_n\}$ una qualsiasi successione divergente ($a + \infty$ o $-\infty$), allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{c_n} \right)^{c_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{c_n} \right)^{c_n} = \frac{1}{e} \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, dato $x \in \mathbb{R}$, la sua parte intera, denotata con $\lfloor x \rfloor$, è il più grande intero che non supera x .

Se $c_n \rightarrow +\infty$, poiché $\lfloor c_n \rfloor > c_n - 1$, per confronto si ha anche $\lfloor c_n \rfloor \rightarrow +\infty$. Quindi, per la (3.1) e per la definizione di limite abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor c_n \rfloor + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor}\right)^{\lfloor c_n \rfloor} = e$$

Usando:

$$\lfloor c_n \rfloor \leq c_n < \lfloor c_n \rfloor + 1$$

si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} < \left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor}\right)^{\lfloor c_n \rfloor + 1} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor}\right)^{\lfloor c_n \rfloor}}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor}\right)}_{\rightarrow 1}$$

e anche

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} > \left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor c_n \rfloor} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor c_n \rfloor + 1}}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lfloor c_n \rfloor + 1}\right)^{-1}}_{\rightarrow 1}$$

quindi il primo limite del teorema segue dal teorema del confronto.

Se invece $c_n \rightarrow -\infty$, allora la successione $d_n = -c_n \rightarrow +\infty$, e si ha

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = \left(1 - \frac{1}{d_n}\right)^{-d_n} = \left(\frac{d_n}{d_n - 1}\right)^{d_n} = \left(1 + \frac{1}{d_n - 1}\right)^{d_n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{d_n - 1}\right)$$

Poiché $d_n - 1 \rightarrow +\infty$, la tesi segue dal caso precedente.

Il secondo limite del teorema si dimostra in maniera analoga.

□

Questo teorema è utile nel calcolo di limiti che coinvolgono la forma di indecisione 1^∞

Esempio 3.3: Calcolo dei limiti con la successione che tende a e

Calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1} = [1^\infty]$$

dato che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{3+n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n+1 = +\infty$$

Riscriviamo la successione come segue:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{3+n} \right)^{5n+1} &= \left(\frac{3+n}{n} \right)^{-(5n+1)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{n} \right)^{5n+1}} \\ &= \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{3}{n} \right)^{\frac{n}{3}} \right)^{\frac{3(5n+1)}{n}}} = \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}} \right)^{\frac{n}{3}} \right)^{\frac{3(5n+1)}{n}}} \end{aligned}$$

e consideriamo il denominatore

$$\underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}} \right)^{\frac{n}{3}} \right)}_{\rightarrow e}^{\frac{3(5n+1)}{n}} \rightarrow e^{15} \quad \text{dato che} \quad \frac{n}{3} \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Riassumendo quindi abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{3+n} \right)^{5n+1} = \frac{1}{e^{15}}$$

Metodo alternativo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{3+n} \right)^{5n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{3+n} \right)^{5n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\frac{3+n}{3}} \right)^{\frac{3+n}{3}}}_{\rightarrow \frac{1}{e}} \right)^{\frac{3(5n+1)}{3+n}} = \frac{1}{e^{15}} \end{aligned}$$

dato che

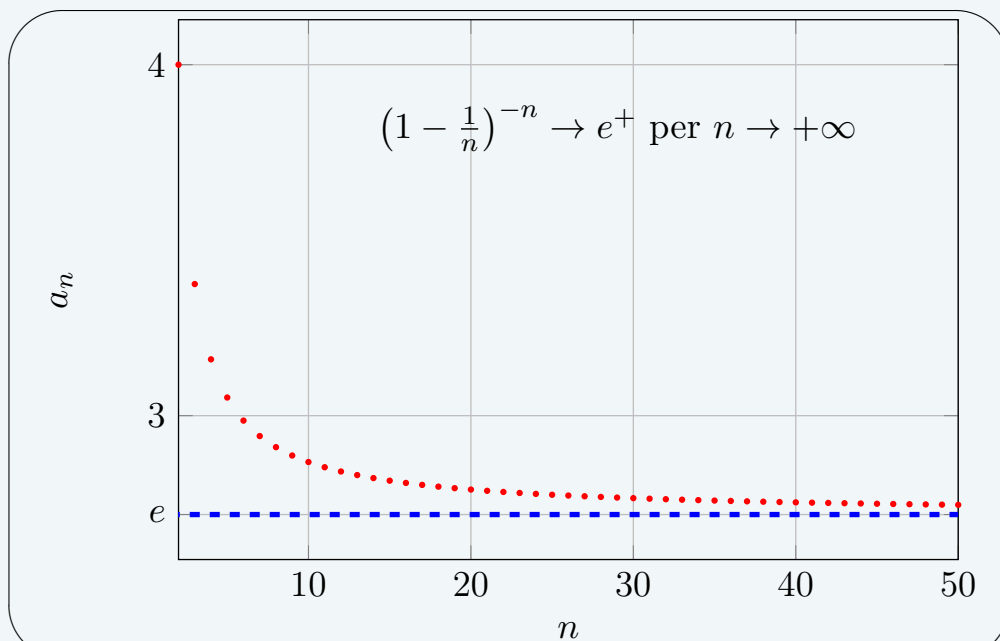
$$\frac{3+n}{3} \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Esempio 3.4: Calcolo dei limiti con la successione che tende a e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Dato che:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}_{\rightarrow 1}$$

**Esempio 3.5: Calcolo dei limiti con la successione che tende a e**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha = 0$ il risultato è immediato, dato che la successione è costante:

$$\left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1^n = 1 = e^0$$

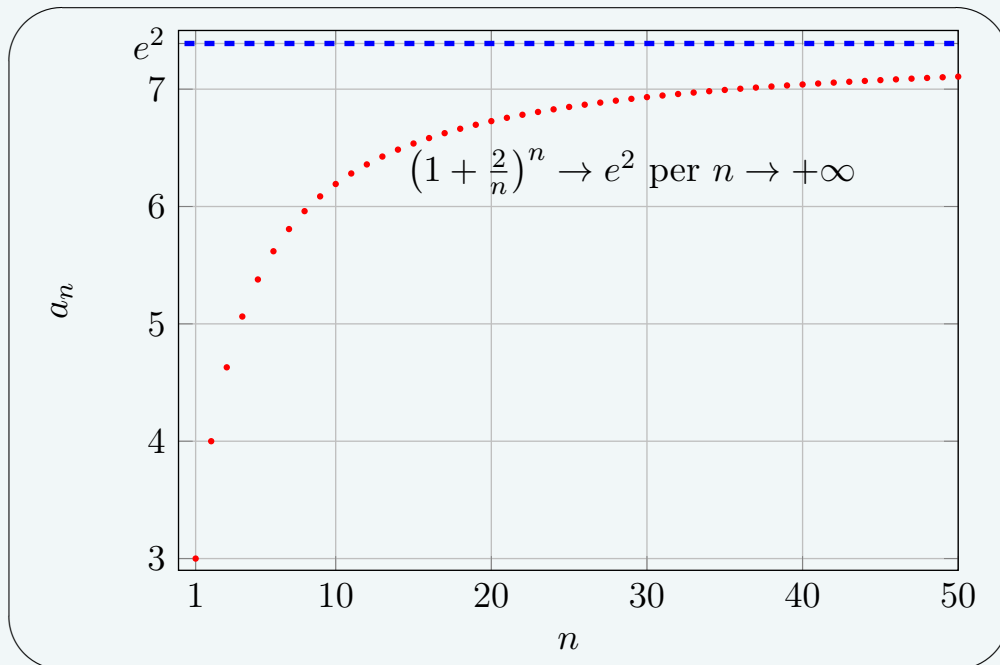
Se invece $\alpha \neq 0$ (così che si possa dividere per α), abbiamo:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{\alpha}}}_{\rightarrow e}\right)^\alpha$$

dove si è usato il teorema precedente con $c_n = \frac{n}{\alpha}$, successione divergente a $+\infty$ se $\alpha > 0$ e a $-\infty$ se $\alpha < 0$.

Ad esempio con $\alpha = 2$ abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$



3.2 Il numero di Nepero in finanza

- Supponiamo di possedere un capitale di valore unitario e un tasso d'interesse annuale t . Se l'interesse viene pagato annualmente, dopo un anno il capitale posseduto sarà

$$1 + t \cdot 1 = 1 + t$$

- Se invece l'interesse viene pagato mensilmente avremo

– dopo il primo mese, un capitale pari a

$$1 + \frac{t}{12} \cdot 1 = \underbrace{1 + \frac{t}{12}}_{\alpha}$$

– dopo il secondo mese, un capitale pari a

$$\underbrace{1 + \frac{t}{12}}_{\alpha} + \frac{t}{12} \underbrace{\left(1 + \frac{t}{12}\right)}_{\alpha} = \underbrace{\left(1 + \frac{t}{12}\right)^2}_{\beta}$$

– dopo il terzo mese, un capitale pari a

$$\underbrace{\left(1 + \frac{t}{12}\right)^2}_{\beta} + \frac{t}{12} \underbrace{\left(1 + \frac{t}{12}\right)^2}_{\beta} = \left(1 + \frac{t}{12}\right)^3$$

- alla fine dell'anno avremo un capitale pari a

$$\left(1 + \frac{t}{12}\right)^{12}$$

- Se l'interesse viene calcolato ogni n -esimo di anno, avremo alla fine un capitale pari a

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

- Per $t = 1$ (rendita del 100%) otteniamo esattamente la successione che definisce e

Quindi anche se gli interessi vengono pagati un numero infinito di volte all'anno, il capitale non cresce all'infinito ma tende a e , dato che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Confronti e stime asintotiche

4.1 Confronti e stime asintotiche

- Abbiamo visto che una successione che tende a 0 è un **infinitesimo**; una successione che diverge (a $+\infty$, a $-\infty$) si dice **infinito**.
- Quando due successioni sono entrambe infinitesimi o entrambe infiniti è utile poter stabilire un confronto tra di esse, per capire quale delle due tenda “**più rapidamente**” a 0 o all’infinito.

Esempio 4.1: Infiniti

Esempi di infiniti sono le successioni seguenti:

$$\{\log n\}, \quad \{\sqrt{n}\}, \quad \{n^2\}, \quad \{2^n\}$$

Esempio 4.2: Infinitesimi

Esempi di infinitesimi sono le successioni seguenti:

$$\left\{\frac{1}{\log n}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

- Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ **due infiniti**, considerando il limite del loro rapporto abbiamo 4 casi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{caso 1) : } \{a_n\} \text{ è un infinito di } \mathbf{ordine inferiore} \text{ a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R}, l \neq 0 & \text{caso 2) : } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono infiniti dello } \mathbf{stesso ordine} \\ \pm\infty & \text{caso 3) : } \{a_n\} \text{ è un infinito di } \mathbf{ordine superiore} \text{ a } \{b_n\} \\ \text{inesistente} & \text{caso 4) : } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

- Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ **due infinitesimi** (e b_n è definitivamente diverso da zero), considerando il limite del loro rapporto abbiamo 4 casi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{caso 1) : } \{a_n\} \text{ è un infinitesimo di } \mathbf{ordine\ superiore} \\ & \text{a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R}, l \neq 0 & \text{caso 2) : } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono infinitesimi} \\ & \text{dello } \mathbf{stesso\ ordine} \\ \pm\infty & \text{caso 3) : } \{a_n\} \text{ è un infinitesimo di } \mathbf{ordine\ inferiore} \\ & \text{a } \{b_n\} \\ \text{inesistente} & \text{caso 4) : } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

- Il caso

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

è particolarmente importante: si usa dire, in tal caso, che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono **asintotiche**.

- Per indicare questa circostanza, si scrive

$$a_n \sim b_n$$

(si legge: a_n è asintotico a b_n)

- Il simbolo di asintotico è molto utile nel calcolo dei limiti per le seguenti **proprietà**:

Proposizione 4.1: del comportamento asintotico

1. Se $a_n \sim b_n$, le due successioni hanno lo stesso comportamento:

- o convergono allo stesso limite,
- o divergono entrambe a $\pm\infty$,
- o entrambe non hanno limite.

2. Si possono scrivere catene di relazioni asintotiche, cioè:

$$\text{se } a_n \sim b_n \sim \dots \sim c_n \quad \text{allora} \quad a_n \sim c_n$$

3. Un'espressione composta da prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore:

$$\text{se } a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n, c_n \sim c'_n \quad \text{allora} \quad \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

- **Attenzione:** lo stesso non vale per le somme o per l'esponenziale.

Dimostrazione. 1. Dimostriamo la prima affermazione

se $a_n \sim b_n$ allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso comportamento

- Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, poiché

$$b_n = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n \text{ e } \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 1 \quad (\text{per definizione di asintotico}),$$

allora per il teorema sull'algebra dei limiti abbiamo

$$b_n \rightarrow 1 \cdot l = l.$$

- Con gli stessi passaggi, il teorema di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito permette di concludere che

$$\text{se } a_n \rightarrow \pm\infty \text{ e } a_n \sim b_n \text{ allora } b_n \rightarrow \pm\infty.$$

Osservando che la relazione di asintotico è simmetrica, quindi quanto appena provato mostra anche che se $\{b_n\}$ converge (diverge), anche $\{a_n\}$ converge (diverge).

- Ne concludiamo che se $\{a_n\}$ è irregolare, anche $\{b_n\}$ è irregolare, perché se per assurdo non lo fosse, per quanto appena dimostrato anche $\{a_n\}$ sarebbe convergente o divergente.

2. Proviamo la transitività della relazione di asintotico:

$$\text{se } a_n \sim b_n \sim c_n \text{ allora } a_n \sim c_n.$$

Le ipotesi significano che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \text{ e } \frac{b_n}{c_n} \rightarrow 1$$

Allora per il teorema sull'algebra dei limiti abbiamo

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \rightarrow 1.$$

3. Analogamente si prova la terza proprietà.

□

Esempio 4.3: Successioni asintotiche applicando la definizione

Dimostriamo che:

$$\log n \sim \log(n+1)$$

Fattorizzando n nella seconda successione otteniamo

$$\log(n+1) = \log\left(n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\log n + \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 0}} = 1$$

- Un tipico modo per mostrare che

$$a_n \sim b_n$$

consiste nello scrivere

$$a_n = b_n c_n \quad \text{con} \quad c_n \rightarrow 1.$$

Ovvero decomporre $\{a_n\}$ nel prodotto di una successione $\{b_n\}$ e una successione $\{c_n\}$ che tende a 1.

Esempio 4.4: Successioni asintotiche col metodo della decomposizione

Esempio:

$$\underbrace{2n^2 + 3n + 1}_{a_n} = \underbrace{2n^2}_{b_n} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}_{c_n} \sim 2n^2 \quad \text{quindi} \quad a_n \sim b_n$$

poiché

$$\underbrace{\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}_{c_n} \rightarrow 1$$

Esempio 4.5: Calcolo dei limiti con stime asintotiche

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 4n + 1}{5(n+1)^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad (\text{forma indeterminata})$$

Procedendo come prima possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \underbrace{2n^3 + 4n + 1}_{a_n} &= \underbrace{2n^3}_{a'_n} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{2n^3}\right)}_{\rightarrow 1} \sim 2n^3 \\ 5(n+1)^3 &= \underbrace{5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}_{c_n} = \underbrace{5n^3}_{c'_n} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}_{\rightarrow 1} \sim 5n^3 \end{aligned}$$

Usando il punto 3 della proposizione (4.1) del comportamento asintotico possiamo scrivere:

$$\text{se } a_n \sim a'_n, c_n \sim c'_n \quad \text{allora} \quad \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{a'_n}{c'_n}$$

e ottenere

$$\frac{2n^3 + 4n + 1}{5(n+1)^3} \sim \frac{2n^3}{5n^3}$$

ovvero le due successioni hanno lo stesso comportamento. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 4n + 1}{5(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{5n^3} = \frac{2}{5}$$

- Un altro modo per mostrare che

$$a_n \sim b_n$$

è usare il **principio di sostituzione**.

- Per il logaritmo il principio di sostituzione si enuncia così: se

$$a_n \sim b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \quad \text{allora} \quad \log a_n \sim \log b_n$$

- Infatti, dato che $a_n \sim b_n$, abbiamo $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ e quindi $\log \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \log 1 = 0$. Possiamo allora scrivere:

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log \left(b_n \frac{a_n}{b_n} \right)}{\log b_n} = \frac{\log b_n + \log \frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} = 1 + \frac{\overbrace{\log \frac{a_n}{b_n}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\log b_n}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow 1$$

- **Attenzione:** non basta che due successioni divergano entrambe a $+\infty$ perché siano asintotiche. Per esempio $\log n$ e $\log e^n = n$ divergono entrambe a $+\infty$, ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \neq 1$$

quindi $\log n$ e $\log e^n$ non sono asintotiche.

Esempio 4.6: Calcolo dei limiti col principio di sostituzione e stime asintotiche

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_3(n^2 + 4n + 1)$$

usando il principio di sostituzione e le stime asintotiche. Col metodo della decomposizione abbiamo

$$\underbrace{n^2 + 4n + 1}_{a_n} = \underbrace{n^2}_{b_n} \underbrace{\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}_{\rightarrow 1} \sim n^2 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

allora, per il principio di sostituzione,

$$\log_3(n^2 + 4n + 1) \sim \log_3(n^2) = 2 \log_3 n$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_3(n^2 + 4n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \log_3 n = +\infty$$

Il fatto che la relazione di asintotico soddisfi le 3 proprietà:

1. *Riflessiva*: $a_n \sim a_n$
2. *Simmetrica*: se $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$
3. *Transitiva*: se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$

fa sì che “**asintotico**” sia una **relazione di equivalenza**.

Gerarchie degli infiniti e criterio del rapporto

5.1 Gerarchie degli infiniti delle successioni parte 1 e parte 2

Teorema 5.1: della gerarchia degli infiniti (parte I)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \quad (5.1)$$

per ogni $a > 1$ e $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Iniziamo a stabilire un'utile disuguaglianza tra un qualsiasi numero reale positivo e il suo logaritmo.

Per $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, sia k la parte intera di x ossia l'intero k per cui abbiamo

$$k \leq x < k + 1, \text{ abbiamo inoltre } 2^x \geq 2^k = (1 + 1)^k \geq 1 + k > x,$$

la prima disuguaglianza segue dalla monotonia della funzione esponenziale, la seconda dallo sviluppo del binomio di Newton (o dalla disuguaglianza di Bernoulli). Passando ai logaritmi in base $a > 1$, otteniamo

$$\log_a x < x \log_a 2 \quad (\text{per ogni } x \in \mathbb{R}, x > 0).$$

Applichiamo ora questa disuguaglianza al numero $x = n^{\alpha/2}$, abbiamo

$$\frac{\alpha}{2} \log_a n < n^{\alpha/2} \log_a 2 \quad \text{e} \quad \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2,$$

quindi

$$\frac{\log_a n}{n^\alpha} = \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} \frac{1}{n^{\alpha/2}} \leq \underbrace{\frac{2}{\alpha} \log_a 2}_{\text{costante}} \frac{1}{n^{\alpha/2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n^{\alpha/2}} \rightarrow 0.$$

Per il corollario del teorema del confronto, segue la tesi. □

Teorema 5.2: della gerarchia degli infiniti (parte II)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad (5.2)$$

per ogni $a > 1$ e $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Usiamo il teorema della gerarchia degli infiniti (parte I) sostituendo all'intero n l'intero 2^n :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(2^n)}{(2^n)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \overbrace{\log_a 2}^{\text{costante}}}{(2^\alpha)^n} \quad \text{quindi} \quad \frac{n}{(2^\alpha)^n} \rightarrow 0.$$

Se ora $a > 1$ è fissato, scegliendo $\alpha > 0$ in modo che sia $2^\alpha = a$ otteniamo che $\frac{n}{a^n} \rightarrow 0$, ovvero la seconda relazione nel caso particolare in cui n sia elevato ad esponente 1. Il caso generale segue dall'identità:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}} \right)^\alpha = \left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \right)^\alpha$$

Infatti per il risultato precedente $\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \rightarrow 0$ (la base $a^{1/\alpha}$ è ancora un numero > 1), quindi segue

$$\left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \right)^\alpha \rightarrow 0 \quad \text{e da questo la tesi.} \quad \square$$

- Questi limiti descrivono la “velocità” con cui i logaritmi (con base > 1), le potenze (con esponente > 0), gli esponenziali (con base > 1) vanno all'infinito. I logaritmi a base > 1 vanno più lentamente di qualsiasi potenza con esponente > 0 , le potenze con esponente > 0 vanno più lentamente di qualsiasi esponenziale a base > 1 .
- Gli esponenziali a base > 1 sono infiniti di ordine superiore alle potenze con esponente > 0 e ai logaritmi a base > 1 . Le potenze con esponente > 0 sono infiniti di ordine superiore ai logaritmi a base > 1 .

Esempio 5.1: Calcolo dei limiti usando la gerarchia degli infiniti

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = [\infty^0] \quad (\text{forma indeterminata})$$

Ora scriviamo

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\log n^{1/n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$$

e studiando la successione all'esponente

$$a_n = \frac{\log n}{n} \quad \text{abbiamo} \quad a_n \rightarrow 0$$

grazie al teorema della gerarchia degli infiniti. Quindi abbiamo :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = 1$$

Esempio 5.2: Calcolo dei limiti usando la gerarchia degli infiniti

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n}{2^{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad (\text{forma indeterminata})$$

Possiamo scrivere:

$$\underbrace{2^n + n}_{a_n} = \underbrace{2^n}_{a'_n} \underbrace{\left(1 + \frac{n}{2^n}\right)}_{\rightarrow 1} \sim 2^n$$

dato che grazie al teorema della gerarchia degli infiniti abbiamo

$$\frac{n}{2^n} \rightarrow 0,$$

2^n è un infinito di ordine superiore rispetto ad n . Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{2^n + n}{2^{n+1}} \sim \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

Ora dato che

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

5.2 Teorema del criterio del rapporto

Teorema 5.3: del criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}$ una successione positiva (cioè $a_n > 0$ per ogni n).

$$\text{Se esiste } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \text{ e } \begin{cases} l < 1, & \text{allora } a_n \rightarrow 0 \\ l > 1 \text{ (o } l = +\infty), & \text{allora } a_n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Il teorema precedente riconduce lo studio del limite di una successione positiva $\{a_n\}$ al calcolo del limite di un'altra successione, la successione (dei rapporti)

$$n \mapsto \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In certi casi quest'ultima è più semplice da studiare di quella di partenza, come vedremo negli esempi.

Si osservi che nel caso $l = 1$ il teorema non permette di concludere nulla.

Dimostrazione.

1. Supponiamo che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < 1$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha per $n \geq n(\varepsilon)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Possiamo allora scrivere la catena di disuguaglianze:

$$a_{n(\varepsilon)+1} < (l + \varepsilon) a_{n(\varepsilon)}, \quad a_{n(\varepsilon)+2} < (l + \varepsilon) \underbrace{a_{n(\varepsilon)+1}}_{< (l+\varepsilon) a_{n(\varepsilon)}} < (l + \varepsilon)^2 a_{n(\varepsilon)}, \quad \dots$$

quindi

$$a_{n(\varepsilon)+k} < (l + \varepsilon)^k a_{n(\varepsilon)}$$

Scegliendo ε abbastanza piccolo da avere $l + \varepsilon < 1$, si ha

$$(l + \varepsilon)^k \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

D'altro canto $n(\varepsilon)$ è fissato e di conseguenza anche $a_{n(\varepsilon)}$ è fissato; dunque per k abbastanza grande il secondo membro (e quindi il primo) è piccolo quanto si vuole. Questo dimostra la prima tesi, ovvero: $a_n \rightarrow 0$.

2. Supponiamo che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha per $n \geq n(\varepsilon)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon$$

Scegliamo ε abbastanza piccolo da avere $l - \varepsilon > 1$, con passaggi simili a prima possiamo scrivere

$$a_{n(\varepsilon)+k} > (l - \varepsilon)^k a_{n(\varepsilon)} \quad \text{e} \quad (l - \varepsilon)^k \rightarrow +\infty \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

D'altro canto $n(\varepsilon)$ è fissato e di conseguenza anche $a_{n(\varepsilon)}$ è fissato; dunque per k abbastanza grande il secondo membro (e quindi il primo) è grande quanto si vuole. Questo dimostra la seconda tesi, ovvero: $a_n \rightarrow +\infty$.

□

Esempio 5.3: Utilizzo del teorema del criterio del rapporto

Proviamo a calcolare, col criterio del rapporto, il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad (\text{forma indeterminata})$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\log n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\log(n+1)}{\log n}$$

abbiamo

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0} \quad \text{quindi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

abbiamo inoltre

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} \sim \frac{\log n}{\log n} = 1 \quad \text{quindi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$$

Dove $\log(n+1) \sim \log(n)$ per il principio di sostituzione, dato che $n+1 \sim n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Ora usando il teorema sull'algebra dei limiti, abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \cdot 1 = 1$$

quindi il teorema (5.3) del criterio del rapporto non permette, in questo caso, di concludere nulla.

5.3 Gerarchie degli infiniti delle successioni parte 3 e parte 4

Teorema 5.4: della gerarchia degli infiniti (parte III)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (5.3)$$

per ogni $a > 0$.

- quindi gli esponenziali con base > 0 vanno più lentamente del fattoriale

Dimostrazione. Applichiamo il criterio del rapporto alla successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad \text{si ha} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \quad \text{e} \quad \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$$

Utilizzando il teorema del criterio del rapporto, si ottiene la tesi. $\square$

Teorema 5.5: della gerarchia degli infiniti (parte IV)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (5.4)$$

- quindi il fattoriale va più lentamente di n^n

Dimostrazione. Applichiamo il criterio del rapporto alla successione

$$b_n = \frac{n!}{n^n}$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

e avendo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

allora

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Utilizzando il teorema del criterio del rapporto, si ottiene la tesi. □

Successioni definite per ricorrenza

6.1 Successioni definite per ricorrenza

- Cominciamo con il seguente problema:

La banca ci presta a_0 euro, con una spesa di gestione di b euro l'anno, al tasso di interesse fisso r annuo ($r \in (0, 1)$). Quanto dovremo restituire dopo n anni?

- Dopo un anno, la cifra da restituire sarà

$$a_1 = a_0 + r a_0 + b = (1 + r) a_0 + b$$

dopo due anni

$$a_2 = a_1 + r a_1 + b = (1 + r) a_1 + b$$

dopo tre anni

$$a_3 = a_2 + r a_2 + b = (1 + r) a_2 + b$$

e così via... Ogni anno la cifra viene calcolata utilizzando la cifra dell'anno precedente. Abbiamo quindi la successione:

$$\underbrace{a_0}_{\text{valore assegnato}}, \quad \underbrace{a_{n+1} = (1 + r) a_n + b}_{\text{relazione ricorsiva}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Questo è un caso molto semplice di **successione definita per ricorrenza**, in cui ogni termine è definito a partire dal precedente (o dai precedenti).

- In questo caso è facile convincersi che la successione possa essere riscritta in **forma chiusa** (cioè esplicita).

Dopo un anno:

$$a_1 = (1 + r) a_0 + b$$

dopo due anni:

$$\begin{aligned} a_2 &= (1 + r) a_1 + b = (1 + r) ((1 + r) a_0 + b) + b \\ &= (1 + r)^2 a_0 + b (1 + (1 + r)) \end{aligned}$$

dopo tre anni:

$$\begin{aligned} a_3 &= (1+r) a_2 + b = (1+r) \left((1+r)^2 a_0 + b (1 + (1+r)) \right) + b \\ &= (1+r)^3 a_0 + b (1 + (1+r) + (1+r)^2) \end{aligned}$$

e così via ... quindi

$$a_n = s^n a_0 + b (1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1}), \quad \text{dove } s = (1+r) > 1$$

Possiamo quindi calcolarci facilmente il limite come segue:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s^n a_0 + b (1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1}) = +\infty$$

Tuttavia, non è sempre possibile esplicitare una successione data in forma iterativa. In tal caso, resta il **problema di capirne il comportamento e il limite**.

Esempio 6.1: Comportamento di una successione definita per ricorrenza

Fissato $b > 0$, determiniamo il comportamento della successione definita da

$$a_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Tutti i termini della successione sono positivi, quindi il denominatore della frazione che compare nella definizione non si annulla mai.

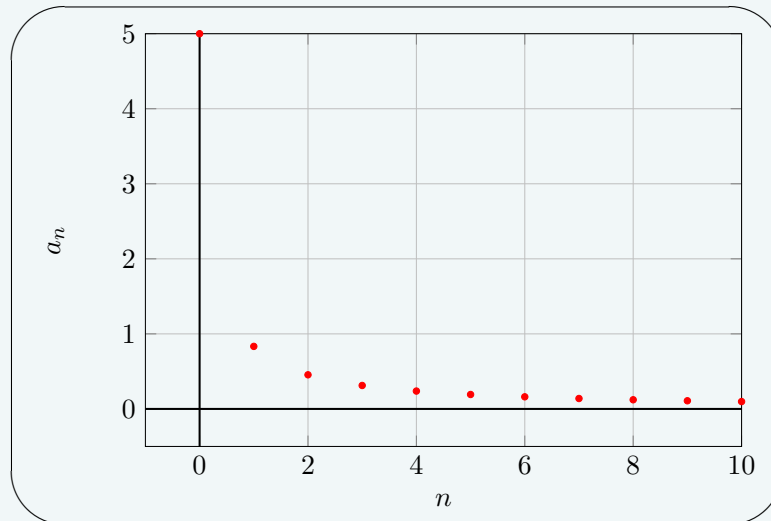
Per verificarlo si procede per induzione:

$$a_0 = b > 0, \quad \text{e se } a_n > 0 \quad \text{allora } a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} > 0 \quad (\text{quoziente di due numeri positivi})$$

Di conseguenza tutti i termini della successione, dopo quello di partenza, sono minori di 1, visto che $a_n < 1 + a_n$.

Ad esempio con $b = 5$, abbiamo:

$$a_0 = 5, \quad a_1 = \frac{5}{6}, \quad a_2 = \frac{\frac{5}{6}}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{5}{11}, \quad a_3 = \frac{\frac{5}{11}}{1 + \frac{5}{11}} = \frac{5}{16} \dots$$



Esempio 6.2: Comportamento di una successione definita per ricorrenza

Cerchiamo di capire se la successione sia o meno monotona. Sappiamo che $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, allora la disuguaglianza $a_n \leq a_{n+1}$ diventa

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq \frac{a_n}{1 + a_n} \iff 1 + a_n \leq 1 \iff a_n \leq 0$$

che sappiamo essere falsa; quindi vale la disuguaglianza opposta, ovvero la successione è decrescente ($a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).

Essendo anche limitata inferiormente (da zero), a_n converge a un limite finito non negativo che chiamiamo $\ell \geq 0$.

Passiamo al limite nella relazione ricorsiva.

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}}_{=\ell} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}}_{=\frac{\ell}{1+\ell}} \quad \text{quindi} \quad \ell = \frac{\ell}{1 + \ell} \quad \text{e di conseguenza} \quad \ell = 0$$

dato che

$$\ell - \frac{\ell}{1 + \ell} = 0, \quad \frac{\ell(1 + \ell) - \ell}{1 + \ell} = 0, \quad \frac{\ell^2}{1 + \ell} = 0 \iff \ell = 0$$

Esempio 6.3: Formula chiusa della ricorrenza

Fissato $b > 0$, cerchiamo la formula chiusa della successione:

$$a_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

Con $n = 1$, abbiamo

$$a_1 = \frac{a_0}{1 + a_0}$$

Con $n = 2$, abbiamo

$$a_2 = \frac{a_1}{1 + a_1} = \frac{\frac{a_0}{1+a_0}}{1 + \frac{a_0}{1+a_0}} = \frac{\frac{a_0}{1+a_0}}{\frac{1+a_0+a_0}{1+a_0}} = \frac{a_0}{1+a_0} \frac{1+a_0}{1+2a_0} = \frac{a_0}{1+2a_0}$$

Con $n = 3$, abbiamo

$$a_3 = \frac{a_2}{1 + a_2} = \frac{\frac{a_0}{1+2a_0}}{1 + \frac{a_0}{1+2a_0}} = \frac{\frac{a_0}{1+2a_0}}{\frac{1+2a_0+a_0}{1+2a_0}} = \frac{a_0}{1+2a_0} \frac{1+2a_0}{1+3a_0} = \frac{a_0}{1+3a_0}$$

e così via ... quindi

$$a_n = \frac{a_0}{1 + n a_0} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad \text{e abbiamo} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{1 + n a_0} = 0$$

Il precedente esempio illustra una buona strategia in due passi per studiare il comportamento di successioni definite per ricorrenza:

1. si cerca di capire se la successione soddisfi qualche proprietà di monotonia;
2. in tal caso si esaminano i possibili limiti, tenendo conto della relazione ricorsiva.

6.2 L'algoritmo di Erone

- Fissati $b > 0$ e $c > 0$, studiamo la seguente successione definita per ricorrenza:

$$a_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

È evidente che la successione è costituita da numeri positivi. Per verificarlo si procede per induzione:

$$a_0 = b > 0, \quad \text{e se } a_n > 0 \quad \text{allora} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n^2 + c}{a_n} \right) > 0$$

dato che abbiamo il quoziente di due numeri positivi.

Cerchiamo di capire se la successione sia o meno monotona. Sappiamo che $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, la disuguaglianza $a_{n+1} < a_n$ diventa

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) < a_n \iff c < a_n^2 \iff a_n > \sqrt{c}$$

dato che

$$\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) < a_n, \quad \frac{a_n^2 + c}{a_n} < 2 a_n, \quad a_n^2 + c < 2 a_n^2, \quad c < a_n^2$$

quindi la successione è decrescente se e solo se:

$$a_n > \sqrt{c}$$

Si tratta ora di capire se questa condizione sia o meno vera. Si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) > \sqrt{c} \iff (a_n - \sqrt{c})^2 > 0 \iff a_n \neq \sqrt{c}$$

dato che

$$\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) - \sqrt{c} > 0, \quad \frac{a_n^2 + c}{2 a_n} - \sqrt{c} > 0, \quad \frac{a_n^2 + c - 2 a_n \sqrt{c}}{2 a_n} > 0, \quad \frac{(a_n - \sqrt{c})^2}{2 a_n} > 0$$

quindi $a_n > \sqrt{c}$ per ogni $n \geq 1$ se $\underbrace{b}_{=a_0} \neq \sqrt{c}$, mentre, se $b = \sqrt{c}$, la relazione ricorsiva dà

$a_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) = \sqrt{c}$ e, per induzione, $a_n = \sqrt{c}$ per ogni $n \geq 1$. In ogni caso abbiamo quindi

$$a_n \geq \sqrt{c}, \quad \forall b > 0 \text{ e } n \geq 1$$

1. Se $b > \sqrt{c}$ la successione è decrescente ed è **limitata inferiormente** da $\sqrt{c}$, dato che $a_0 = b > \sqrt{c}$ e $a_n > \sqrt{c}$ per ogni $n \geq 1$. Per il teorema di monotonia delle successioni essa ammette quindi limite finito

$$\ell = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \sqrt{c} > 0$$

in particolare $\ell > 0$ e possiamo dividere per ℓ .

Per identificarlo, passiamo al limite nella relazione ricorsiva, ottenendo

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}}_{=\ell} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right)}_{=\frac{1}{2}(\ell + \frac{c}{\ell})}$$

$$\text{quindi } \ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{c}{\ell} \right) \text{ e di conseguenza } \ell = \sqrt{c}$$

dato che

$$\ell - \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{c}{\ell} \right) = 0, \quad \ell - \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2 + c}{\ell} \right) = 0, \quad \left(\frac{2\ell^2 - \ell^2 - c}{2\ell} \right) = 0, \quad \left(\frac{\ell^2 - c}{2\ell} \right) = 0$$

ossia $\ell^2 = c$ e, essendo $\ell > 0$, otteniamo $\ell = \sqrt{c}$ (e non $\ell = -\sqrt{c}$).

Pertanto, se $b > \sqrt{c}$, tutta la successione converge decrescendo a $\sqrt{c}$.

2. Se invece $0 < b < \sqrt{c}$, allora per quanto visto prima si avrà $a_1 > \sqrt{c}$, e da quel momento la successione comincerà a decrescere, tendendo di nuovo a $\sqrt{c}$.

3. Infine, se $b = \sqrt{c}$, la successione resta costante, dato che

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{c}\sqrt{c} + c}{\sqrt{c}} = \frac{1}{2} \frac{2c}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \sqrt{c}$$

e tutti gli altri termini a_n , con $n > 1$, di conseguenza avranno lo stesso valore $\sqrt{c}$.

• Inoltre $\forall b > 0$ e $n \geq 1$ abbiamo:

$$\frac{c}{a_n} \leq \sqrt{c} \quad \text{dato che} \quad a_n \geq \sqrt{c}, \quad c = \sqrt{c} \cdot \underbrace{\sqrt{c}}_{\leq a_n} \quad \text{e} \quad c \leq \sqrt{c} \cdot a_n$$

Riassumendo, $\forall b > 0$ e $n \geq 1$ abbiamo:

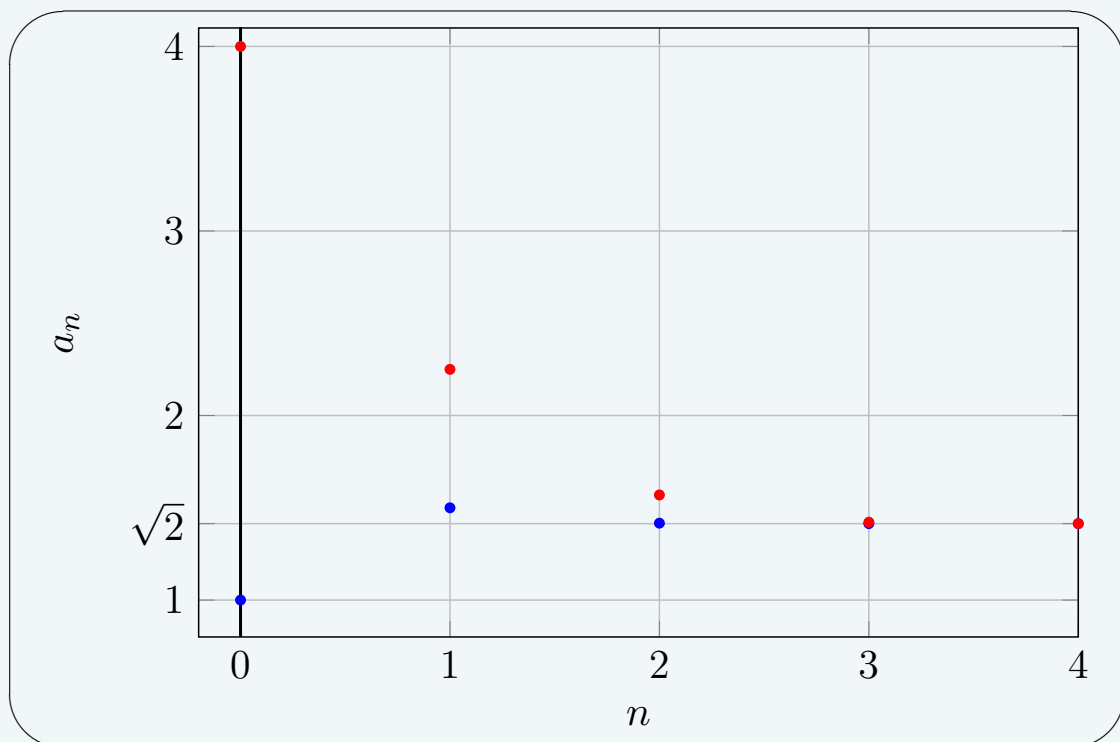
$$\frac{c}{a_n} \leq \sqrt{c} \leq a_n, \quad a_n \rightarrow \sqrt{c} \quad \text{e anche} \quad \frac{c}{a_n} \rightarrow \sqrt{c} \quad \text{dato che} \quad c = \sqrt{c}\sqrt{c}$$

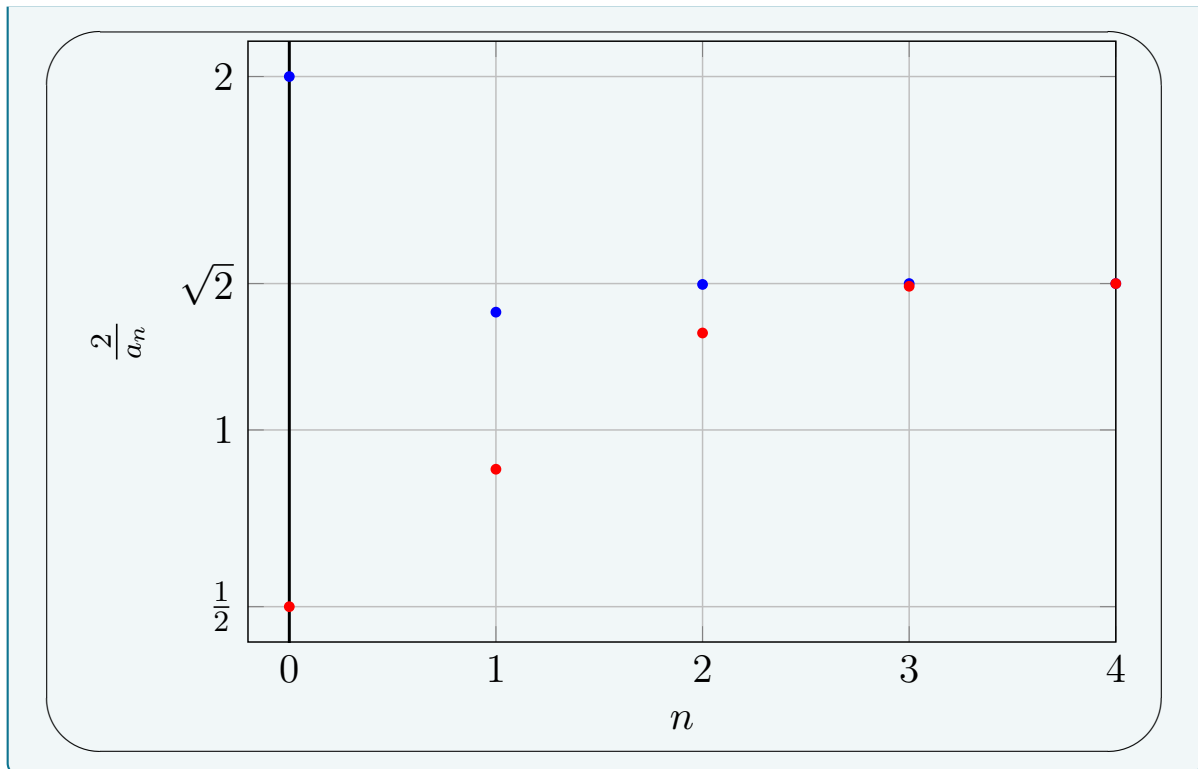
Le disuguaglianze sono strette per ogni $b \neq \sqrt{c}$ e valgono come uguaglianze per $b = \sqrt{c}$.

Per ogni scelta di $b > 0$ la successione a_n tende a $\sqrt{c}$ e può quindi essere usata per approssimare la radice quadrata.

Esempio 6.4: Comportamento della successione

Ad esempio con $c = 2$ e $b = 4 > \sqrt{2}$ (punti rossi) oppure $b = 1 < \sqrt{2}$ (punti blu), abbiamo:





Il calcolo ricorsivo dei valori della successione appena vista prende il nome di **algoritmo di Erone**, inizialmente proposto per calcolare **il lato di un quadrato di area c** .

• I passi dell'algoritmo sono:

1. Fissata la base pari ad a_0 (il valore iniziale b), costruiamo il rettangolo associato di area c . L'altezza varrà $\frac{c}{a_0}$, dato che l'area del rettangolo è fissata uguale a quella del quadrato, ovvero:

$$c = \left(a_0 \cdot \frac{c}{a_0} \right)$$

2. Poiché il lato del quadrato cercato sarà compreso tra a_0 e $\frac{c}{a_0}$, si prende come nuova approssimazione a_1 la media tra a_0 e $\frac{c}{a_0}$:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(a_0 + \frac{c}{a_0} \right)$$

che diventa la nuova base del rettangolo. Successivamente si prende a_1 al posto di a_0 e si ripete, e così via.

Ad esempio cerchiamo di calcolare il lato di un quadrato di area $c = 2$, in altre parole cerchiamo di stimare il valore $\sqrt{2}$.

Alla **prima iterazione** (con $n=0$) consideriamo ad esempio un rettangolo di base $a_0 = b = 4$ (la prima **approssimazione** per eccesso di $\sqrt{2}$), di conseguenza l'altezza è $\frac{c}{a_0} = \frac{1}{2}$ (la prima appr. per difetto di $\sqrt{2}$). Quindi: $\frac{1}{2} < \sqrt{2} < 4$.

Calcoliamo il valore a_1 :

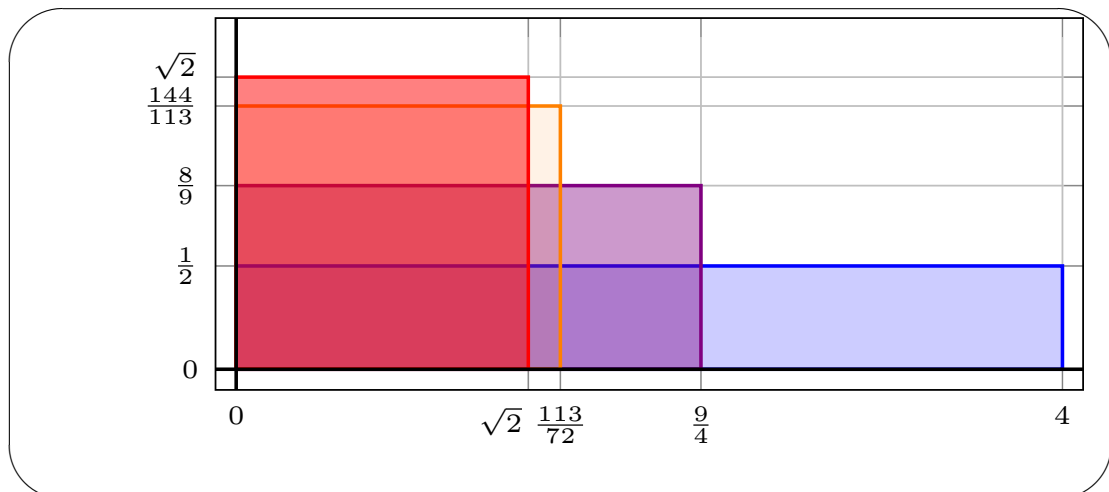
$$a_1 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}$$

Alla **seconda iterazione** (con $n=1$) abbiamo un rettangolo di base $a_1 = \frac{9}{4}$ (la seconda appr. per eccesso di $\sqrt{2}$), di conseguenza l'altezza è $\frac{c}{a_1} = \frac{2}{9/4} = \frac{8}{9}$ (la seconda appr. per difetto di $\sqrt{2}$). Quindi: $\frac{8}{9} < \sqrt{2} < \frac{9}{4}$.

Calcoliamo il valore a_2 :

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{8}{9} \right) = \frac{113}{72}$$

Alla **terza iterazione** (con $n=2$) abbiamo un rettangolo di base $a_2 = \frac{113}{72}$ (la terza appr. per eccesso di $\sqrt{2}$), di conseguenza l'altezza è $\frac{c}{a_2} = \frac{2}{113/72} = \frac{144}{113}$ (la terza appr. per difetto di $\sqrt{2}$). Quindi: $\frac{144}{113} < \sqrt{2} < \frac{113}{72}$.



Calcoliamo il valore a_3 :

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{113}{72} + \frac{144}{113} \right) = \frac{23,137}{16,272}$$

Alla **quarta iterazione** (con $n=3$) abbiamo un rettangolo di base $a_3 = \frac{23,137}{16,272}$ (la quarta appr. per eccesso di $\sqrt{2}$), di conseguenza l'altezza è $\frac{c}{a_3} = \frac{2}{23,137/16,272} = \frac{32,544}{23,137}$ (la quarta appr. per difetto di $\sqrt{2}$). Quindi: $\frac{32,544}{23,137} < \sqrt{2} < \frac{23,137}{16,272}$.

Già alla quarta iterazione abbiamo una stima abbastanza buona di $\sqrt{2}$:

$$\frac{23137}{16272} = 1.421890363... \quad \text{e} \quad \sqrt{2} = 1.414213562...$$

ovvero una stima corretta fino alla prima cifra decimale.

Calcoliamo infine il valore a_4 :

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{23,137}{16,272} + \frac{32,544}{23,137} \right) = \frac{1,064,876,737}{752,970,528}$$

Con la nuova stima abbiamo:

$$\frac{1,064,876,737}{752,970,528} = 1.414234285\dots \quad \text{e} \quad \sqrt{2} = 1.414213562\dots$$

che è corretta fino alla quarta cifra decimale, ovvero con una sola iterazione aggiuntiva abbiamo sistemato 3 ulteriori cifre decimali.

6.2.1 Stima degli errori dell'algoritmo di Erone

- L'errore relativo $\tilde{\varepsilon}_n$ all'iterazione n è:

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{|a_n - \sqrt{c}|}{\sqrt{c}}$$

abbiamo $\sqrt{c} \leq a_n, \forall b > 0$ e $n \geq 1$, quindi possiamo semplicemente considerare:

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{a_n - \sqrt{c}}{\sqrt{c}}$$

Il valore di $\sqrt{c}$ è ignoto quindi ci serve un modo per analizzare i valori degli errori relativi che sia indipendente da $\sqrt{c}$.

Consideriamo prima l'errore assoluto:

$$\varepsilon_n = a_n - \sqrt{c}$$

sappiamo che

$$\frac{c}{a_n} \leq \sqrt{c} \leq a_n, \quad \forall b > 0, n \geq 1$$

quindi possiamo ottenere una stima dell'errore assoluto ε_n commesso all'iterazione n come segue:

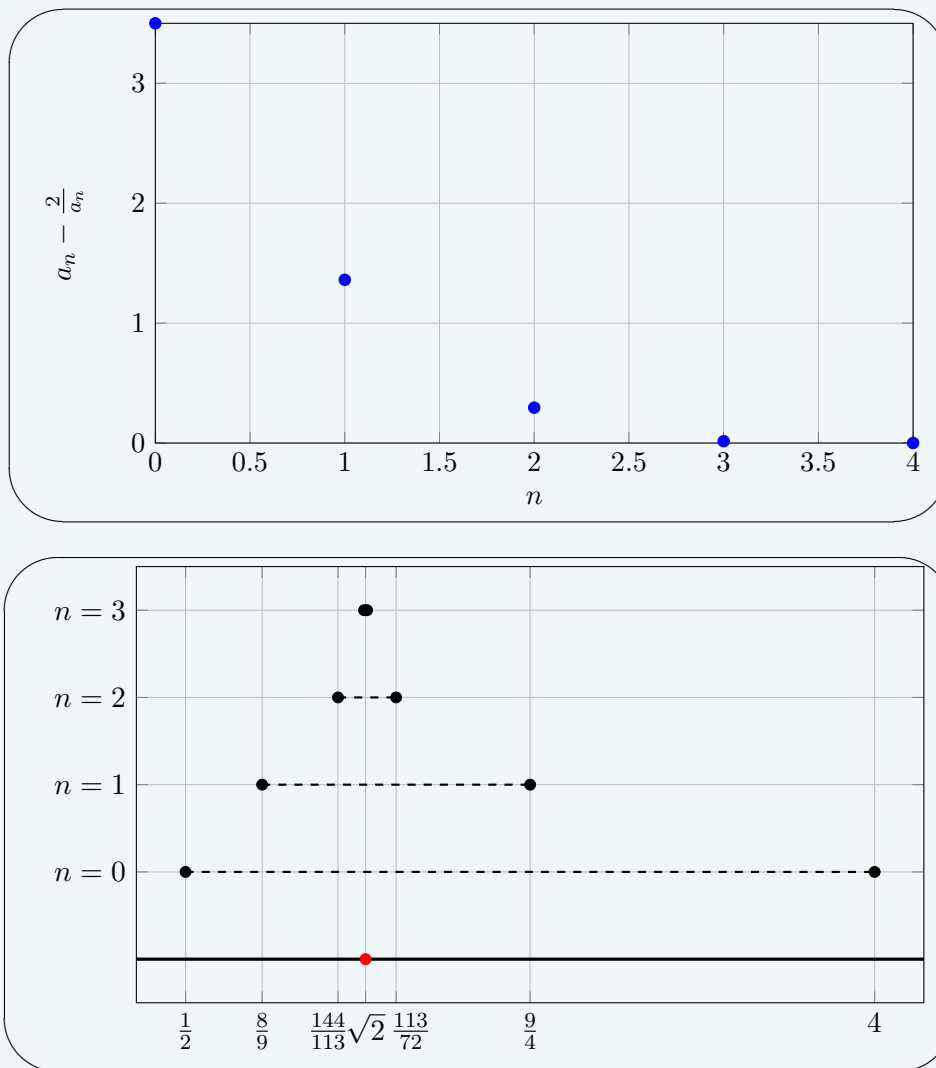
$$\varepsilon_n = a_n - \sqrt{c} \leq a_n - \frac{c}{a_n} \quad \text{e} \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{dato che} \quad a_n \rightarrow \sqrt{c}$$

Esempio 6.5: Stima degli errori dell'algoritmo di Erone ($\sqrt{2} = 1.414213562\dots$)

Riprendiamo l'esempio precedente con $c = 2$ e $b = 4$, abbiamo:

iter.	$\frac{2}{a_n}$	a_n	stima di $\sqrt{2}$	ε_n
$n = 0$	$\frac{1}{2}$	4	4	$< \frac{7}{2} = 3.5$
$n = 1$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{4}$	2.25	$< \frac{49}{36} = 1.361\dots$
$n = 2$	$\frac{144}{113}$	$\frac{113}{72}$	1.569444444...	$< \frac{2,401}{8,136} = 0.295\dots$
$n = 3$	$\frac{32,544}{23,137}$	$\frac{23,137}{16,272}$	1.421890363...	$< \frac{5,764,801}{376,485,264} = 0.0153\dots$
$n = 4$	$\frac{1,505,941,056}{1,064,876,737}$	$\frac{1,064,876,737}{752,970,528}$	1.414234285...	$< \frac{33,232,930,569,601}{801,820,798,913,807,136} = 0.000041\dots$

Esempio 6.6: Errori e Intervalli considerati dall'algoritmo di Erone



Vogliamo ora capire con che “velocità” decresca l’errore comparando gli errori relativi di due iterazioni consecutive. Questa stima ci fornisce delle informazioni sulla qualità dell’algoritmo, ovvero vogliamo determinare la “**velocità di convergenza**” dell’algoritmo.

Cominciamo osservando che il valore $\sqrt{c}$ si può scrivere nel seguente modo:

$$\sqrt{c} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) \quad \text{dato che} \quad \frac{1}{2} \left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{c}\sqrt{c} + c}{\sqrt{c}} = \frac{1}{2} \frac{2c}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \sqrt{c}$$

Stabiliamo ora il legame tra ε_{n+1} e ε_n , abbiamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= a_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a_n - \sqrt{c} + \frac{c}{a_n} - \frac{c}{\sqrt{c}} \right) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_n + \frac{c}{a_n} - \frac{c}{\sqrt{c}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_n + \frac{c(\sqrt{c} - a_n)}{\sqrt{c} a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_n - \frac{c \varepsilon_n}{\sqrt{c} a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_n - \frac{\sqrt{c} \varepsilon_n}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_n \left(1 - \frac{\sqrt{c}}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_n \left(\frac{a_n - \sqrt{c}}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n^2}{a_n} \end{aligned}$$

Cerchiamo ora il legame tra $\tilde{\varepsilon}_{n+1}$ e $\tilde{\varepsilon}_n$ e sostituiamo $\varepsilon_n = \sqrt{c} \tilde{\varepsilon}_n$ nella formula precedente:

$$\sqrt{c} \tilde{\varepsilon}_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{c} \tilde{\varepsilon}_n)^2}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{c} \sqrt{c} \tilde{\varepsilon}_n^2}{a_n} \quad \text{quindi} \quad \tilde{\varepsilon}_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{c} \tilde{\varepsilon}_n^2}{a_n}$$

Abbiamo:

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}} = \frac{a_n - \sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a_n}{\sqrt{c}} - 1 \quad \text{quindi} \quad \frac{\sqrt{c}}{a_n} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_n + 1}$$

e quindi otteniamo:

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{c} \tilde{\varepsilon}_n^2}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}_n^2}{1 + \tilde{\varepsilon}_n}$$

Abbiamo ottenuto il legame tra $\tilde{\varepsilon}_{n+1}$ e $\tilde{\varepsilon}_n$, indipendente sia da a_n che da $\sqrt{c}$.

Dalla formula appena ottenuta possiamo dedurre la seguente, semplificata e più intuitiva:

$$0 \leq \tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \frac{1}{2} \min \{ \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_n^2 \}$$

con disuguaglianza stretta quando $\tilde{\varepsilon}_n > 0$ (se $\tilde{\varepsilon}_n = 0$ si ha $\tilde{\varepsilon}_{n+1} = 0$ e vale l'uguaglianza). Quindi:

$$\text{se } 0 < \tilde{\varepsilon}_n < 1, \quad \text{si ha } \tilde{\varepsilon}_{n+1} < \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_n^2$$

Per esempio, se l'errore relativo a una certa iterazione è pari a 10^{-3} , al passaggio successivo sarà inferiore a $5 \cdot 10^{-7}$. In altre parole il numero di zeri dopo la virgola (che equivale al numero di cifre, dopo la virgola, correttamente stimate) raddoppia a ogni iterazione.

L'errore relativo dell'algoritmo di Erone ad ogni passo è proporzionale al quadrato dell'errore relativo nel passaggio precedente. **La velocità di convergenza è quadratica.**

Parte II

Limiti di funzioni e continuità

Limiti di funzioni, asintoti e continuità

1.1 Definizione successionale di limite

L'operazione di limite si può estendere dalle successioni alle funzioni reali di variabile reale.

Potremo così precisare il comportamento della funzione quando la variabile indipendente **si muove vicino a un determinato punto** oppure **diventa molto grande** (in valore assoluto).

- Consideriamo un **intervallo** I , un **punto** $c \in I$ e una **funzione** f definita in I , salvo al più nel punto c .
- L'**intervallo** I può essere **limitato** o **illimitato**, **chiuso** o **aperto**.
- Il **punto** c può essere **interno** all'intervallo oppure **uno dei suoi estremi** (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$).

Definizione 1.1: successionale di limite

Con $\ell, c \in \mathbb{R}^*$, scriviamo

$$f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di I , tale che $x_n \rightarrow c$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq c, \forall n$, si ha

$$f(x_n) \rightarrow \ell \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

In questi casi possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

che si legge: il limite di $f(x)$, per x che tende a c , è ℓ .

In altre parole, se **per qualunque successione** $\{x_n\}$ **di ingressi**, si ha che la **successione delle uscite** $\{f(x_n)\}$ tende al limite ℓ (finito o infinito) allora si dice che il limite di $f(x)$, per x che tende a c , è ℓ .

La definizione successionale di limite riconduce il concetto di limite di funzione a quello di limite di successione.

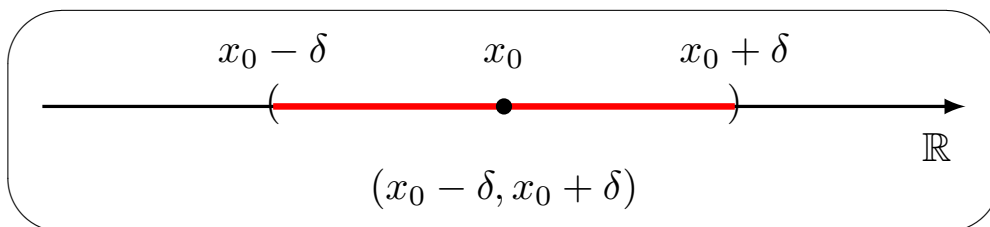
Non è l'unica definizione possibile. Un'altra definizione è la *definizione topologica di limite*. Sono due definizioni perfettamente equivalenti.

1.1.1 Intorni e definizione topologica di limite

Definizione 1.2: di intorno centrato di un punto

Dati $\delta > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, l'**intorno** centrato in x_0 associato a δ è l'intervallo aperto:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$



Dire che “ x si muove in un intorno di x_0 ” significa affermare che

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \text{ dove si pensa } 0 < \delta \ll 1.$$

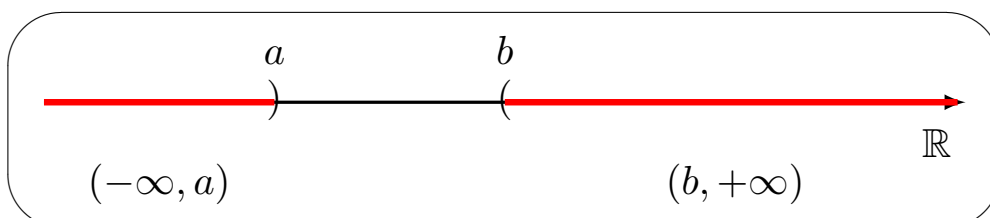
Definizione 1.3: di intorno di $\pm\infty$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, l'intorno associato ad a di $-\infty$ è l'intervallo:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

e l'intorno associato a b di $+\infty$ è l'intervallo:

$$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$$



- Introduciamo ora la locuzione “definitivamente per $x \rightarrow c$ ” analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso delle successioni

Definizione 1.4: di proprietà posseduta definitivamente per funzioni

Diciamo che una funzione f possiede **definitivamente** una certa proprietà per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}^*$ se esiste un intorno U di c tale che la proprietà vale per $f(x)$ per ogni $x \in U, x \neq c$.

- Diamo ora la definizione topologica di limite che, come già detto, è equivalente a quella successionale vista in precedenza ma che risulta utile.

Definizione 1.5: topologica di limite

Siano $c, \ell \in \mathbb{R}^*$, e sia f una funzione definita almeno definitivamente per $x \rightarrow c$. Scriviamo

$$f(x) \rightarrow \ell \quad \text{per} \quad x \rightarrow c$$

se per ogni intorno U_ℓ di ℓ esiste un intorno U_c di c tale che

$$\forall x \in U_c, x \neq c, \quad \text{si ha che} \quad f(x) \in U_\ell$$

- Questa definizione si può declinare nei casi specifici:

Limite finito al finito: $f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad \forall x \neq c, |x - c| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Limite infinito al finito: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \quad \forall x \neq c, |x - c| < \delta \implies |f(x)| > M$$

Limite finito all'infinito: $f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow \pm\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b > 0 : \quad \forall |x| > b \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Limite infinito all'infinito: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$

$$\forall M > 0, \exists b > 0 : \quad \forall |x| > b \implies |f(x)| > M$$

Il fatto di avere già sviluppato le basi del *calcolo dei limiti per le successioni*, renderà molto vantaggioso l'utilizzo della definizione successionale di limite per dimostrare i teoremi sui limiti delle funzioni a partire da quelli visti sulle successioni.

Teorema 1.6: di unicità del limite di funzioni

Data una funzione f , se $f(x) \rightarrow \ell$ per $x \rightarrow c$ allora tale limite ℓ è unico.

Dimostrazione. Se esistessero due limiti ℓ_1 e ℓ_2 , diversi tra loro, presa una qualsiasi successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \rightarrow c$ e $x_n \neq c, \forall n$, si avrebbe:

$$f(x_n) \rightarrow \ell_1 \text{ e } f(x_n) \rightarrow \ell_2 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Quindi la successione $\{f(x_n)\}$ avrebbe due limiti distinti: assurdo. $\square$

Definizione 1.7: di funzione infinitesima

Una funzione f tale che $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$ si dice **infinitesima** per $x \rightarrow c$.

Definizione 1.8: di funzione infinita

Una funzione f tale che $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow c$ si dice **infinita** per $x \rightarrow c$.

- Quando scriviamo:

$$f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

abbiamo

$$\text{limite} \begin{cases} \text{finito} \\ \text{infinito} \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell = \pm\infty \end{cases}$$

abbiamo

$$\text{limite} \begin{cases} \text{al finito} \\ \text{all'infinito} \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ c = \pm\infty \end{cases}$$

1.1.2 Limite finito all'infinito

$$f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c \quad \text{con} \quad \ell \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad c = \pm\infty$$

Esempio 1.1: Limite finito all'infinito (definizione successionale di limite)

Dimostriamo che:

$$e^x \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow -\infty$$

Dalla definizione, si tratta di provare che per ogni successione $\{x_n\}$, tale che $x_n \rightarrow -\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha:

$$e^{x_n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per definizione di limite di successione, questo significa provare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha:

$$|e^{x_n}| < \varepsilon, \text{ definitivamente, ossia } e^{x_n} < \varepsilon, \text{ definitivamente,}$$

essendo l'esponenziale sempre positivo. L'ultima disuguaglianza è equivalente a:

$$x_n < \log \varepsilon$$

Se $\varepsilon > 0$ è un numero piccolo (< 1), $\log \varepsilon$ è un numero negativo (e grande in valore assoluto). Poniamo

$$M(\varepsilon) = -\log \varepsilon > 0$$

Dobbiamo quindi provare che, per ogni $M(\varepsilon) > 0$, risulta:

$$x_n < -M(\varepsilon), \text{ definitivamente.}$$

Ma questo è proprio ciò che vale per ipotesi, perché $x_n \rightarrow -\infty$. Quindi $e^x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$.

1.1.2.1 Asintoto orizzontale

Definizione 1.9: di asintoto orizzontale

Si dice che f ha **asintoto orizzontale** di equazione $y = \ell \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) se:

$$f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow -\infty)$$

- Ogni situazione di *limite finito all'infinito*, quindi, corrisponde graficamente alla **presenza di un asintoto orizzontale**, ossia di una retta orizzontale a cui il grafico della funzione si avvicina sempre più.

1.1.2.2 Limite per eccesso o per difetto

- Quando una funzione ha limite finito all'infinito, **talvolta** è possibile precisare se questo limite è per **eccesso** (ℓ^+) o per **difetto** (ℓ^-). Graficamente, questo significa che il grafico della funzione si avvicina alla quota $y = \ell$ dall'**alto** o dal **basso**.

Definizione 1.10: di limite per eccesso o per difetto

Con $\ell, c \in \mathbb{R}^*$, scriviamo

$$f(x) \rightarrow \ell^+ \quad (\ell^-) \quad \text{per } x \rightarrow c$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di I , tale che $x_n \rightarrow c$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq c, \forall n$, si ha

$$f(x_n) \rightarrow \ell^+ \quad (\ell^-) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

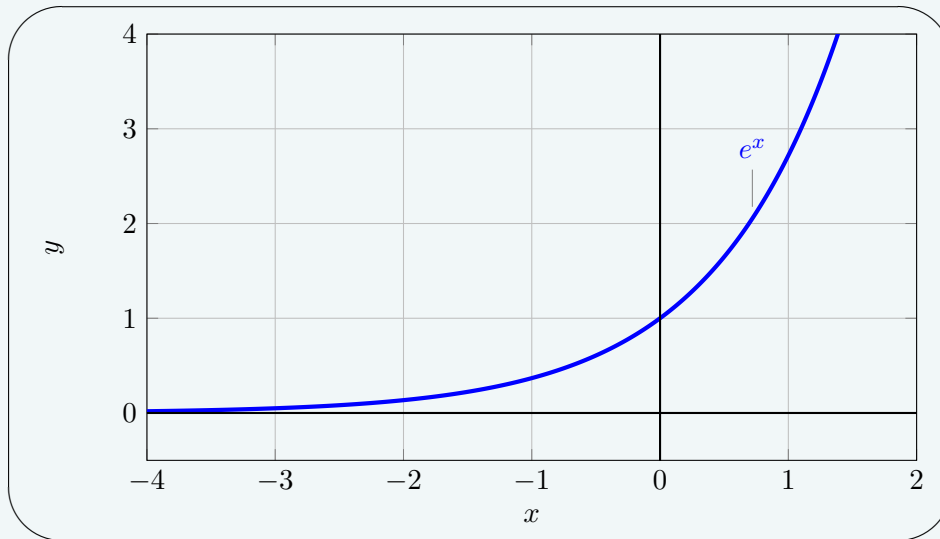
- Affermare che $f(x) \rightarrow \ell^+$ significa che $f(x) \rightarrow \ell$ e inoltre $f(x) \geq \ell$, definitivamente.
- Affermare che $f(x) \rightarrow \ell^-$ significa che $f(x) \rightarrow \ell$ e inoltre $f(x) \leq \ell$, definitivamente.
- In questi casi si dice che $f(x)$ tende a ℓ per eccesso (per difetto) per x che tende a c .

Esempio 1.2: Limiti per eccesso/difetto

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

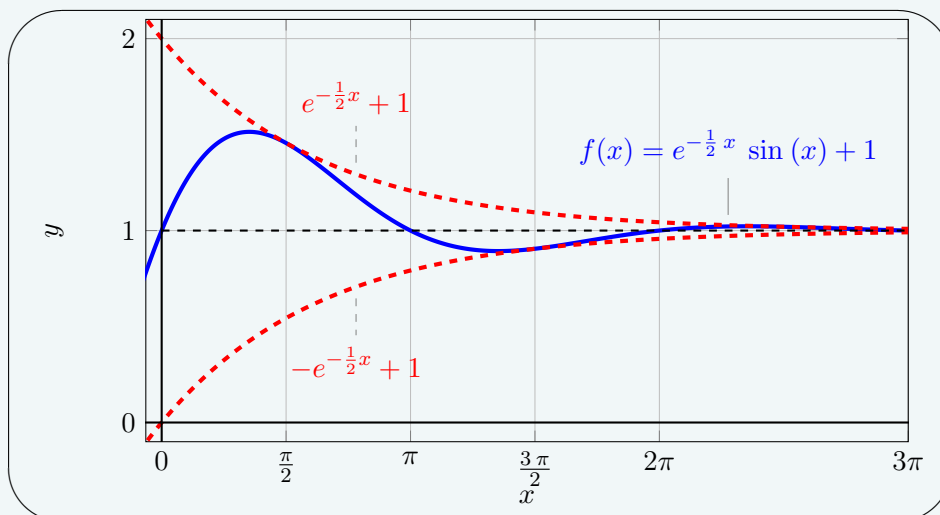
la scrittura 0^+ significa che la funzione tende a 0 per eccesso, ossia i valori di $f(x)$ tendono a zero mantenendosi non negativi.



Esempio 1.3: Limite per eccesso/difetto

Si osservi che non ogni limite finito è necessariamente per eccesso o per difetto, come mostra ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} \sin(x) + 1 = 1$$



La funzione $f(x)$ tende a 1 per $x \rightarrow +\infty$, ma non si può affermare né $f(x) \rightarrow 1^+$ e né $f(x) \rightarrow 1^-$.

1.1.3 Limite infinito all'infinito

$$f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c \quad \text{con} \quad \ell = \pm\infty \quad \text{e} \quad c = \pm\infty$$

Esempio 1.4: Limite infinito all'infinito (definizione successionale di limite)

Dimostriamo che:

$$\log_{1/2} x \rightarrow -\infty \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty$$

Dalla definizione, si tratta di provare che per ogni successione $\{x_n\}$, tale che $x_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\log_{1/2} x_n \rightarrow -\infty \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

Questo significa provare che per ogni $M > 0$, risulti:

$$\log_{1/2} x_n < -M, \quad \text{definitivamente, ovvero } x_n > \left(\frac{1}{2}\right)^{-M} = 2^M, \quad \text{definitivamente}$$

Ma per ipotesi $x_n \rightarrow +\infty$, quindi fissata la quantità positiva 2^M , certamente risulta $x_n > 2^M$, definitivamente. Quindi $\log_{1/2} x \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

1.1.3.1 Asintoto obliquo

- Nei casi in cui una funzione abbia, limite infinito all'infinito, può accadere (ma non sempre accade) che esista una retta, obliqua, a cui il grafico della funzione si avvicina sempre di più.

Definizione 1.11: di asintoto obliquo

Si dice che f ha **asintoto obliquo** di equazione $y = m x + q$ ($q, m \in \mathbb{R}, m \neq 0$) per $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) se :

$$(f(x) - (m x + q)) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty \quad (-\infty)$$

Esempio 1.5: di asintoto obliquo

Consideriamo

$$f(x) = 2x + 1 + e^x$$

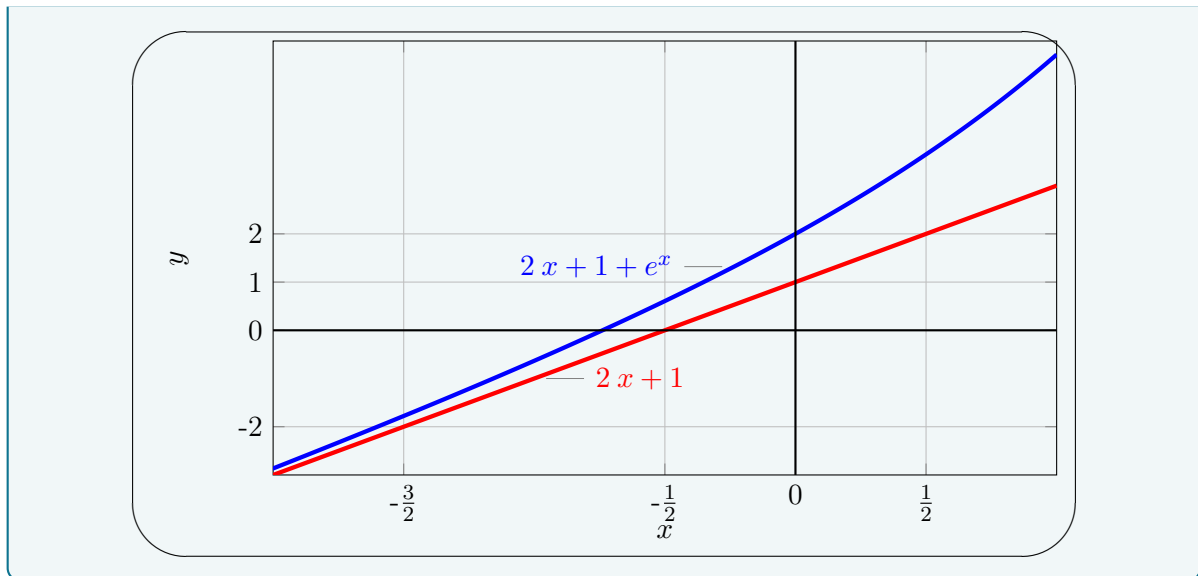
e vogliamo testare se $2x + 1$ sia o meno un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Perciò, per definizione di asintoto obliquo, la retta

$$y = 2x + 1$$

è asintoto obliquo di f per $x \rightarrow -\infty$.



- In casi meno elementari, anziché dover “indovinare” qual è l’asintoto obliquo è utile avere un criterio operativo per cercarlo.

Proposizione 1.12: di esistenza asintoto obliquo

Una funzione f ammette asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}, m \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

Analogo criterio vale per $x \rightarrow -\infty$.

- Osserviamo che la prima condizione impone che $f(x)$ abbia il medesimo ordine di infinito di $y = x$ per $x \rightarrow +\infty$, poiché:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Inoltre, se $m > 0$ abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e se $m < 0$ abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

L’asintoto obliquo $y = mx + q$ è una retta (non orizzontale) che approssima il comportamento di una funzione che diverge per $x \rightarrow \pm\infty$.

Dimostrazione. La prima condizione evita la possibilità che l'asintoto sia orizzontale e impone che $f(x)$ abbia il medesimo ordine di infinito di $y = x$. Dalla seconda condizione:

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q \quad \text{allora} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

Ragionamento analogo per $x \rightarrow -\infty$. □

Esempio 1.6: Asintoto obliquo

Consideriamo

$$f(x) = 3x + \sqrt{x}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + \sqrt{x} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

poiché il secondo limite è infinito non vale la seconda condizione della proposizione e di conseguenza la funzione non ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

1.1.4 Limite infinito al finito

$$f(x) \rightarrow \ell \quad \text{per } x \rightarrow c \quad \text{con } \ell = \pm\infty \quad \text{e } c \in \mathbb{R}$$

Esempio 1.7: Limite infinito al finito (definizione successionale di limite)

Dimostriamo che:

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Dalla definizione, si tratta di provare che per ogni successione $\{x_n\}$, tale che $x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq 0, \forall n$, si ha:

$$\frac{1}{x_n^2} \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Attenzione che la condizione $x_n \neq 0, \forall n$, contenuta nella definizione di limite, era irrilevante negli esempi precedenti in cui avevamo $x \rightarrow \pm\infty$, ma ora diventa chiaramente rilevante.

Dobbiamo quindi provare che per ogni $M > 0$, risulti:

$$\frac{1}{x_n^2} > M, \quad \text{definitivamente, ovvero } |x_n| < \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad \text{definitivamente}$$

Ma per ipotesi $x_n \rightarrow 0$, quindi fissata la quantità positiva $\frac{1}{\sqrt{M}}$, certamente risulta $|x_n| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ definitivamente. Quindi $1/x^2 \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0$.

1.1.4.1 Limite destro e sinistro

- Talvolta una funzione si comporta diversamente, dal punto di vista del suo limite, a seconda che x si avvicini a c da **destra** o da **sinistra**.

Definizione 1.13: di limite destro e sinistro

Con $\ell \in \mathbb{R}^*$ e $c \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$f(x) \rightarrow \ell \quad \text{per } x \rightarrow c^+ \quad (c^-)$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di I , tale che $x_n \rightarrow c^+ \quad (c^-)$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq c^+ \quad (c^-), \forall n$, si ha

$$f(x_n) \rightarrow \ell \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ esiste se e solo se esistono il limite destro e il limite sinistro e sono entrambi uguali a ℓ . Ovvero se e solo se:

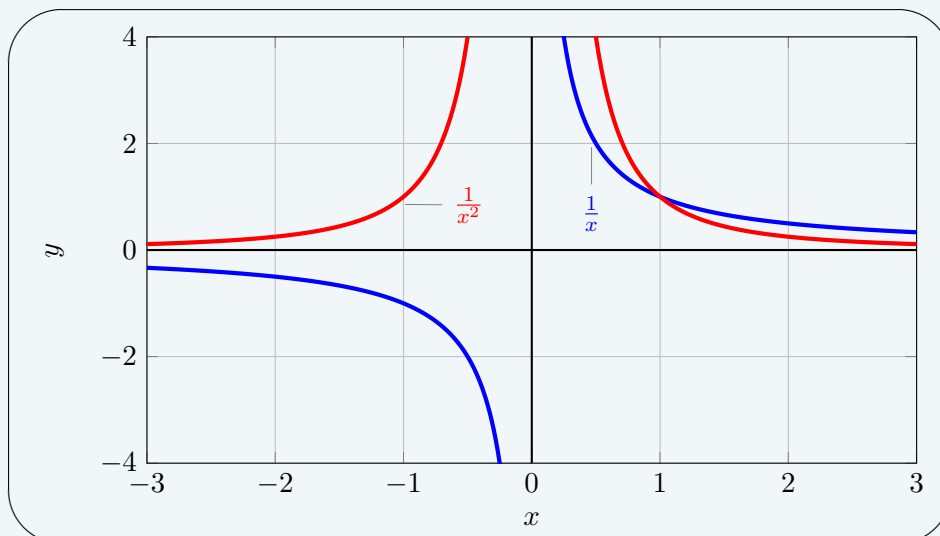
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \ell$$

Tuttavia, può accadere che il limite destro e il limite sinistro esistano ma siano diversi fra loro, oppure solo uno dei due esista. In questi casi:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{non esiste}$$

Esempio 1.8: Limite destro e sinistro

Consideriamo le funzioni $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Se f è definita in (a, b) , il limite per $x \rightarrow a$ (rispettivamente $x \rightarrow b$) è automaticamente un limite destro (rispettivamente sinistro).

1.1.4.2 Asintoto verticale

Definizione 1.14: di asintoto verticale

Si dice che f ha **asintoto verticale** di equazione $x = c \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow c$ (c^+ o c^-) se:

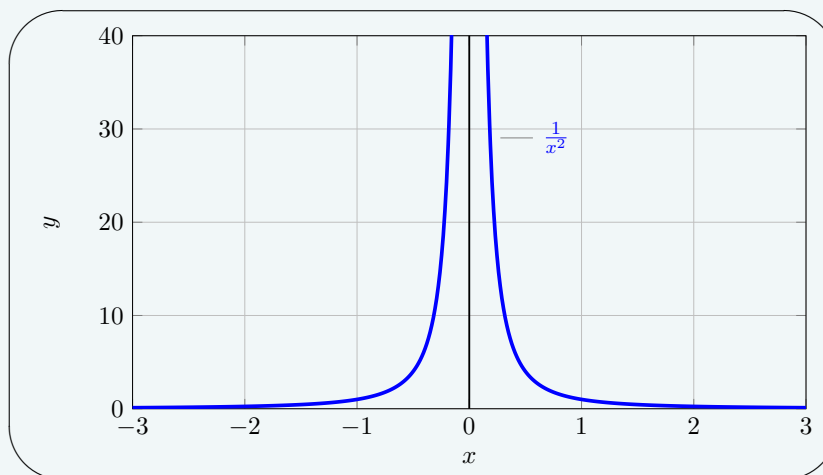
$$f(x) \rightarrow \pm\infty \quad \text{per } x \rightarrow c \quad (c^+ \text{ o } c^-)$$

- Ogni situazione di **limite infinito al finito**, quindi, corrisponde graficamente alla presenza di un **asintoto verticale**, ossia di una **retta verticale** a cui il grafico della funzione si avvicina sempre più.

Esempio 1.9: Asintoto verticale

- $x = 0$ è asintoto verticale di

$$\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



- $x = 0$ è asintoto verticale di

$$\frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \text{ e per } x \rightarrow 0^-$$

- $x = 0$ è asintoto verticale di

$$\log x \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

1.1.5 Limite finito al finito

$$f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c \quad \text{con} \quad \ell \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}$$

Esempio 1.10: Limite finito al finito (definizione successionale di limite)

Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ e dimostriamo che:

$$\sin x \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0$$

Dalla definizione, si tratta di provare che per ogni successione $\{x_n\}$, tale che $x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq 0, \forall n$, si ha:

$$\sin x_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Partiamo dalla seguente disuguaglianza elementare:

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{quindi} \quad |\sin x_n| \leq |x_n|$$

Per il teorema del confronto:

$$\text{se } x_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ anche } \sin x_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Quindi $\sin x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$ e abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = f(0)$$

Esempio 1.11: Limite finito al finito (definizione successionale di limite)

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e dimostriamo che:

$$f(x) \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0$$

Dalla definizione, si tratta di provare che per ogni successione $\{x_n\}$, tale che $x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n \neq 0, \forall n$, si ha:

$$f(x_n) \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Abbiamo

$$f(x_n) = 1, \quad \forall n, \quad \text{quindi} \quad f(x_n) \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Di conseguenza $f(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$. In questo caso, dunque (a differenza dell'esempio precedente), si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

- Si rifletta sui due esempi appena visti. In entrambi i casi il limite al finito di una certa funzione esiste ed è finito.
- Nel primo caso, tale limite coincide col valore della funzione nel punto considerato, nel secondo caso no.
- Introduciamo quindi il concetto di continuità per distinguere questi due casi.

1.1.6 Continuità

Definizione 1.15: di continuità

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in I$, si dice che f è **continua** in c se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I .

- La proprietà di continuità su un intervallo ha una semplice interpretazione geometrica:

“il grafico di una funzione continua su un intervallo si può tracciare, su quell’intervallo, senza staccare la penna dal foglio”

- Una funzione **non continua** in un punto c si dice **discontinua** in c .

Esempio 1.12: Continuità

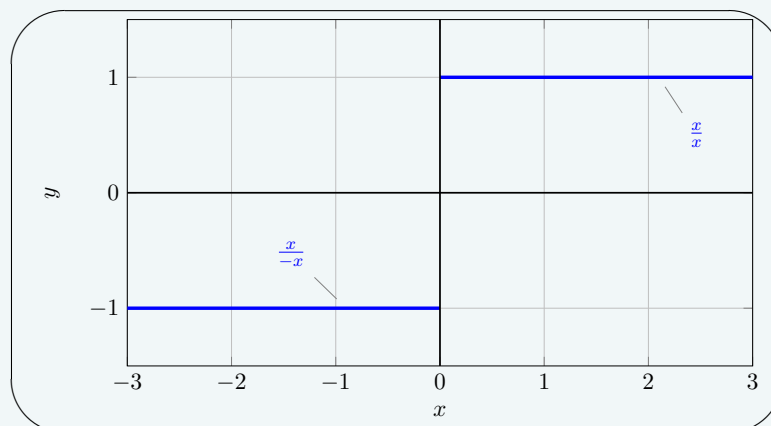
La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è discontinua in 0. La funzione $\sin x$ è continua in 0.

Esempio 1.13: Discontinuità

Consideriamo la funzione: $f(x) = x/|x|$



In questo caso non è possibile calcolare $f(0)$ e la funzione $f(x)$ è discontinua in 0 dato che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Definizione 1.16: di punto di discontinuità a salto

Si dice che c è un **punto di discontinuità a salto** per f quando i limiti destro e sinistro in c esistono finiti, ma sono diversi tra loro. Il salto è costituito dalla differenza dei limiti:

$$\text{salto in } c = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

Esempio 1.14: Discontinuità a salto

La funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

ha un punto di discontinuità a salto in $x = 0$, con salto uguale a 2.

Se uno dei due limiti, limite destro o limite sinistro (per $x \rightarrow c$), coincide con $f(c)$, si dice che f è **continua da destra o da sinistra**, rispettivamente.

- Le funzioni che presentano discontinuità a salto si prestano bene a modellizzare fenomeni che registrano bruschi cambiamenti.
- Le funzioni continue, d'altro canto, devono la loro importanza al fatto che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

può essere interpretato dicendo che “se x è vicino a c ” allora “ $f(x)$ è vicino a $f(c)$ ”, ossia piccole variazioni di x implicano piccole variazioni di $f(x)$.

1.1.7 Non esistenza del limite

- Il limite di una funzione può anche non esistere

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{non esiste}$$

Esempio 1.15: Non esistenza del limite (definizione successionale di limite)

Dimostriamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \quad \text{non esiste}$$

Per dimostrarlo è sufficiente trovare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tali che $x_n \rightarrow +\infty$ e $y_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, con $\{\sin x_n\}$ e $\{\sin y_n\}$ tendenti a due limiti diversi.

Prendiamo:

$$x_n = n\pi \quad \text{e} \quad y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \forall n$$

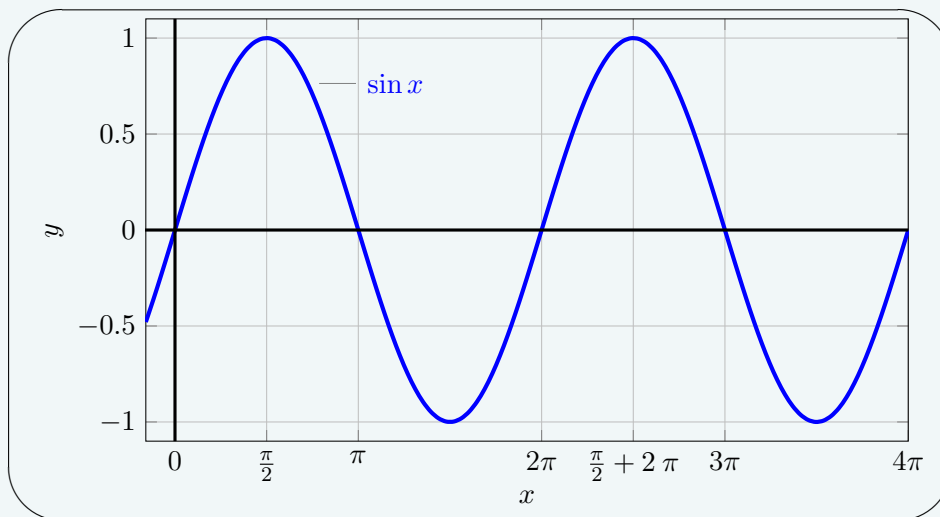
di conseguenza abbiamo:

$$\{n\pi\} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right\} \rightarrow +\infty \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

In corrispondenza di tali successioni si ha

$$\sin x_n = 0 \quad \text{e} \quad \sin y_n = 1, \quad \forall n$$

e di conseguenza le due successioni tendono a due limiti diversi. Quindi la definizione di limite non è soddisfatta e il limite non esiste.



Esempio 1.16: Non esistenza del limite (definizione successionale di limite)

Dimostriamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{non esiste}$$

Per dimostrarlo è sufficiente trovare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tali che $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e $x_n, y_n \neq 0, \forall n$, con $\left\{\sin \frac{1}{x_n}\right\}$ e $\left\{\sin \frac{1}{y_n}\right\}$ tendenti a due limiti diversi.

Prendiamo:

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad \forall n > 1$$

di conseguenza abbiamo:

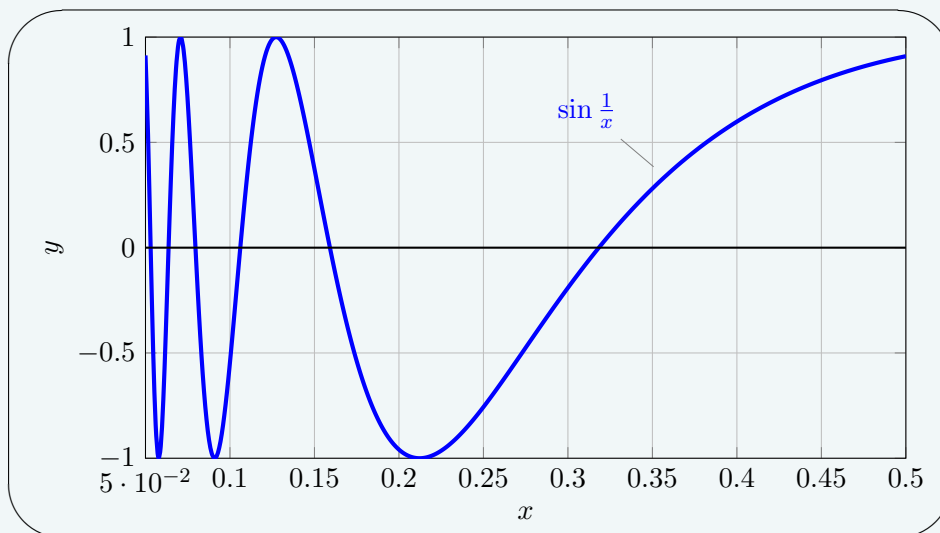
$$\left\{\frac{1}{n\pi}\right\} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right\} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

In corrispondenza di tali successioni si ha

$$\sin \frac{1}{x_n} = 0 \quad \text{e} \quad \sin \frac{1}{y_n} = 1, \quad \forall n > 1$$

e di conseguenza le due successioni tendono a due limiti diversi. Quindi la definizione di limite non è soddisfatta e il limite non esiste.

La funzione ha infinite oscillazioni in uno spazio finito perciò non è possibile disegnarne il grafico in un intervallo $(0, b]$ con $b \in \mathbb{R}_+$.



Calcolo dei limiti di funzioni

2.1 Il calcolo dei limiti di funzioni

- Enunciamo i teoremi sui limiti di funzioni che discendono immediatamente dai corrispondenti teoremi sui limiti di successioni e dalla definizione successionale di limite

2.1.1 Teorema dell'algebra dei limiti

Teorema 2.1: dell'algebra dei limiti caso dei limiti finiti

Ipotesi per $x \rightarrow c$:

$$1. f(x) \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R}, \quad 2. g(x) \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R}.$$

Tesi per $x \rightarrow c$:

$$1. f(x) \pm g(x) \rightarrow \ell_1 \pm \ell_2, \quad 2. f(x) g(x) \rightarrow \ell_1 \ell_2,$$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (\ell_2 \neq 0, g(x) \neq 0, \text{ definitivamente per } x \rightarrow c).$$

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione tale che

$$x_n \neq c, \forall n, \text{ e } x_n \rightarrow c \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Per ipotesi si ha che

$$f(x_n) \rightarrow \ell_1 \text{ e } g(x_n) \rightarrow \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}).$$

Dal teorema sull'algebra dei limiti per successioni si conclude quindi che

$$f(x_n) \pm g(x_n) \rightarrow \ell_1 \pm \ell_2,$$

e quindi

$$f(x) \pm g(x) \rightarrow \ell_1 \pm \ell_2.$$

In modo perfettamente analogo si dimostrano le tesi 2 e 3 del teorema.

□

2.1.2 Teoremi di permanenza del segno

Nei prossimi enunciati ℓ e c saranno punti di $\mathbb{R}^*$ salvo avviso contrario.

Teorema 2.2: di permanenza del segno 1^a forma

Ipotesi:

$$1. f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c, \quad 2. \ell \leq 0.$$

Tesi:

$$f(x) \leq 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow c.$$

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione tale che

$$x_n \neq c, \forall n, \text{ e } x_n \rightarrow c \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Abbiamo per l'ipotesi

$$f(x_n) \rightarrow \ell > 0$$

quindi per il teorema di permanenza del segno per successioni, applicato alla successione $\{f(x_n)\}$, si conclude che

$$f(x_n) > 0, \text{ definitivamente.}$$

Poiché questo vale per ogni successione tale che $x_n \rightarrow c$, si conclude che

$$f(x) > 0, \text{ definitivamente, per } x \rightarrow c$$

□

Teorema 2.3: di permanenza del segno per funzioni 2^a forma

Ipotesi:

$$1. f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \text{ per } x \rightarrow c,$$

$$2. f(x) \geq 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow c.$$

Tesi:

$$\ell \geq 0.$$

Dimostrazione. Deriva dal corrispettivo teorema per le successioni.

□

- Per le funzioni abbiamo anche il seguente teorema di permanenza del segno.

Teorema 2.4: di permanenza del segno per funzioni continue*Ipotesi:*

1. f è continua in $c \in \mathbb{R}$,
2. $f(c) > 0$.

Tesi:

$$f(x) > 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow c.$$

Dimostrazione. Se f è continua in c , allora

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

quindi l'ipotesi $f(c) > 0$ significa che

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$$

e questo per il teorema di permanenza del segno 1^a forma implica che

$$f(x) > 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow c.$$

□

2.1.3 Teorema del confronto**Teorema 2.5: del confronto***Ipotesi:*

1. $f(x) \rightarrow \ell$ e $g(x) \rightarrow \ell$ per $x \rightarrow c$,
2. $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow c$.

Tesi:

$$h(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow c.$$

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione tale che

$$x_n \neq c, \forall n, \text{ e } x_n \rightarrow c \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Vogliamo provare che

$$h(x_n) \rightarrow \ell \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per ipotesi sappiamo che:

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n), \text{ definitivamente,}$$

$$f(x_n) \rightarrow \ell \text{ e } g(x_n) \rightarrow \ell, \text{ per } x_n \rightarrow c$$

Quindi, per il teorema del confronto delle successioni:

$$\{f(x_n)\}, \{h(x_n)\} \text{ e } \{g(x_n)\}$$

si conclude che

$$h(x_n) \rightarrow \ell \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

□

Corollario 2.6: del teorema del confronto (parte I)

Ipotesi:

1. $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$,
2. $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow c$.

Tesi:

$$h(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c.$$

Dimostrazione. Deriva dal corrispondente corollario sulle successioni.

□

Esempio 2.1: Corollario del teorema del confronto

Proviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Abbiamo

$$x \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ non esiste}$$

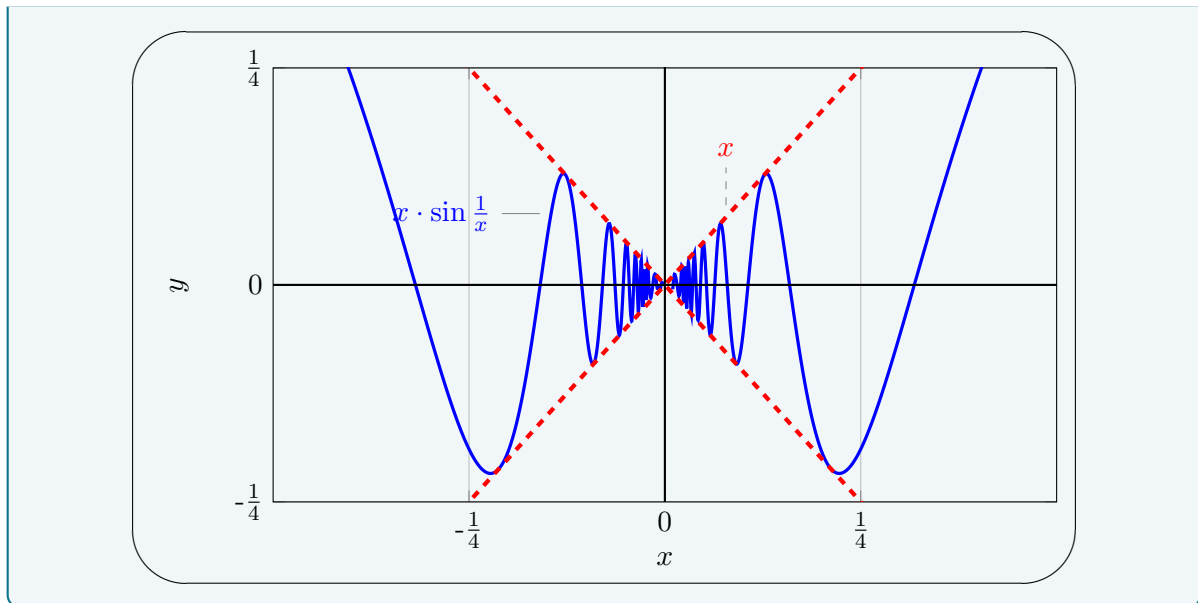
quindi non si può applicare il teorema (2.1) dell'algebra dei limiti per funzioni.

Abbiamo

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ quindi } \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ e } |x| \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Quindi, per il corollario (2.6) del teorema del confronto per funzioni abbiamo:

$$x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0.$$


Corollario 2.7: del teorema del confronto (parte II)

Ipotesi:

1. $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$,
2. $g(x)$ è limitata, definitivamente, per $x \rightarrow c$.

Tesi:

$$f(x)g(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c.$$

Dimostrazione. Deriva dal corrispondente corollario sulle successioni. □

Esempio 2.2: Corollario del teorema del confronto

Proviamo che:

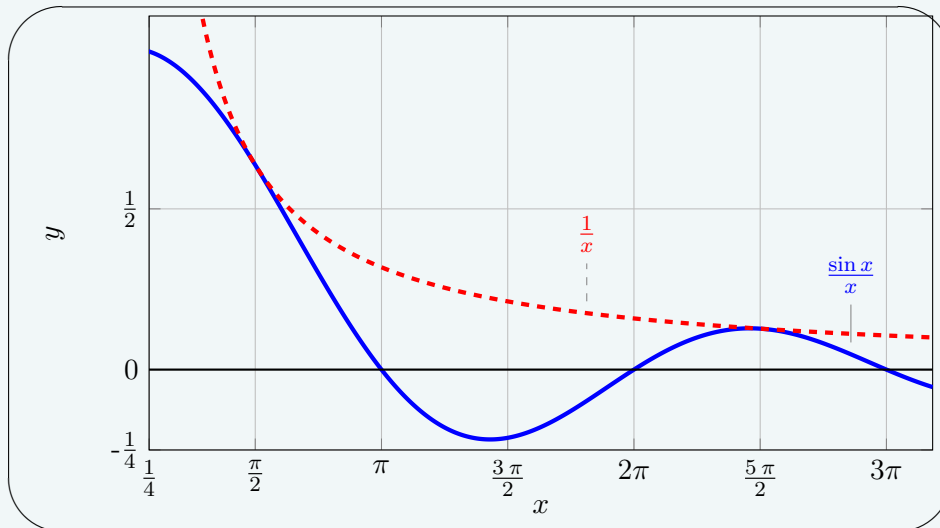
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \cos x} = \frac{1}{2}$$

Fattorizzando otteniamo

$$\frac{x + \sin x}{2x + \cos x} = \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{2x \left(1 + \frac{\cos x}{2x}\right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{2x}} \right)$$

Per il corollario (2.7) del teorema del confronto per funzioni, abbiamo:

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\cos x}{2x} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$



Allora per il teorema (2.1) sull'algebra dei limiti, abbiamo quindi:

$$\frac{x + \sin x}{2x + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

2.1.4 Teoremi di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito

Teorema 2.8: di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito (addizione)

Ipotesi per $x \rightarrow c$:

$$1. f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}, \quad 2. g(x) \rightarrow +\infty, \quad 3. h(x) \rightarrow +\infty.$$

Tesi per $x \rightarrow c$:

$$\begin{aligned} 1. f(x) + g(x) &\rightarrow \ell + \infty = +\infty, & 2. f(x) - g(x) &\rightarrow \ell - \infty = -\infty, \\ 3. g(x) + h(x) &\rightarrow +\infty + \infty = +\infty, & 4. -g(x) - h(x) &\rightarrow -\infty - \infty = -\infty. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Deriva dal corrispettivo teorema per le successioni. □

Teorema 2.9: di aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito (prodotto)

Ipotesi per $x \rightarrow c$:

$$1. f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}, \quad 2. g(x) \rightarrow 0, \quad 3. h(x) \rightarrow \infty.$$

Tesi per $x \rightarrow c$:

$$1. f(x) h(x) \rightarrow \ell \cdot \infty = \infty \quad (\ell \neq 0), \quad 2. \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\ell}{0} = \infty \quad (\ell \neq 0),$$

$$3. \frac{f(x)}{h(x)} \rightarrow \frac{\ell}{\infty} = 0.$$

Dimostrazione. Deriva dal corrispettivo teorema per le successioni. □

- Come per le successioni, il **segno** di ∞ va determinato con la **regola dei segni**.

Esempio 2.3: Aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) x^3 = +\infty$$

In quanto $\left(\frac{1}{x} - 2 \right) \rightarrow -2$ e $x^3 \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -\infty$.

2.2 Teorema del cambio di variabile nel limite

Teorema 2.10: del cambio di variabile nel limite

Siano f e g due funzioni per cui è definita la composizione $f \circ g$, almeno definitivamente per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$. Se:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0 \in \mathbb{R}^*$, 2. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^*$
3. $g(x) \neq t_0$, definitivamente, per $x \rightarrow x_0$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

L'ipotesi 3. non è necessaria nel caso in cui f sia continua in t_0 , oppure se $t_0 = \pm\infty$.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione tale che

$$x_n \neq x_0, \forall n, \text{ e } x_n \rightarrow x_0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Abbiamo

$$g(x_n) \rightarrow t_0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ (per l'ipotesi 1)}$$

e

$$g(x_n) \neq t_0, \text{ definitivamente (per l'ipotesi 3).}$$

Perciò

$$f(g(x_n)) \rightarrow \ell \text{ (per l'ipotesi 2).}$$

Se $t_0 = \pm\infty$ la condizione $g(x) \neq \pm\infty$ è ovviamente verificata, mentre se f è continua in t_0 , $\ell = f(t_0)$, perciò nel caso risultasse $g(x_n) = t_0$ per qualche n si avrebbe

$$f(g(x_n)) = f(t_0) = \ell$$

e quindi la convergenza

$$f(g(x_n)) \rightarrow \ell \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

sarebbe comunque garantita. □

Esempio 2.4: Calcolo del limite col teorema del cambio di variabile nel limite

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{2x^3 + 4x + 1}{5(x+1)^3} \right)$$

Le funzioni f e g sono:

$$g(x) = \left(\frac{2x^3 + 4x + 1}{5(x+1)^3} \right) \quad \text{e} \quad f(t) = \log t.$$

Abbiamo $t = g(x)$ e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log \left(\frac{2x^3 + 4x + 1}{5(x+1)^3} \right) \quad \text{e} \quad x_0 = +\infty.$$

Calcoliamo

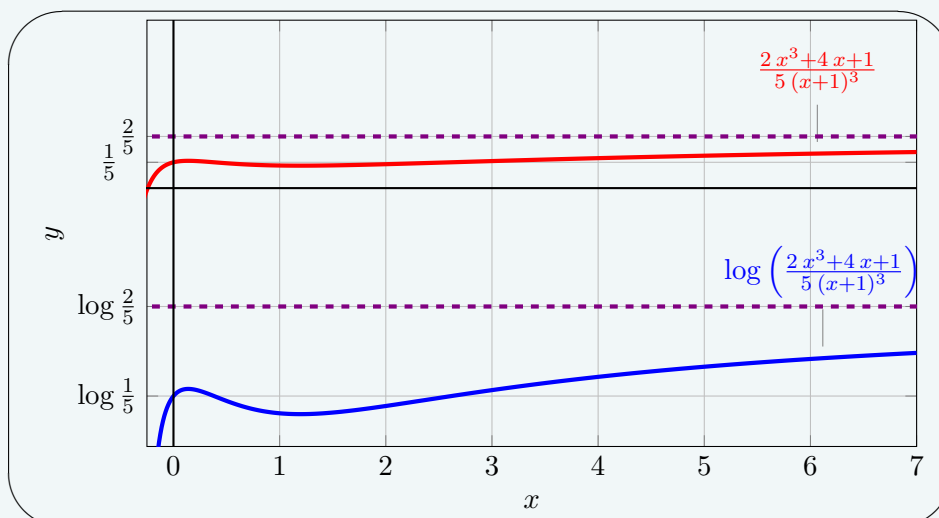
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{5} \quad \text{e di conseguenza} \quad t_0 = \frac{2}{5}.$$

Ora calcoliamo

$$\lim_{t \rightarrow 2/5} \log t = \log \frac{2}{5} \quad (\text{il logaritmo come vedremo è continuo in } \mathbb{R}_+)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) = \log \frac{2}{5}$$



Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \log \frac{1}{5}$$

utilizzando il teorema abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 1/5} \log t = \log \frac{1}{5}$$

dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 + 4x + 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 5(x+1)^3 = 5$$

Esempio 2.5: Calcolo del limite col teorema del cambio di variabile nel limite

Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}.$$

Le funzioni f e g sono:

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(t) = e^t.$$

Abbiamo $t = g(x)$ e

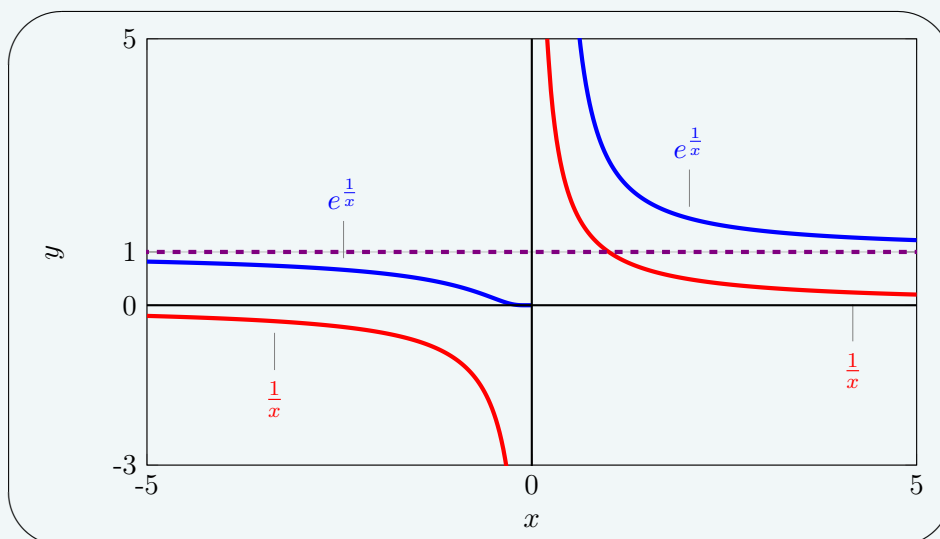
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{inoltre} \quad x_0 = 0^+ \quad \text{e} \quad x_0 = 0^-.$$

1. $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$ e quindi $t_0 = +\infty$. Ora calcoliamo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

2. $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow 0^-$ e quindi $t_0 = -\infty$. Ora calcoliamo:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$



Limiti di polinomi e funzioni razionali

3.1 Limiti di polinomi a $\pm\infty$

- Un polinomio di grado (massimo) n si può scrivere come:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ e } a_n \neq 0.$$

Il valore a_i è il **coefficiente del monomio** i , con $i = 0, 1, \dots, n$, mentre x^i è la **parte letterale** del monomio. In questa scrittura, senza perdita di generalità, i monomi sono ordinati per valori crescenti degli esponenti.¹

- Raccogliendo $a_n x^n$, ovvero l'ultimo monomio che è quello di grado massimo, si ha:

$$P_n(x) = a_n x^n \left(\overbrace{\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x}}^{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

Per calcolare il limite di un polinomio per $x \rightarrow \pm\infty$, basta calcolare il limite del monomio di grado massimo.

Esempio 3.1: Limiti di polinomi per $x \rightarrow \pm\infty$

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (8 - x^2 + 3x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 \left(\underbrace{\frac{8}{3x^3} - \frac{1}{3x}}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$$

¹Se un monomio di grado i è mancante abbiamo $a_i = 0$, a_0 è il termine noto dato che $x^0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (120 + 4x - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 \left(\underbrace{\frac{120}{-2x^3} + \frac{4}{-2x^2} + 1}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow -\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$$

3.2 Limiti di funzioni razionali a $\pm\infty$

- Sia f una funzione razionale (rapporto di polinomi):

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

dove $P_n(x)$ e $P_m(x)$ sono, rispettivamente, polinomi di grado n e m :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i = 0, 1, \dots, n, \text{ e } a_n \neq 0.$$

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \quad \text{con } b_i \in \mathbb{R}, \text{ per } i = 0, 1, \dots, m, \text{ e } b_m \neq 0.$$

- Raccogliendo al numeratore $a_n x^n$ e al denominatore $b_m x^m$, ovvero i monomi di grado massimo, si ha:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \frac{\left\{ \underbrace{\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty} \right\}}{\left\{ \underbrace{\frac{b_0}{b_m x^m} + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + 1}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty} \right\}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Per calcolare il limite di un rapporto fra polinomi per $x \rightarrow \pm\infty$, basta calcolare il limite del rapporto dei monomi di grado massimo.

Esempio 3.2: Limiti di funzioni razionali per $x \rightarrow \pm\infty$

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3x^3}{2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^3}{1 - 10x + x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 6x^5}{-4 + 7x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^5}{7x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

Per calcolare il limite di funzioni razionali (senza il termine costante) per $x \rightarrow 0$ bisogna raccogliere al numeratore e al denominatore le potenze di grado minimo.

Esempio 3.3: Limiti di funzioni razionali per $x \rightarrow 0$

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 + 3x^3 - 6x^5}{x + x^2 - x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 \left(1 - \overbrace{\frac{3}{2}x + 3x^3}^{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0} \right)}{x \left(1 + \underbrace{x - x^6}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0$$

3.3 Limiti di quozienti di somme di potenze a esponente razionale

- Le stesse regole valgono per i quozienti di somme di potenze a esponente razionale:

per $x \rightarrow \infty$ occorre raccogliere la potenza con esponente massimo

per $x \rightarrow 0^+$ occorre raccogliere la potenza con esponente minimo

L'operazione di elevamento a potenza può essere definita anche con base negativa se l'esponente è un razionale (frazione) con denominatore dispari. Quindi in questo caso si può calcolare $x \rightarrow 0$ (altrimenti soltanto $x \rightarrow 0^+$).

Esempio 3.4: Limiti di quozienti di somme di potenze a esponente razionale

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} + x + x^2}$$

Raccogliendo al denominatore la potenza di esponente minimo, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} + x + x^2} &= \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} \left(1 + \frac{x}{3x^{1/3}} + \frac{x^2}{3x^{1/3}} \right)} \\ &= \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} \left(1 + \frac{x^{2/3}}{3} + \frac{x^{5/3}}{3} \right)} \\ &= \frac{1}{3} x^{1/3} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^{2/3}}{3} + \frac{x^{5/3}}{3} \right)} \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} + x + x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/3} \frac{1}{\left(1 + \underbrace{\frac{x^{2/3}}{3} + \frac{x^{5/3}}{3}}_{\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0}\right)} = 0$$

Un'altra opzione per calcolare i limiti per $x \rightarrow 0$ è quella di fare un cambio di variabile:

$$x = \frac{1}{y}, \text{ se } x \rightarrow 0^+ \text{ allora } y \rightarrow +\infty, \text{ se } x \rightarrow 0^- \text{ allora } y \rightarrow -\infty$$

e quindi ci si riconduce al caso di limiti a $\pm\infty$.

Esempio 3.5: Calcolo del limite di funzioni razionali per $x \rightarrow 0^+$ col cambio di variabile

Vogliamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} + x + x^2}, \quad f(x) = \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3} + x + x^2}$$

Facendo il cambio di variabile $x = \frac{1}{y}$ occorre quindi calcolare i seguenti due limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{2/3}}{3\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3} + \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2} \quad \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{2/3}}{3\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3} + \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2} \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{2/3}}{3\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3} + \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2} = \frac{y^{-2/3}}{3y^{-1/3} + y^{-1} + y^{-2}}$$

Raccogliendo al denominatore la potenza di esponente massimo, abbiamo:

$$\frac{y^{-2/3}}{3y^{-1/3} + y^{-1} + y^{-2}} = \frac{y^{-2/3}}{3y^{-1/3} \left(1 + \frac{y^{-1}}{3y^{-1/3}} + \frac{y^{-2}}{3y^{-1/3}}\right)} = \frac{1}{3} \frac{1}{y^{1/3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3y^{2/3}} + \frac{1}{3y^{5/3}}\right)}$$

Quindi:

$$\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y^{1/3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3y^{2/3}} + \frac{1}{3y^{5/3}}\right)} = \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^{1/3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3y^{2/3}} + \frac{1}{3y^{5/3}}\right)} = 0$$

in quanto, per $y \rightarrow \pm\infty$ abbiamo

$$\frac{1}{y^{1/3}} \rightarrow 0 \text{ e } \left(1 + \frac{1}{3y^{2/3}} + \frac{1}{3y^{5/3}}\right) \rightarrow 1 \quad \text{dato che} \quad \frac{1}{3y^{2/3}} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{3y^{5/3}} \rightarrow 0.$$

Dato che il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ esistono e sono uguali a 0 allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Funzioni continue

4.1 Teorema dell'algebra delle funzioni continue

Teorema 4.1: dell'algebra delle funzioni continue

Siano f e g due funzioni definite almeno in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ e continue in x_0 . Allora:

1. $f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0 ; 2. $f(x) \cdot g(x)$ è continua in x_0 ;

3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0 purché $g(x_0) \neq 0$.

Dimostrazione. Proviamo ad esempio la 3., essendo le altre analoghe. Per ipotesi sappiamo che f e g sono continue in x_0 , ossia:

$$f(x) \rightarrow f(x_0) \text{ e } g(x) \rightarrow g(x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Inoltre $g(x_0) \neq 0$ e quindi, per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

Allora per il teorema sull'algebra dei limiti si conclude che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

ossia $f(x)/g(x)$ è continua in x_0 . □

4.2 Teorema di continuità delle funzioni elementari

Teorema 4.2: di continuità delle funzioni elementari

Le seguenti funzioni elementari sono continue in tutti i punti del proprio insieme di definizione:

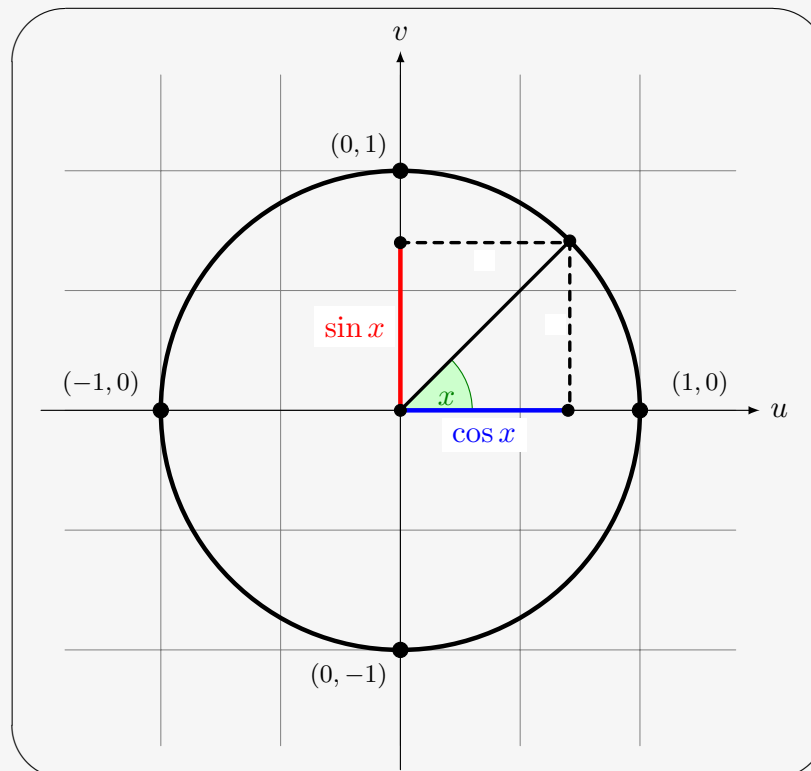
1. Potenze a esponente intero, razionale o reale;
2. Funzioni esponenziali;
3. Funzioni logaritmiche;
4. Funzioni trigonometriche elementari ($\sin x$, $\cos x$)

Dimostrazione. Ad esempio, proviamo la continuità in tutto $\mathbb{R}$ delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

- Abbiamo visto che $\sin x$ è continuo in $x = 0$, mostriamo che anche $\cos x$ è continuo in $x = 0$.
- La circonferenza trigonometrica mostra che, se x è un angolo nel primo quadrante,

$$\sin x + \cos x \geq 1$$

in quanto 1 è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti $\sin x$, $\cos x$.



- Ne segue che

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \sin x \quad \text{per } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ e quindi}$$

$$0 \leq 1 - \cos x \leq |\sin x| \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Allora per il teorema del confronto

$$1 - \cos x \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad \cos x \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e perciò $\cos x$ è continuo in 0.

□

Dimostrazione. • Per provare ora la continuità di $\sin x$ in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ consideriamo la catena di relazioni:

$$\begin{aligned} |\sin(x_0 + h) - \sin x_0| &= |\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0| \\ &= |\sin x_0 (\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h| \\ &\leq |\sin x_0 (\cos h - 1)| + |\cos x_0 \sin h| \\ &= |\sin x_0| |\cos h - 1| + |\cos x_0| |\sin h| \end{aligned}$$

Ora $|\sin h|$ e $|\cos h - 1|$ tendono a zero per $h \rightarrow 0$, per quanto appena dimostrato, mentre $|\sin x_0|$ e $|\cos x_0|$ sono costanti dunque

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

ossia

$$\sin(x_0 + h) \rightarrow \sin x_0 \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

e $\sin x$ è continua in x_0 . Un analogo ragionamento mostra la continuità di $\cos x$.

□

- Avendo dimostrato che $\sin x$, $\cos x$ sono continue in tutto $\mathbb{R}$, deduciamo che le funzioni $\tan x$, $\cot x$ sono continue nel loro insieme di definizione (per il teorema dell'algebra delle funzioni continue)
- Le funzioni potenza a esponente intero sono continue (in tutto $\mathbb{R}$), in quanto $f(x) = x$ è ovviamente continua, e $f(x) = x^n$ è il prodotto di n funzioni continue.
- I polinomi sono funzioni continue, in quanto ottenuti sommando funzioni del tipo cx^n , continue per il punto precedente.
- Le funzioni razionali (cioè i quozienti di polinomi) sono funzioni continue, tranne nei punti in cui si annulla il denominatore (che è un polinomio, quindi si annulla in un

numero finito di punti)

4.3 Teorema di continuità della funzione composta

Teorema 4.3: di continuità della funzione composta

Siano:

- g una funzione definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0 ,
- f una funzione definita almeno in un intorno di $t_0 = g(x_0)$ e continua in t_0 ,

allora $f \circ g$ è definita almeno in un intorno di x_0 ed è continua in x_0 .

Dimostrazione. Poiché g è continua in x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = t_0$$

allora per il teorema del cambio di variabile nel limite, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

e poiché f è continua in t_0 , si ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

e la tesi è dimostrata. □

- Ne segue che tutte le funzioni che si possono ottenere con somma, prodotto, quoziente e composizioni da funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione. **Quindi combinando in questo modo le funzioni si ottengono ancora funzioni continue.**

Riassumendo:

- somma, prodotto, quoziente di funzioni continue danno funzioni continue (dove il denominatore non si annulla);
 - le funzioni elementari dell'analisi matematica sono continue nel loro insieme di definizione;
 - composizione di funzioni continue dà una funzione continua.
- È quindi possibile sapere a priori che una funzione è continua nel suo insieme di definizione, senza applicare caso per caso la definizione di continuità.

Per le funzioni continue, se x_0 è un punto del dominio, il limite per $x \rightarrow x_0$ si calcola semplicemente sostituendo x_0 nell'espressione analitica della funzione, ovvero:

$$f(x) \rightarrow f(x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

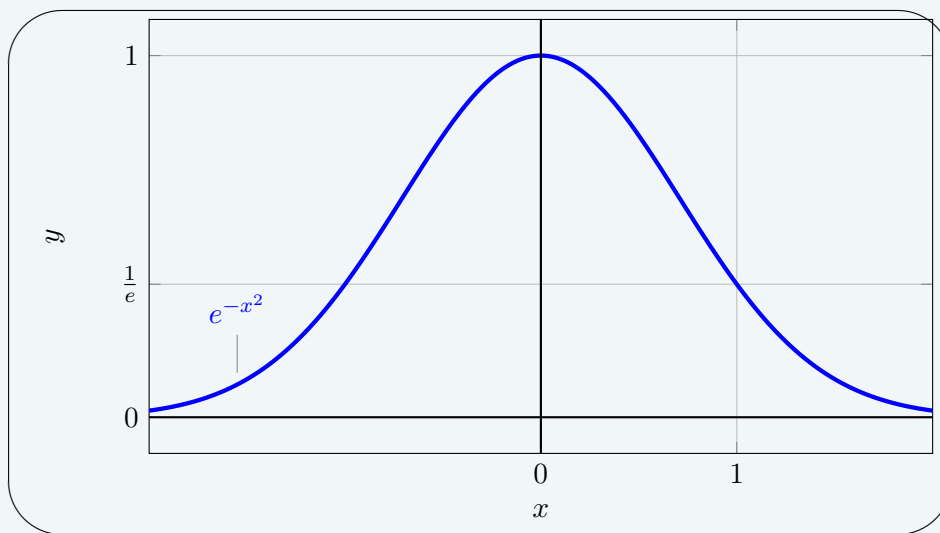
Esempio 4.1: Funzioni continue e limiti finiti al finito

La seguente funzione è continua con $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

quindi:

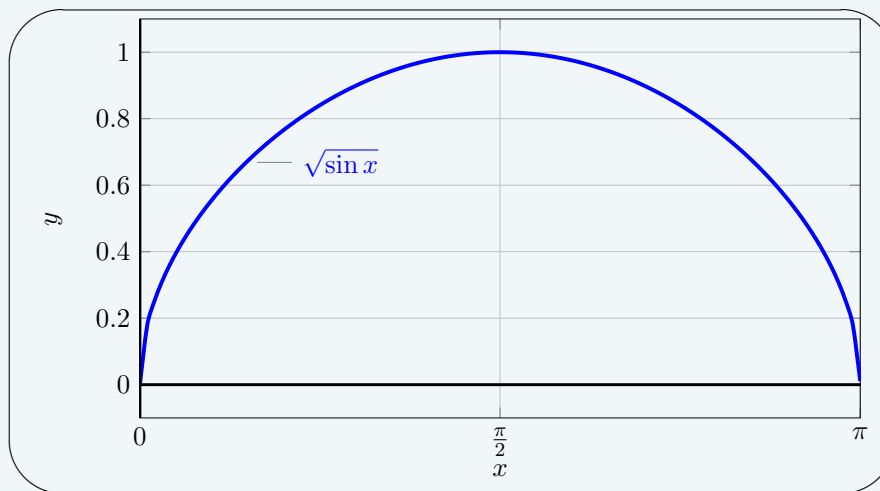
$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{-x^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



Esempio 4.2: Funzioni continue e limiti finiti al finito

La seguente funzione è continua con $x \in \mathbb{R}$ e $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, \forall k \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sqrt{\sin x} \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\sin \pi} = 0$$



Esempio 4.3: Funzioni continue e limiti finiti al finito

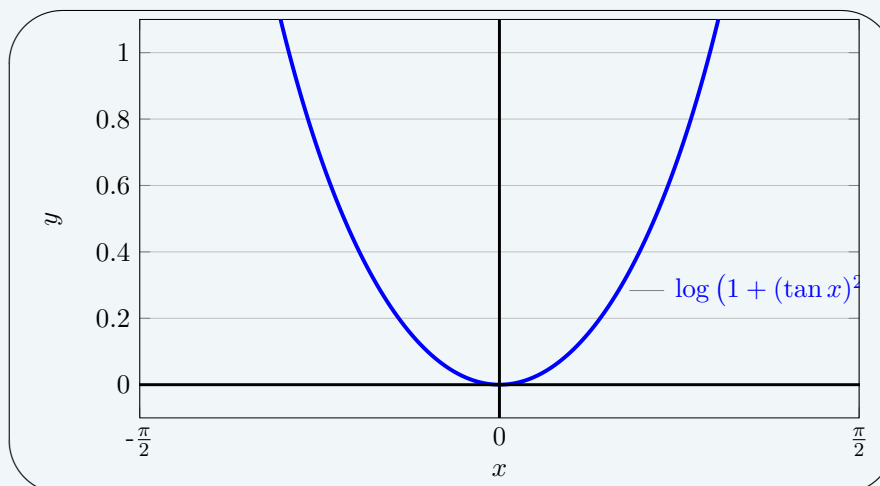
La seguente funzione è continua con $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \log_a (1 + (\tan x)^2), \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a (1 + (\tan x)^2) = \log_a (1 + (\tan 0)^2) = \log_a 1 = 0$$

Ad esempio con $a = e$ abbiamo:



Confronto degli infiniti

5.1 Confronto degli infiniti per funzioni

Teorema 5.1: Confronto tra infiniti

Dati $\alpha, \beta, \lambda > 0$, $a, b > 1$, abbiamo

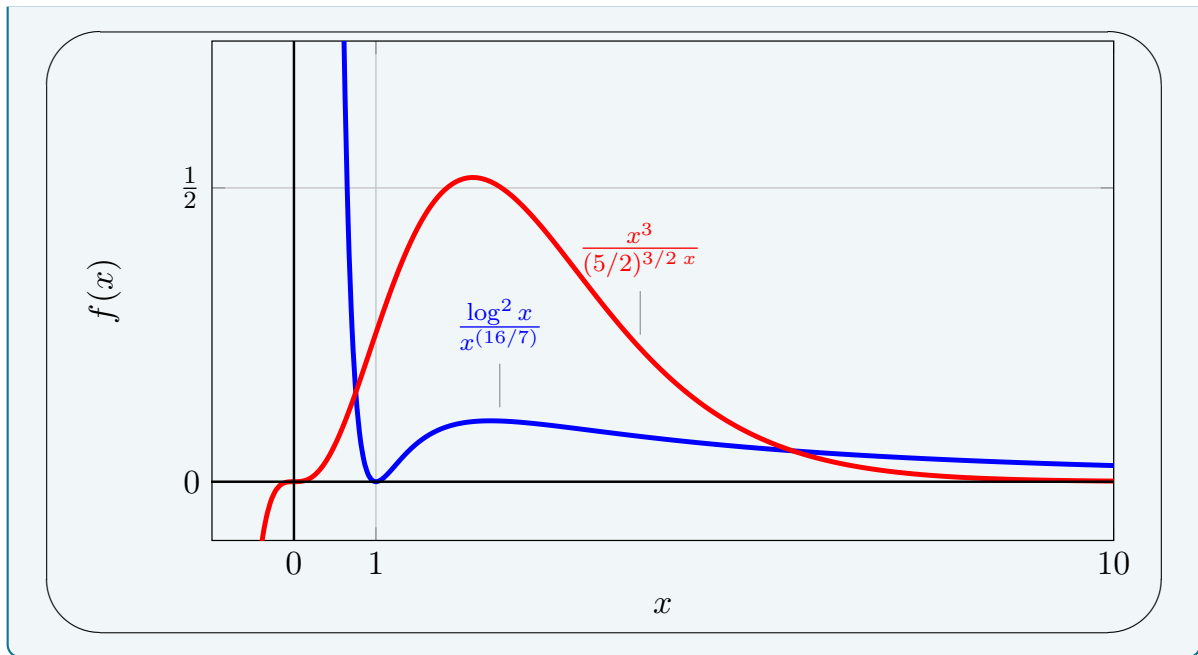
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = 0$$

Dimostrazione. Il teorema sarà dimostrato con gli strumenti del calcolo differenziale. $\square$

- Qualunque potenza con esponente positivo è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza di logaritmi a base > 1 e
- Qualunque esponenziale a base > 1 è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza con esponente positivo.

Esempio 5.1: Confronto fra infiniti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x}{x^{(16/7)}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(5/2)^{3/2 x}} = 0$$



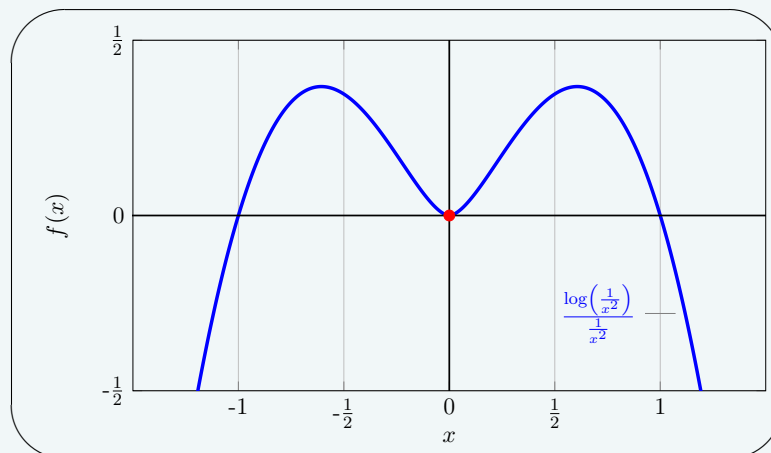
Se una funzione $\eta(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}^*$, abbiamo dal teorema del confronto degli infiniti:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\left(\log_a(\eta(x))\right)^\beta}{(\eta(x))^\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{(\eta(x))^\alpha}{b^\lambda \eta(x)} = 0 \quad \text{con } \alpha, \beta, \lambda > 0, a, b > 1$$

Esempio 5.2: Confronto degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

dato che con $\eta(x) = \frac{1}{x^2}$, abbiamo $\eta(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0$.



Osservazione 5.2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_a^\beta x = 0 \quad (\alpha > 0, \beta = \frac{m}{n}, n, m \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}, a > 1)$$

Dimostrazione. Dati $\alpha, \beta > 0, a > 1$ abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \left(-\log_a \left(\frac{1}{x}\right)\right)^\beta$$

Ponendo $t = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ equivale a $t \rightarrow 0^+$, e sostituendo si ha:

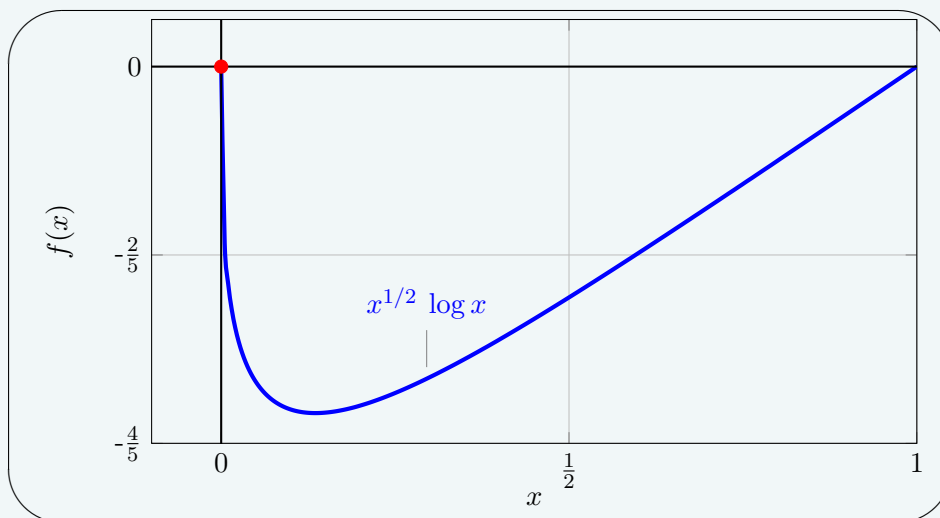
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = (-1)^\beta \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \log_a^\beta t = 0$$

□

Esempio 5.3: Confronto degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} \log x = 0^-$$

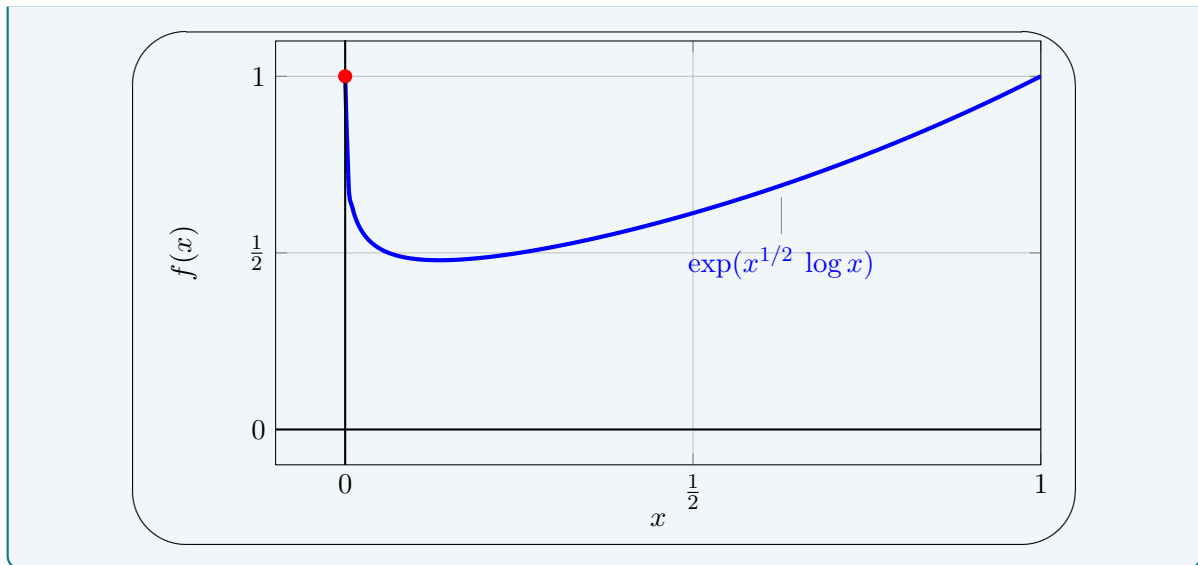
dato che abbiamo $\alpha = \frac{1}{2} > 0, \beta = 1 > 0$ e $a = e > 1$.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = 1^-$$

dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{e^{x^{1/2} \log x}}_{=\exp(x^{1/2} \log x)} = e^{0^-} = 1^-$$



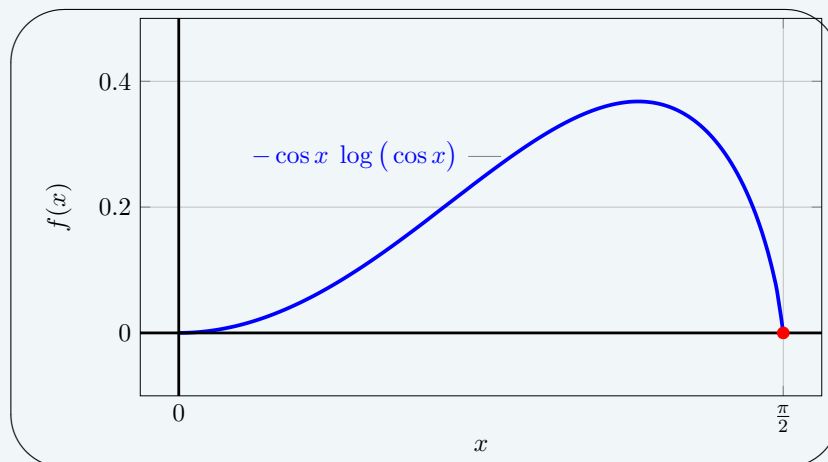
Se una funzione $\varepsilon(x)$ tende 0^+ per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}^*$, segue dalla precedente osservazione che:

$$\lim_{x \rightarrow c} (\varepsilon(x))^\alpha (\log_a(\varepsilon(x)))^\beta = 0 \quad (\alpha > 0, \beta = \frac{m}{n}, n, m \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}, a > 1)$$

Esempio 5.4: Confronto degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} -\cos x \log(\cos x) = 0^+$$

dato che, con $\varepsilon(x) = \cos x$, abbiamo $\varepsilon(x) \rightarrow 0^+$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ e $\alpha = \beta = 1$.



Dal teorema di confronto degli infiniti segue che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{con} \quad \alpha, \beta, \lambda > 0, \quad a, b > 1$$

Osservazione 5.3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha b^{\lambda/x} = +\infty \quad (\alpha, \lambda > 0, b > 1)$$

Dimostrazione. Dati $\alpha, \lambda > 0, b > 1$, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty$$

Ponendo $t = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ equivale a $t \rightarrow 0^+$, e sostituendo si ha:

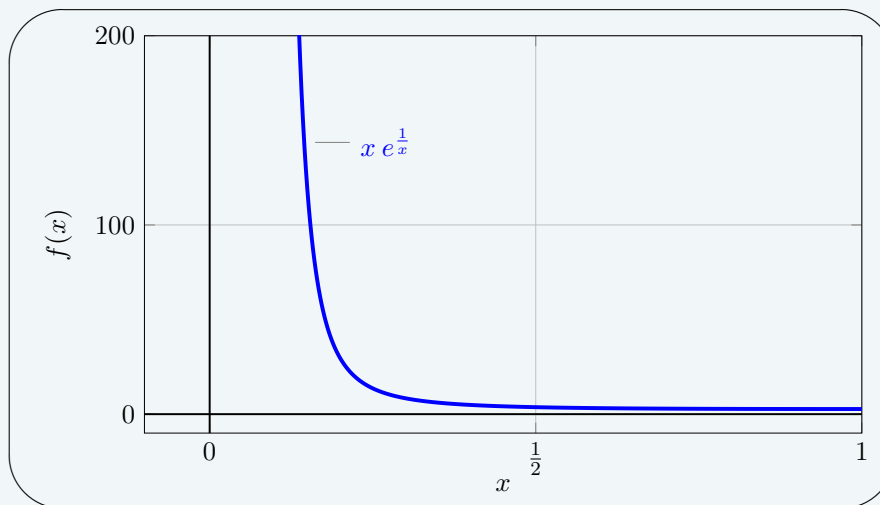
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^{\lambda x}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha b^{\lambda x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha b^{\lambda/t} = +\infty$$

□

Esempio 5.5: Confronto degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

dato che abbiamo $\alpha = \lambda = 1$ e $b = e > 1$

**Osservazione 5.4**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha} b^{-\lambda/x} = 0 \quad (\alpha, \lambda > 0, b > 1)$$

Dimostrazione. Dati $\alpha, \lambda > 0, b > 1$ abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = 0$$

Ponendo $t = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ equivale a $t \rightarrow 0^+$, e sostituendo si ha:

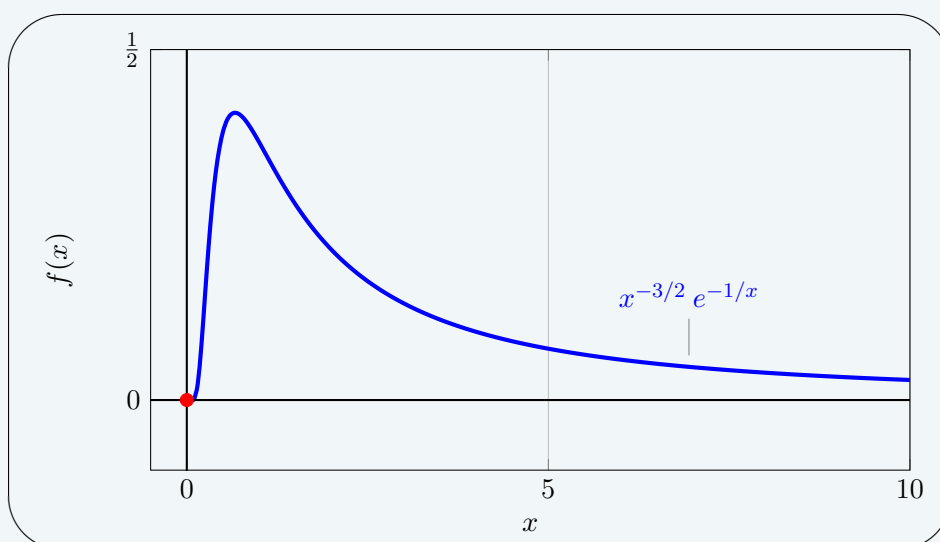
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \frac{1}{b^{\lambda x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\alpha} b^{-\lambda/t} = 0$$

□

Esempio 5.6: Confronto degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-3/2} e^{-1/x} = 0$$

dato che abbiamo $\alpha = \frac{3}{2}, \lambda = 1$ e $b = e > 1$.



Osservazione 5.5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha b^{\lambda x} = 0 \quad \left(\alpha = \frac{m}{n} > 0, n, m \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}, m \neq 0, \lambda > 0, b > 1 \right)$$

Dimostrazione. Dati $\alpha, \lambda > 0, b > 1$ abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = 0$$

Ponendo $t = -x$, $x \rightarrow +\infty$ equivale a $t \rightarrow -\infty$, e sostituendo si ha:

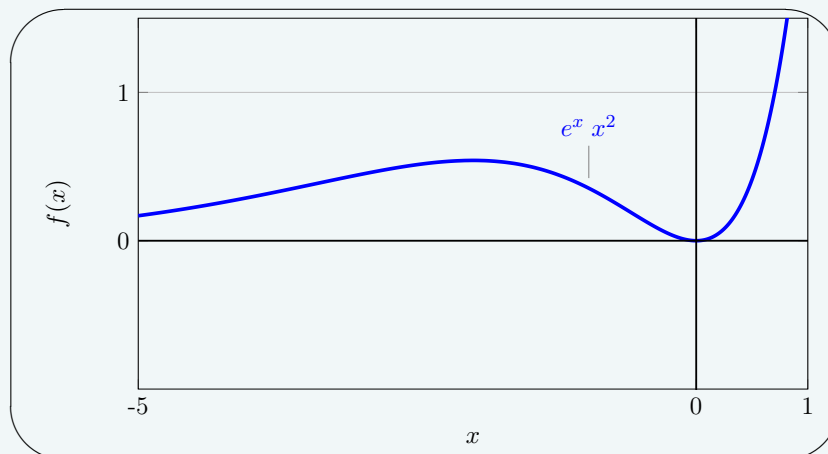
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^{\lambda x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{(-t)^\alpha}{b^{-\lambda t}} = (-1)^\alpha \lim_{t \rightarrow -\infty} t^\alpha b^{\lambda t} = 0$$

□

Esempio 5.7: Confronto degli infiniti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$$

dato che abbiamo $\alpha = 2, \lambda = 1$ e $b = e > 1$.



Limiti notevoli e stime asintotiche

6.1 Limiti notevoli

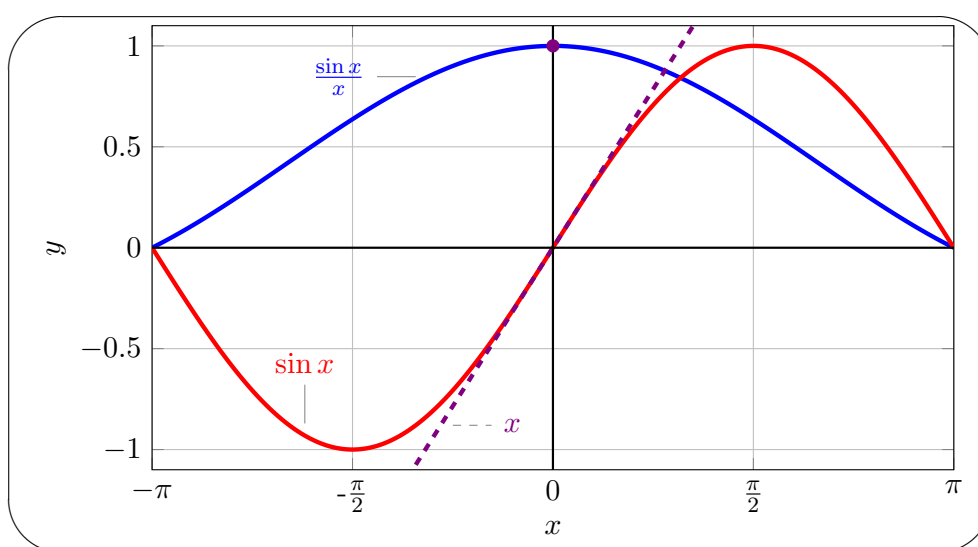
- Vediamo ora alcune comuni tecniche di calcolo dei limiti che combinano i teoremi generali sui limiti con l'uso di alcuni limiti notevoli di certe funzioni elementari.

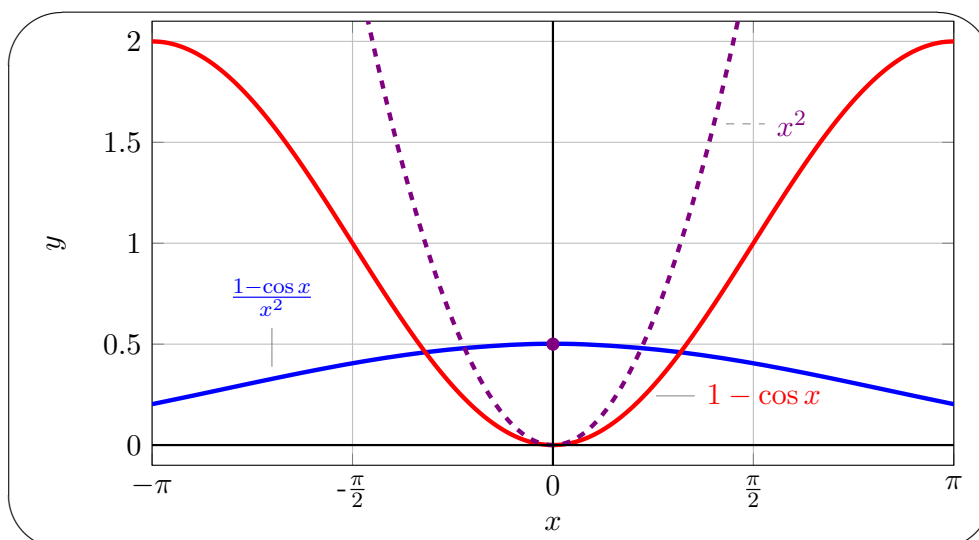
6.1.1 Limiti notevoli di seno e coseno

- Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

che si presentano in forma indeterminata.



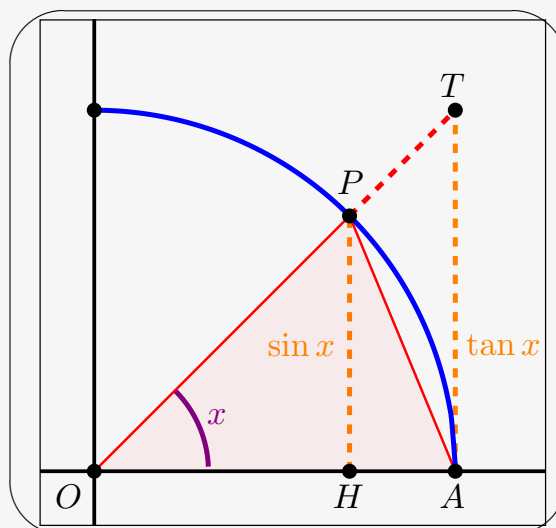

Lemma 6.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (6.1)$$

Dimostrazione. Le funzioni $\sin x$ e x sono funzioni dispari, allora $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari. Quindi è sufficiente calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

Abbiamo:



$$HP = \sin x \quad AT = \tan x \quad \widehat{AP} = x$$

L'area del triangolo OPA è minore di quella del settore circolare OPA , a sua volta minore di quella del triangolo OTA . Ne segue

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x}_{\text{area triang. } OPA} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x}_{\text{area sett. circ. } OPA} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x}_{\text{area triang. } OTA}$$

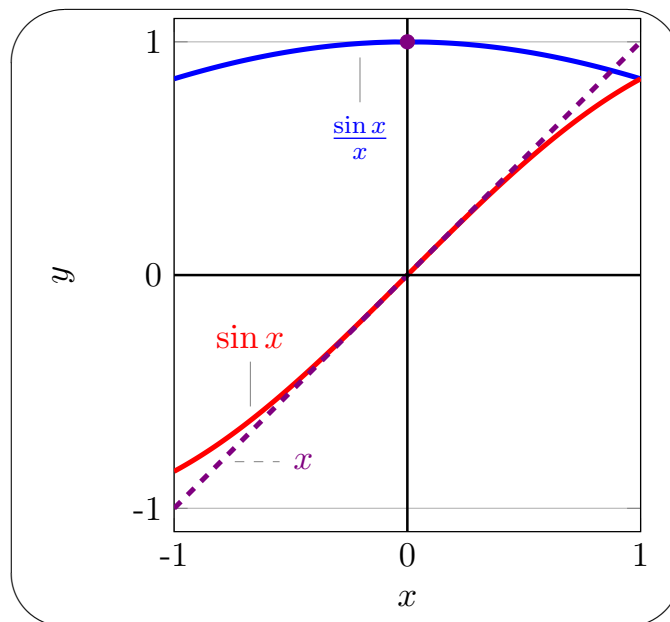
ossia per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin x < x < \tan x$$

Dividendo per $\sin x$, che è positivo perché $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, si ha

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \text{ovvero} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Dal teorema del confronto, essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, si deduce il lemma. $\square$



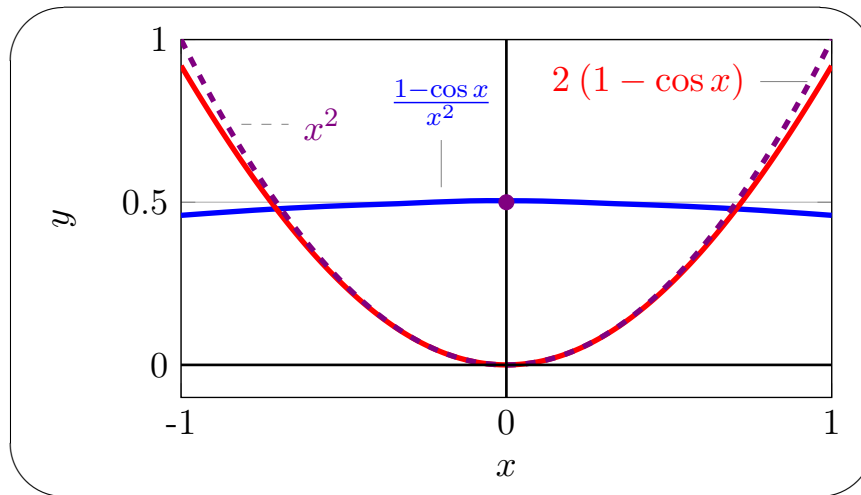
Lemma 6.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (6.2)$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}$$

quindi, dato che $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ e $(1 + \cos x) \rightarrow 2$ per $x \rightarrow 0$, abbiamo la tesi. $\square$



6.1.2 Prolungamento per continuità di una funzione

- In base al limite (6.1) dimostrato, le funzioni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, e $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ inizialmente non definite per $x = 0$ possono essere prolungate per continuità anche in $x = 0$, ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Le funzioni f e g così definite risultano continue anche in $x = 0$.

- se una funzione $f(x)$ non è definita in x_0 ma esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

la funzione può essere prolungata per continuità anche in x_0 , ponendo per definizione

$$f(x_0) = \ell$$

- Se invece la funzione f possiede in x_0 una discontinuità a salto, un asintoto verticale, o comunque non ammette limite finito, non è possibile renderla continua in x_0 alterandone la definizione in un punto solo.

6.1.3 Altri limiti notevoli

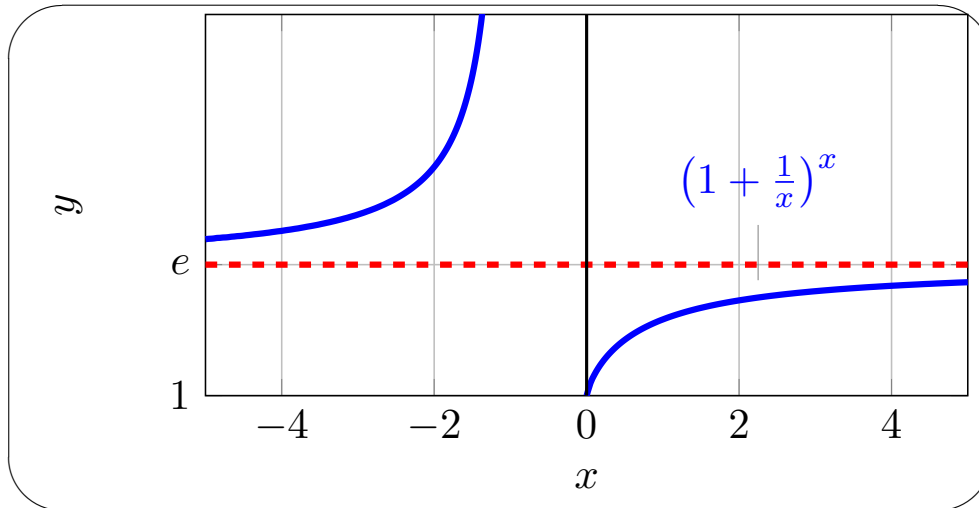
- Sappiamo che per ogni successione $\{a_n\}$ divergente a $+\infty$ o $-\infty$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

- Questo fatto, per la definizione successionale di limite di funzione, implica immediatamente il prossimo limite notevole

Lemma 6.3

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (6.3)$$



Se $\eta(x)$ è una funzione che tende a infinito^a (cioè è un infinito: $\eta(x) \rightarrow \pm\infty$), abbiamo:

$$\left(1 + \frac{1}{\eta(x)}\right)^{\eta(x)} \rightarrow e \quad (6.4)$$

^anon ha importanza a che cosa tenda x

Esempio 6.1: Limiti di funzioni che tendono a e

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2 - 10}\right)^{2x^2 - 10} = e$$

dato che con $\eta(x) = 2x^2 - 10$ abbiamo

$$\eta(x) \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{1/x}\right)^{1/x} = e$$

dato che con $\eta(x) = \frac{1}{x}$ abbiamo

$$\eta(x) \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Dal limite notevole (6.3) se ne possono dedurre altri tre

Corollario 6.4

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1 \quad (6.5)$$

Dimostrazione. Passando ai logaritmi nella (6.3), si ottiene

$$\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

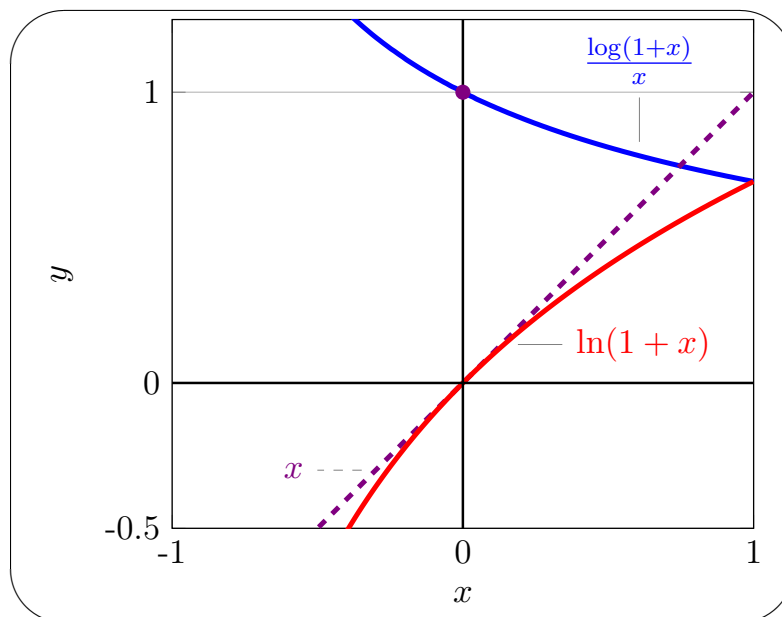
quindi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \log e = 1.$$

Ora se si pone $y = \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \pm\infty$ equivale a $y \rightarrow 0^\pm$, e l'ultimo limite si può quindi riscrivere nella forma seguente:

$$\frac{\log(1+y)}{y} \rightarrow 1 \quad \text{per } y \rightarrow 0.$$

□



Corollario 6.5

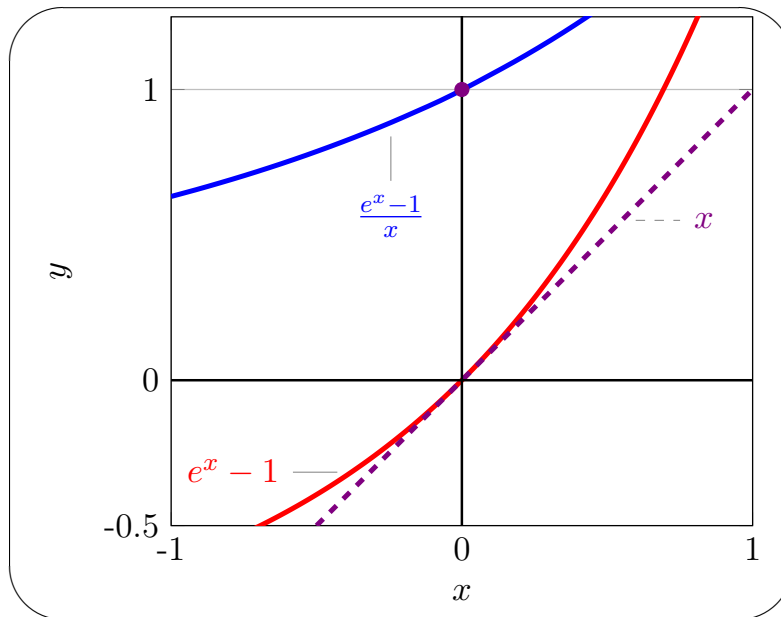
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (6.6)$$

Dimostrazione. Se nella (6.5), poniamo invece $y = e^x - 1$, $y \rightarrow 0$ equivale a $x \rightarrow 0$, e sostituendo si ricava

$$\frac{\log e^x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Passando al reciproco otteniamo il limite notevole.

□



Esempio 6.2: Limite notevole

Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

Poniamo $z = -x$, $x \rightarrow 0$ equivale a $z \rightarrow 0$, e sostituendo si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{-z} = - \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^z - 1}{z}}_{\rightarrow 1} = -1$$

Corollario 6.6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad (6.7)$$

Dimostrazione. Se nella (6.5), poniamo invece $y = (1+x)^\alpha - 1$, con α esponente reale qualsiasi, allora $x \rightarrow 0$ equivale a $y \rightarrow 0$ e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+y)}{y} &= \frac{\log[1+(1+x)^\alpha - 1]}{(1+x)^\alpha - 1} = \frac{\alpha \log(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1} \\ &= \frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ma poiché anche

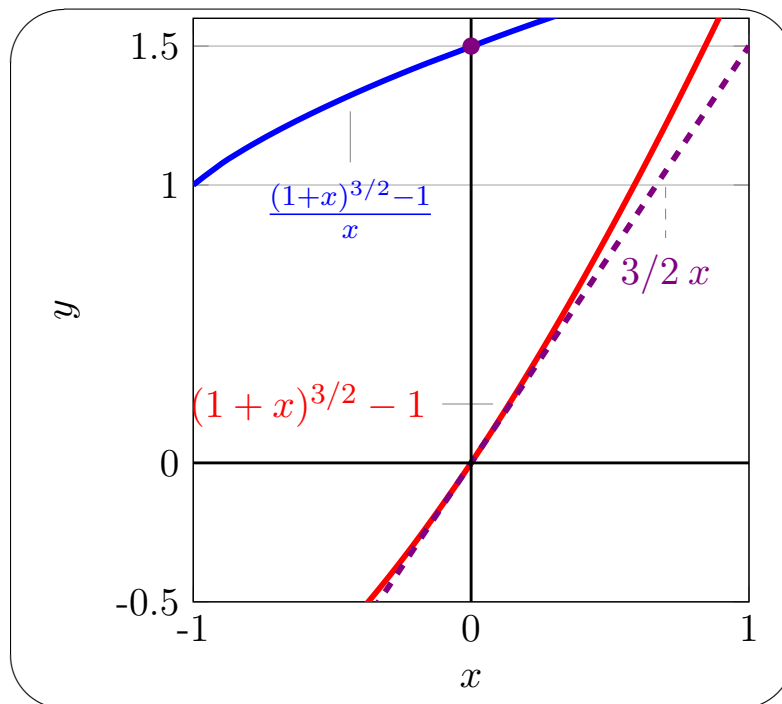
$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

allora

$$\frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Passando al reciproco e poi moltiplicando per α otteniamo il limite notevole.

□



6.2 Stime asintotiche

Definizione 6.7: di funzioni asintotiche

Si dice che due funzioni f , g sono **asintotiche** per $x \rightarrow c$ se

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ per $x \rightarrow c$.

- Il simbolo di asintotico per funzioni gode di tutte le proprietà enunciate per le successioni

Per $x \rightarrow 0$ abbiamo (dai limiti notevoli):

$$\sin x \sim x \quad (6.8a)$$

$$\log(1+x) \sim x \quad (6.8b)$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (6.8c)$$

$$e^x \sim 1+x \quad (6.8d)$$

$$(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad (6.8e)$$

- Le funzioni $\sim x$ si comportano, in prima approssimazione o al primo ordine, come x per $x \rightarrow 0$.

Se $\varepsilon(x)$ è una funzione che tende a zero^a (cioè è un infinitesimo: $\varepsilon(x) \rightarrow 0$), abbiamo:

$$\sin(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x) \quad (6.9a)$$

$$\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x) \quad (6.9b)$$

$$\cos(\varepsilon(x)) \sim 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2(x) \quad (6.9c)$$

$$e^{\varepsilon(x)} \sim 1+\varepsilon(x) \quad (6.9d)$$

$$(1+\varepsilon(x))^\alpha \sim 1+\alpha\varepsilon(x) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad (6.9e)$$

^anon ha importanza a che cosa tenda x

- Le formule (6.1.3) si deducono dalle formule (6.8) semplicemente con un cambio di variabile: si sostituisce x con $\varepsilon(x)$.

Esempio 6.3: Limiti con funzioni asintotiche

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Utilizziamo la stima

$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$$

con

$$\varepsilon(x) = 3(x-1)^2 \text{ e } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 1$$

E allora, per $x \rightarrow 1$, abbiamo

$$e^{3(x-1)^2} - 1 \sim 3(x-1)^2.$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2} = \frac{1}{3}$$

Esempio 6.4: Limiti con funzioni asintotiche

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Utilizziamo la stima

$$\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

con

$$\varepsilon(x) = 2x \text{ e } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Quindi, per $x \rightarrow 0$ abbiamo

$$\log(1+2x) \sim 2x$$

Utilizziamo ora anche la stima

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$

con

$$\varepsilon(x) = 3x \text{ e } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0$$

Quindi, per $x \rightarrow 0$ abbiamo

$$\sin 3x \sim 3x$$

E allora, per $x \rightarrow 0$, abbiamo

$$\frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} \sim \frac{2x}{3x}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Esempio 6.5: Limiti con funzioni asintotiche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x = [+ \infty - \infty]$$

Riscriviamo,

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x = x \left(\sqrt[3]{1 + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} - 1 \right)$$

Utilizziamo la stima

$$\sqrt[3]{1 + \varepsilon(x)} - 1 \sim \frac{1}{3}\varepsilon(x)$$

con

$$\varepsilon(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \text{ e } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

E allora, per $x \rightarrow +\infty$, abbiamo

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \sim x \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \right]$$

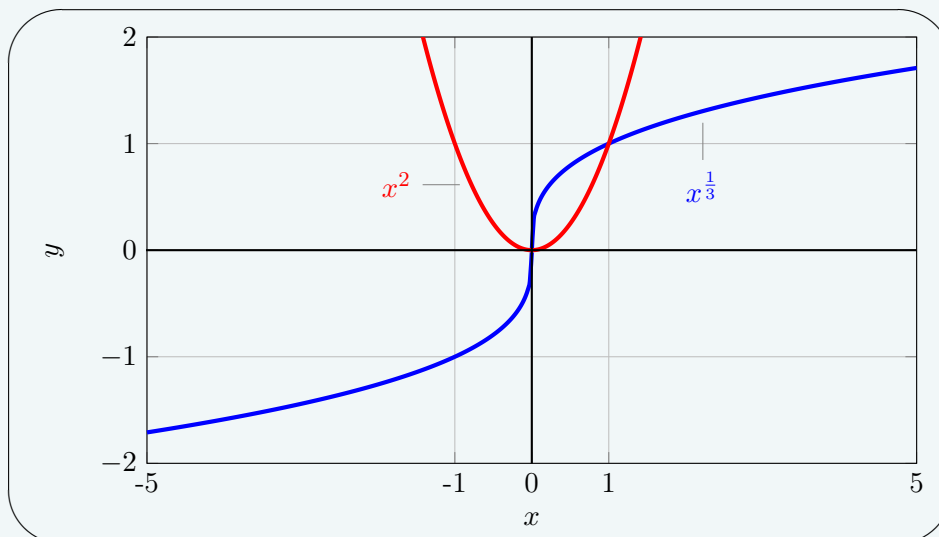
e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = \frac{2}{3}$$

6.3 Stime asintotiche e grafici

- Le stime asintotiche non servono solo per calcolare limiti, ma anche per tracciare il grafico qualitativo di una funzione nell'intorno di un certo punto, oppure per $x \rightarrow \pm\infty$.

Esempio 6.6: Grafici noti



Esempio 6.7: Grafico qualitativo

Vogliamo ora studiare il grafico qualitativo della funzione (la somma delle precedenti due):

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^2 = x^{\frac{1}{3}} + x^2$$

- la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$;
- per $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \sim x^2$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^2}{x^2} = 1$$

Dunque $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$; inoltre il suo grafico sarà simile, per x grande in valore assoluto, a quello di x^2 .

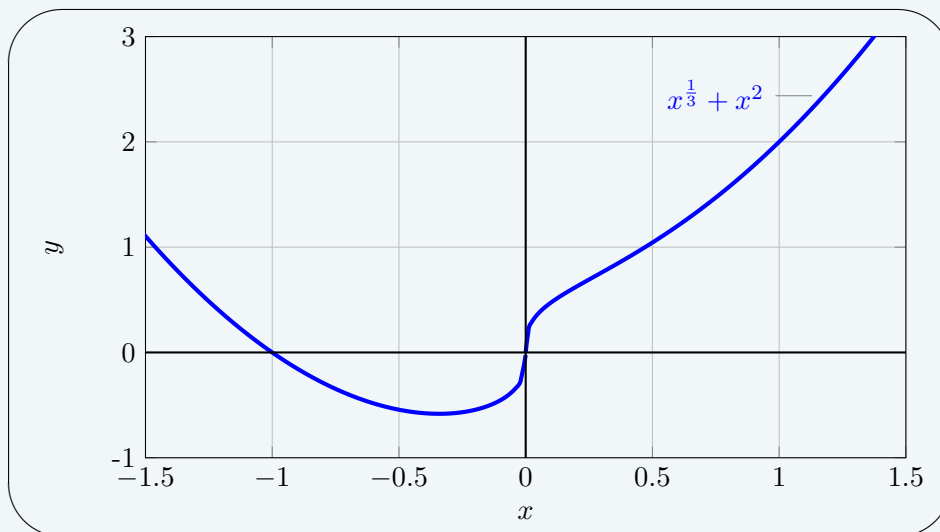
- La funzione inoltre si annulla in $x = 0$ e, per $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim x^{\frac{1}{3}}$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = 1$$

dunque il suo grafico sarà simile, in un intorno di $x = 0$, a quello di $x^{\frac{1}{3}}$ in particolare, avrà tangente verticale nell'origine.

Esempio 6.8: Grafico reale

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^2 = x^{\frac{1}{3}} + x^2$$



- Spesso l'andamento di una funzione nell'intorno di un punto (ad esempio il fatto che abbia tangente verticale o orizzontale) è prevedibile in base a un'opportuna stima asintotica.
- La stima asintotica consente di tracciare il grafico qualitativo di f (nell'intorno del punto) per confronto con quello di una funzione nota (ad esempio, una potenza a esponente razionale).
- Analoghe stime sono utili per $x \rightarrow \pm\infty$.

Crescita di una funzione all'infinito

- Supponiamo di voler tracciare il grafico di una funzione f che, per $x \rightarrow +\infty$ (o $-\infty$) tende a $+\infty$ (o $-\infty$).
- Per descrivere la velocità con cui la funzione tende all'infinito, sono utili le seguenti nozioni: diremo che, per $x \rightarrow +\infty$,

$$f \text{ ha crescita } \begin{cases} \text{sopralineare} \\ \text{lineare} \\ \text{sottolineare} \end{cases} \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \pm\infty \\ m \\ 0 \end{cases} \quad (\text{finito e diverso da } 0)$$

- Analoghe definizioni si danno per $x \rightarrow -\infty$.
- Solo nel caso in cui una funzione ha crescita lineare, è possibile che ammetta asintoto obliquo

Esempio 6.9: Crescita di una funzione all'infinito

Per esempio, con $x \rightarrow +\infty$

- Crescita sopralineare: esponenziali a^x e le potenze x^a con $a > 1$.
- Crescita sottolineare: logaritmi $\log_a x$ e potenze x^a con $0 < a < 1$.

Esempio 6.10: Crescita di una funzione all'infinito

La funzione

$$f(x) = 2x + e^x + e^{\frac{1}{x}}$$

- per $x \rightarrow +\infty$ è asintotica a e^x ; pertanto tende a $+\infty$ con crescita sopralineare;
- per $x \rightarrow -\infty$ è asintotica a $2x$; pertanto tende a $-\infty$ linearmente
- poiché

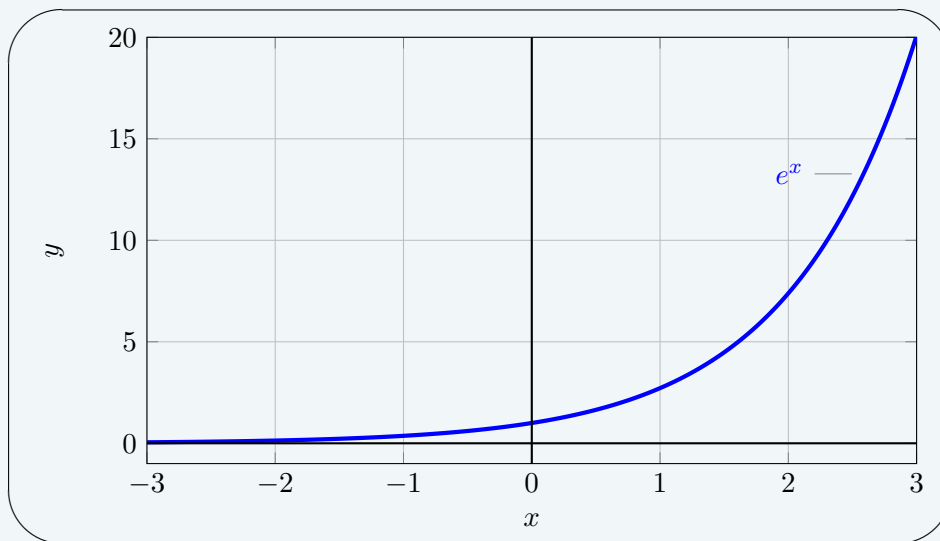
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 1$$

la funzione ha asintoto obliquo

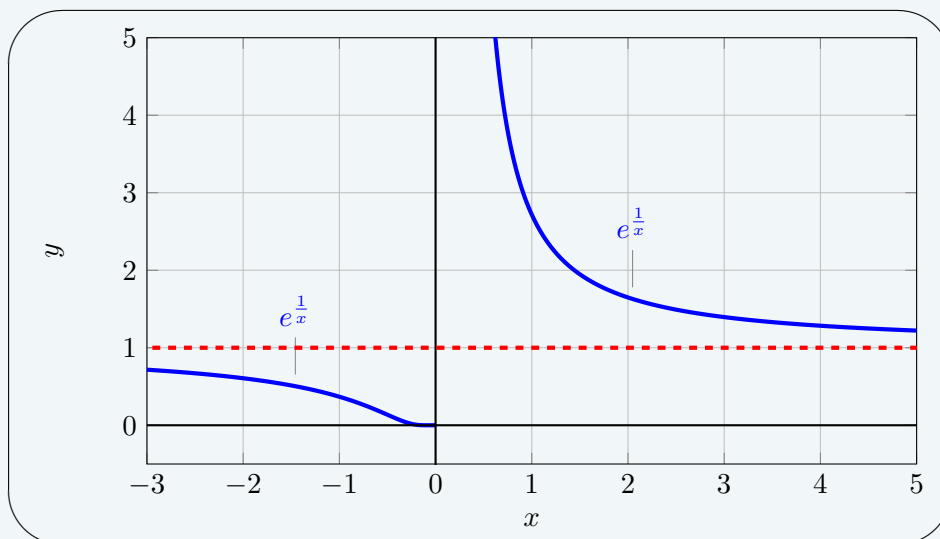
$$y = 2x + 1 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

Esempio 6.11: Grafici

$$f(x) = e^x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

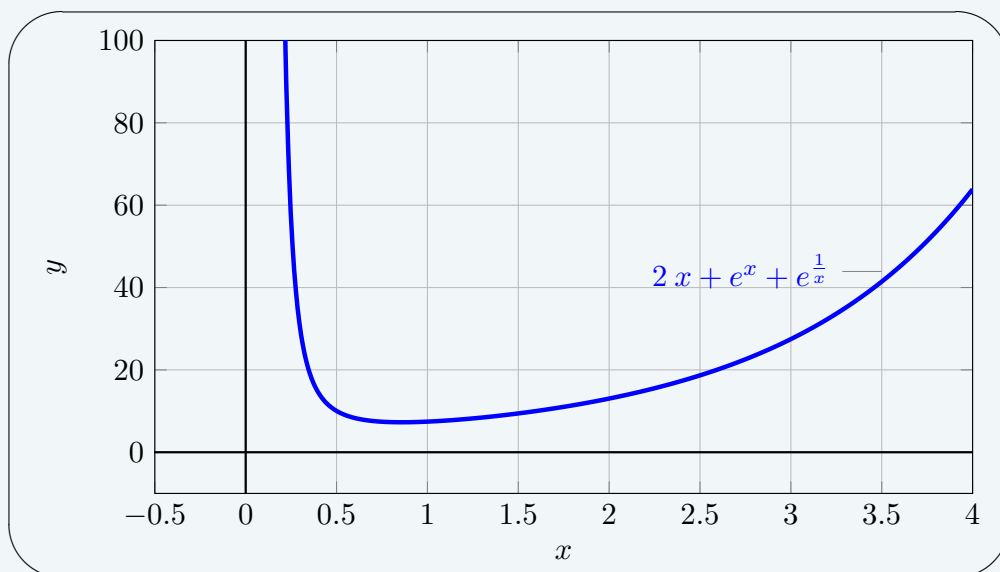


$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

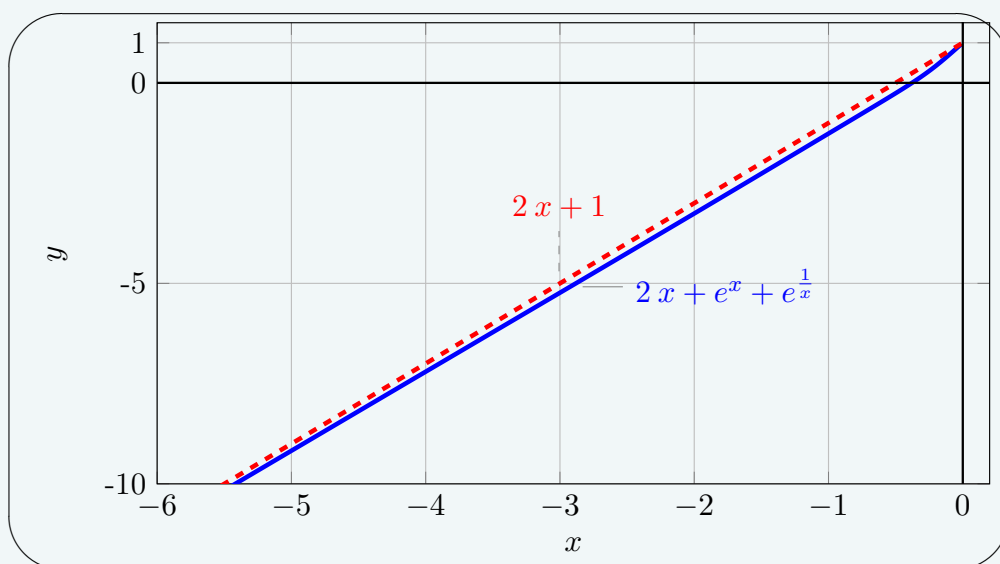


Esempio 6.12: Grafico reale

$$f(x) = 2x + e^x + e^{\frac{1}{x}}, \quad f(x) \sim e^x \text{ per } x \rightarrow +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



$$f(x) = 2x + e^x + e^{\frac{1}{x}}, \quad f(x) \sim 2x \text{ per } x \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$



Sviluppi asintotici

7.1 Simbolo di "o piccolo" e sviluppi asintotici

Definizione 7.1: di o piccolo

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno di $c \in \mathbb{R}^*$, si dice che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow c$$

(si legge " $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ " per $x \rightarrow c$) se e solo se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow c$$

Il simbolo $o(g(x))$ per x che tende a c non denota una particolare funzione $f(x)$, ma qualsiasi funzione $f(x)$ tale che il rapporto tra $f(x)$ e $g(x)$ tende a 0 per x che tende a c .

Esempio 7.1: o piccolo

Ad esempio:

$$x^2 = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{x^2}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$x^3 = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{x^3}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$x^3 = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{x^3}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^{-1/x^2} = o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{e^{-1/x^2}}{x^4} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

- Dalla definizione di funzioni asintotiche, si ha:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow c \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow c$$

in questi casi abbiamo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c$$

dalla definizione di o piccolo possiamo allora scrivere :

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow c$$

Abbiamo il seguente *sviluppo asintotico*:

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow c \iff f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow c$$

- Inoltre si ha:

$$g(x) + f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow c \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c,$$

dato che:

$$\frac{g(x) + f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{f(x)}{g(x)}$$

che tende ad 1 per $x \rightarrow c$ se e solo se $f(x)/g(x)$ tende a 0 per $x \rightarrow c$.

In tali situazioni diremo che $g(x)$ è la **parte principale** della somma $g(x) + f(x)$ e che $f(x)$ è **trascurabile** rispetto a $g(x)$ per $x \rightarrow c$; ovvero che:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow c$$

Abbiamo il seguente *sviluppo asintotico*:

$$g(x) + f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow c \iff f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow c$$

- Segue dalla definizione di o piccolo che con tre funzioni abbiamo:

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow c \iff \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c$$

- Il simbolo di "o piccolo" si comporta al seguente modo con i prodotti:

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

$$o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

Esempio 7.2: o piccolo e prodotti

Ad esempio per $x \rightarrow c$:

$$x \cdot o(x^2) = o(x^3), \quad \frac{o(x^3)}{x} = o(x^2), \quad o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$$

Alcune proprietà del simbolo o piccolo mostrate con degli esempi:

$$o(x) \pm o(x) = o(x), \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$o(ax) = o(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$ao(x) = o(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$o(x) + o(x^2) = o(x), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$o(x) + o(x^2) = o(x^2), \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

Definizione 7.2: di $o(1)$

Una funzione f si dice infinitesima per $x \rightarrow c$ e si scrive

$$f(x) = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow c \quad \text{se} \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow c$$

Esempio 7.3: $o(1)$

Ad esempio:

$$\sqrt{x} = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{dato che} \quad \frac{\sqrt{x}}{1} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$x^{-2} = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{dato che} \quad \frac{x^{-2}}{1} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

- Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow c} |f(x) - \ell| = 0$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \iff f(x) = \ell + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow c$$

l'ultima espressione si legge “ $f(x)$ è somma di ℓ e di una funzione infinitesima per $x \rightarrow c$ ”

Esempio 7.4: $o(1)$

Ad esempio:

$$x^2 = x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 1 \quad \text{dato che} \quad \frac{x^2}{x} = x \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 1$$

$$x^2 + 3x = x(3 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{dato che} \quad \frac{x^2 + 3x}{x} = x + 3 \rightarrow 3 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$x^2 + 3x = x^2(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{dato che} \quad \frac{x^2 + 3x}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{x}(1+o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

dato che $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1+\frac{5}{x}} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$

Alcune proprietà del simbolo $o(1)$:

$$o(1) \pm o(1) = o(1), \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$o(1) \cdot o(1) = o(1), \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$c \cdot o(1) = o(1), \quad \text{per } x \rightarrow c, \quad c \neq 0$$

$$(1+o(1)) \cdot (1+o(1)) = 1+o(1), \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$\frac{1}{1+o(1)} = 1+o(1), \quad \text{per } x \rightarrow c$$

$$\frac{c}{1+o(1)} - c = o(1), \quad \text{per } x \rightarrow c, \quad c \neq 0$$

Dato che

$$\frac{c}{1+o(1)} - c = c \left(\frac{1}{1+o(1)} - 1 \right) = c(1+o(1) - 1) = o(1)$$

Esempio 7.5: $o(1)$

Abbiamo

$$(x+o(1))^2 = x^2(1+o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{dato che} \quad \frac{(x+o(1))^2}{x^2} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

7.2 Sviluppi asintotici derivanti dai limiti notevoli

Abbiamo visto che valgono i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

e di conseguenza valgono le seguenti **equivalenze asintotiche** per $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \log(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

Vediamo ora come ottenere gli **sviluppi asintotici** a partire dai limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Quindi per $x \rightarrow 0$:

$$\frac{\sin x}{x} - 1 \rightarrow 0, \quad \frac{\sin x - x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad \sin x - x = o(x)$$

che fornisce lo sviluppo asintotico:

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi per $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \rightarrow 0, \quad \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{2x^2} \rightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad 2(1 - \cos x) - x^2 = o(2x^2)$$

che fornisce lo sviluppo asintotico:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Quindi per $x \rightarrow 0$:

$$\frac{\log(1+x)}{x} - 1 \rightarrow 0, \quad \frac{\log(1+x) - x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad \log(1+x) - x = o(x)$$

che fornisce lo sviluppo asintotico:

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Quindi per $x \rightarrow 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} - 1 \rightarrow 0, \quad \frac{e^x - 1 - x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{quindi} \quad e^x - 1 - x = o(x)$$

che fornisce lo sviluppo asintotico:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Quindi per $x \rightarrow 0$:

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha \rightarrow 0 \quad \frac{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{quindi } (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = o(x)$$

che fornisce lo sviluppo asintotico:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

- Questi sviluppi asintotici si possono generalizzare

Se $\varepsilon(x)$ è una funzione che tende a zero, cioè è un infinitesimo (non ha importanza a che cosa tenda x), abbiamo i seguenti **sviluppi asintotici** derivanti dai limiti notevoli.

Per $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, abbiamo:

$$\sin(\varepsilon(x)) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad (7.1a)$$

$$\cos(\varepsilon(x)) = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2(x) + o(\varepsilon^2(x)) \quad (7.1b)$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad (7.1c)$$

$$e^{\varepsilon(x)} = 1 + \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad (7.1d)$$

$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha = 1 + \alpha \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x)) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad (7.1e)$$

Teorema degli zeri e metodo della bisezione

8.1 Zeri di una funzione

Data una funzione f , siamo interessati alla risoluzione dell'equazione:

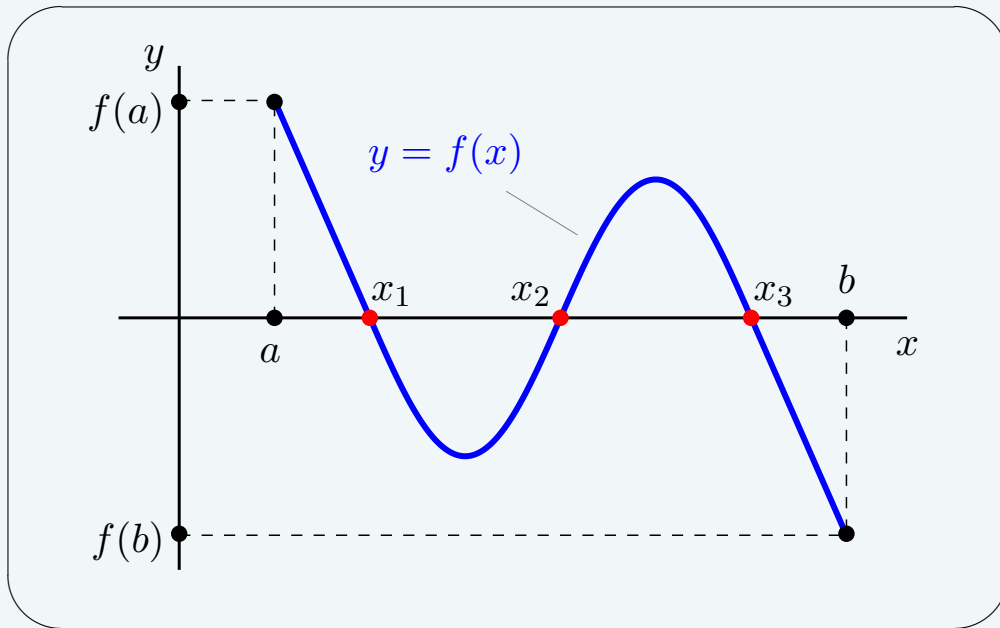
$$f(x) = 0 \tag{8.1}$$

ovvero trovare gli **zeri** di f . Gli zeri sono le soluzioni dell'equazione (8.1), ovvero i punti c del dominio della funzione in cui $f(c) = 0$.

- Quando f è un polinomio di grado ≤ 4 esistono formule che forniscono le soluzioni della (8.1). Se però f è un polinomio di grado > 4 o una funzione più complicata, salvo casi particolarmente fortunati, non esistono formule per le soluzioni dell'equazione (8.1).
- Geometricamente, risolvere l'equazione (8.1) significa determinare le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico di $y = f(x)$ e l'asse delle ascisse. Possono esserci: **infinite soluzioni**, **numero finito di soluzioni**, **nessuna soluzione**.

Esempio 8.1: Zeri di una funzione

Consideriamo la funzione f col seguente grafico:

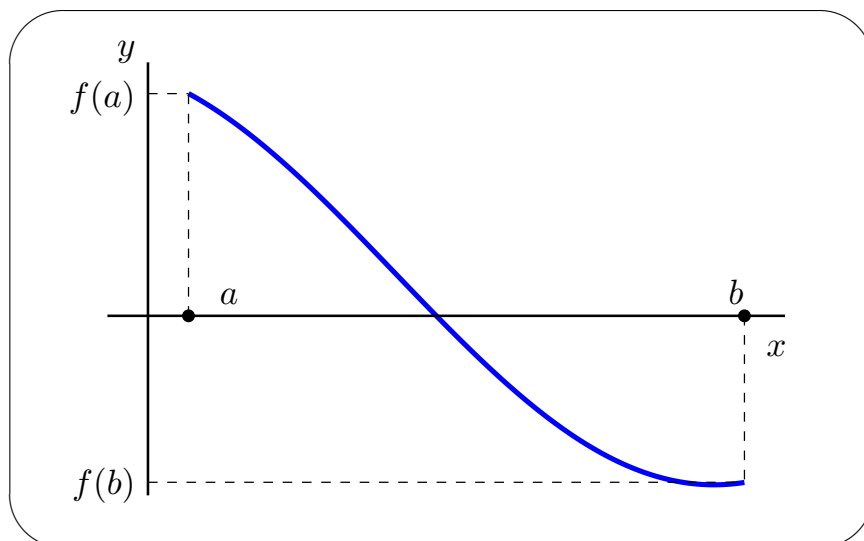


l'equazione $f(x) = 0$ ha 3 soluzioni nell'intervallo $[a, b]$, ossia la funzione f ha 3 zeri, x_1 , x_2 e x_3 .

Teorema 8.1: degli zeri (o di Bolzano)

Se una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Se f è anche strettamente monotona allora lo zero c è unico.

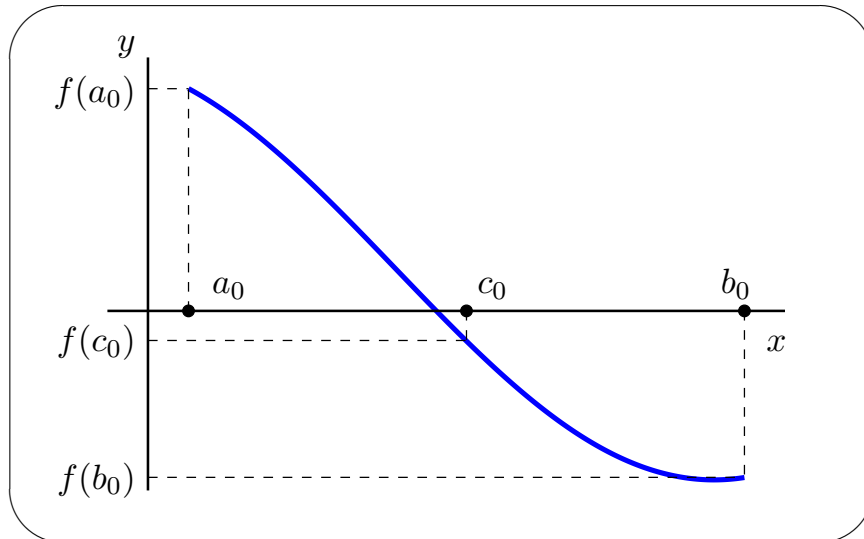
- L'idea della dimostrazione è di costruire due successioni che convergano allo zero della funzione. Per capire come costruirle, consideriamo ad esempio una funzione con $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$:



- Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e calcoliamo

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad \text{il punto medio dell'intervallo } [a_0, b_0].$$

Nell'esempio precedente abbiamo:



Se $f(c_0) = 0$ abbiamo trovato uno zero. Se $f(c_0) \neq 0$ guardiamo il segno di $f(a_0) \cdot f(c_0)$ e procediamo come segue:

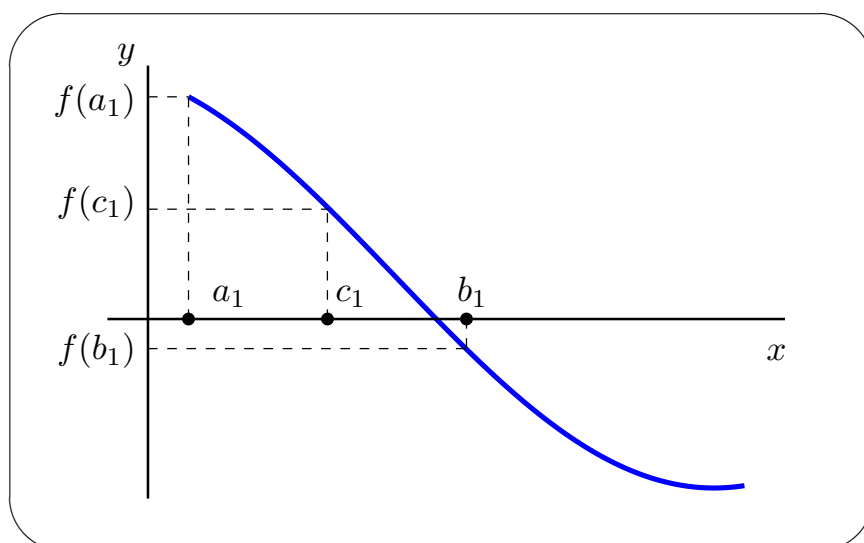
$$\begin{cases} \text{se } f(a_0) \cdot f(c_0) < 0 \\ \text{se } f(a_0) \cdot f(c_0) > 0 \end{cases} \quad \text{creiamo } [a_1, b_1] \quad \begin{cases} \text{con } a_1 = a_0, \quad b_1 = c_0 \\ \text{con } a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0 \end{cases}$$

Nell'esempio precedente abbiamo $f(a_0) \cdot f(c_0) < 0$, quindi abbiamo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$.

- Con a_1 e b_1 , calcoliamo:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad \text{il punto medio dell'intervallo } [a_1, b_1].$$

Nell'esempio precedente abbiamo:



Se $f(c_1) = 0$ abbiamo trovato uno zero. Se $f(c_1) \neq 0$ guardiamo il segno di $f(a_1) \cdot f(c_1)$ e procediamo come segue:

$$\begin{cases} \text{se } f(a_1) \cdot f(c_1) < 0 \\ \text{se } f(a_1) \cdot f(c_1) > 0 \end{cases} \quad \text{creiamo } [a_2, b_2] \quad \begin{cases} \text{con } a_2 = a_1, \quad b_2 = c_1 \\ \text{con } a_2 = c_1, \quad b_2 = b_1 \end{cases}$$

Nell'esempio precedente abbiamo $f(a_1) \cdot f(c_1) > 0$, quindi abbiamo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$.

- Generalizziamo ora questa idea nella prova del teorema.

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti due successioni definite per ricorrenza (in maniera ricorsiva):

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & a_{n+1} &= \begin{cases} a_n & \text{se } f(a_n) \cdot f(c_n) < 0 \\ c_n & \text{se } f(a_n) \cdot f(c_n) > 0 \end{cases} & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_0 &= b, & b_{n+1} &= \begin{cases} c_n & \text{se } f(a_n) \cdot f(c_n) < 0 \\ b_n & \text{se } f(a_n) \cdot f(c_n) > 0 \end{cases} & \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

dove

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le due successioni creano una sequenza di intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti proprietà:

- 1) Abbiamo $a_n \leq a_{n+1}$, quindi la successione $\{a_n\}$ è crescente e, dato che $a_n \leq b$, $\forall n$, è anche limitata. Abbiamo inoltre $b_n \geq b_{n+1}$, quindi la successione $\{b_n\}$ è decrescente e, dato che $b_n \geq a$, $\forall n$, è anche limitata.
- 2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ (ciascun intervallo è lungo la metà del precedente)
- 3) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ (per come sono stati scelti a_n e b_n a ogni passo)

Per il punto 1), possiamo allora dedurre che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ abbiano limite finito grazie al teorema di monotonia delle successioni. Quindi:

$$a_n \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Dal punto 2) deduciamo che:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty, \quad \text{e perciò} \quad \ell_2 = \ell_1 = \ell$$

Per la continuità di f , abbiamo allora che:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \rightarrow (f(\ell))^2 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Mentre dal punto 3) e dal teorema della permanenza del segno deduciamo $(f(\ell))^2 \leq 0$. Deve perciò essere $f(\ell) = 0$ e così ℓ è lo zero cercato, ovvero $c = \ell$.

□

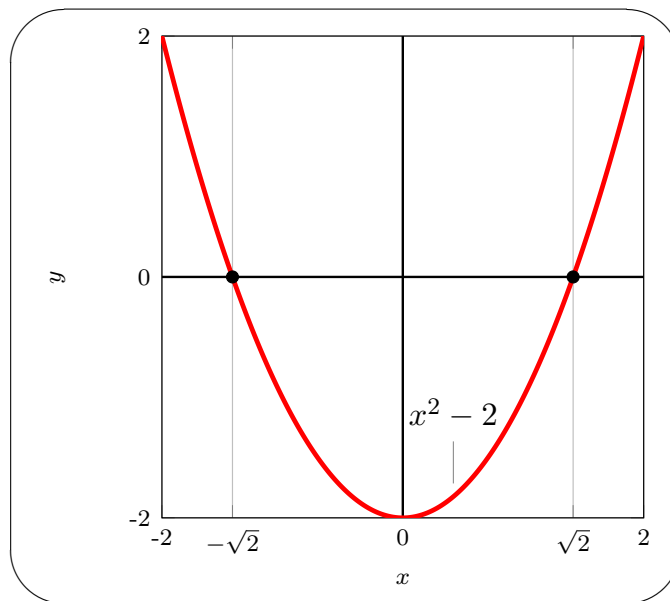
- Abbiamo dimostrato:

$$\begin{aligned} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } [a, b] \text{ e } f(a) \cdot f(b) < 0 \\ \Rightarrow \text{esiste } c \in [a, b] \text{ tale che } f(c) = 0 \end{aligned}$$

quindi “ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ ” è condizione sufficiente a “esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$ ” e “esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$ ” è una condizione necessaria a “ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ ”. L’implicazione non funziona nell’altra direzione:

$$\begin{aligned} \text{esiste } c \in [a, b] \text{ tale che } f(c) = 0 \\ \nRightarrow f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } [a, b] \text{ e } f(a) \cdot f(b) < 0 \end{aligned}$$

Basta ad esempio considerare $f(x) = x^2 - 2$ nell’intervallo $[-2, 2]$. Abbiamo $f(-2) = 2$ e $f(2) = 2$ quindi $f(a) \cdot f(b) \not< 0$ ma esistono gli zeri della funzione:



Quindi il teorema fornisce condizioni **sufficienti** (ma non necessarie) per l’esistenza di uno zero di una funzione.

- La prova del teorema è di tipo costruttivo, ovvero abbiamo costruito due successioni che tendono a uno zero della funzione (**prova costruttiva/algoritmo**). Questo algoritmo si chiama **metodo della bisezione**.

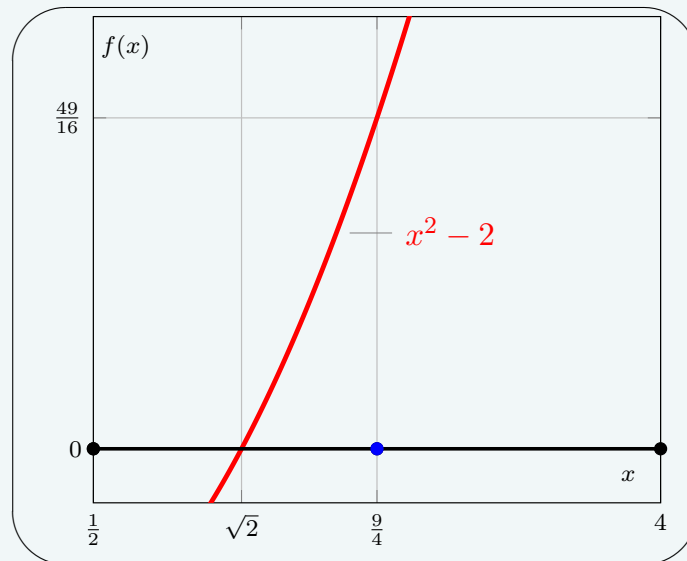
Se in $[a, b]$ la funzione f ha più zeri, il procedimento non indica quale di essi venga determinato. Lo zero trovato dipende dall’intervallo $[a, b]$ considerato in input e può richiedere infinite iterazioni per essere trovato. Interrompendo il procedimento però, come vedremo, abbiamo una stima dello zero e dell’errore commesso.

8.2 Metodo della bisezione

Esempio 8.2: Metodo della bisezione

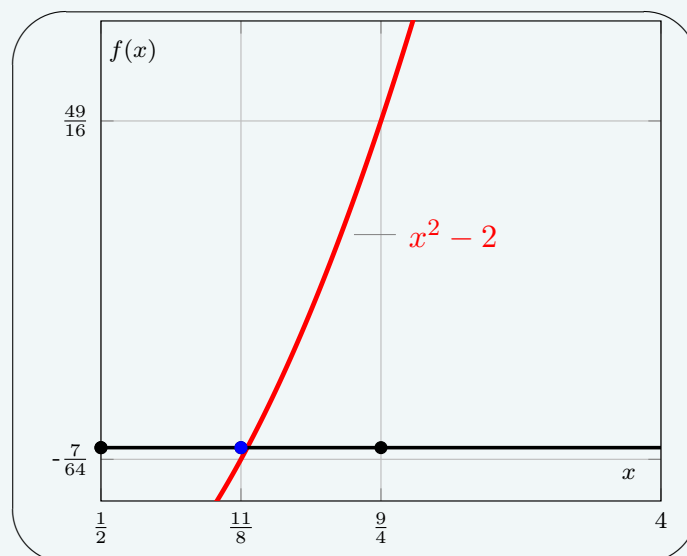
- Cerchiamo uno zero della funzione continua $f(x) = x^2 - 2$ nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 4]$, ovvero cerchiamo il valore di $\sqrt{2}$. Inizializzazione, con $n = 0$ abbiamo:

$$[a_0, b_0] = \left[\frac{1}{2}, 4\right], \quad f(a) = -\frac{7}{4}, \quad f(b) = 14 \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{9}{4} \text{ e } f(c_0) = \frac{49}{16}$$



- Iterazione $n = 1$, abbiamo:

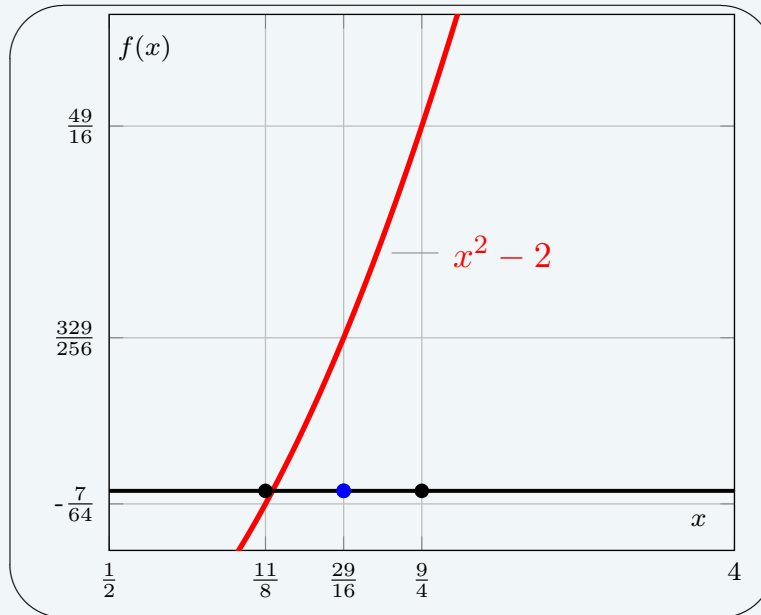
$$[a_1, b_1] = \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right], \quad f(a_1) = -\frac{7}{4}, \quad f(b_1) = \frac{49}{16} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{11}{8} \text{ e } f(c_1) = -\frac{7}{64}$$



Esempio 8.3: Metodo della bisezione

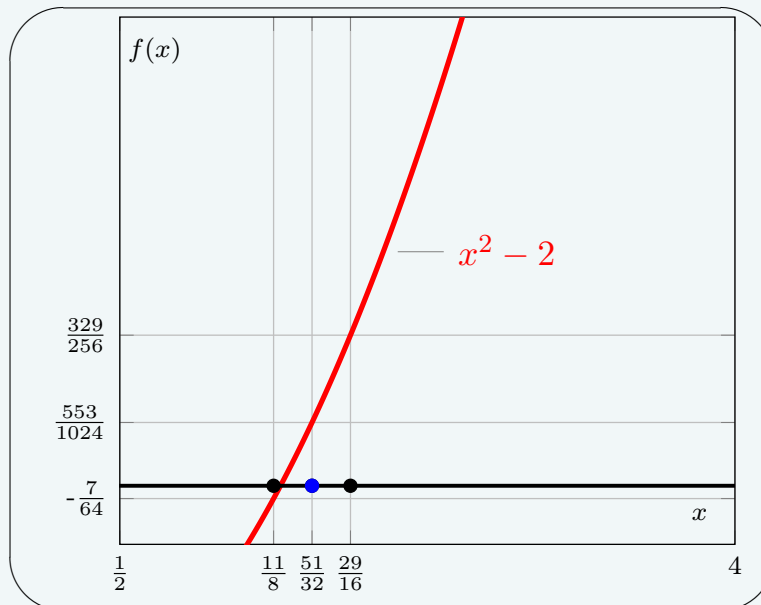
- Iterazione $n = 2$, abbiamo:

$$[a_2, b_2] = \left[\frac{11}{8}, \frac{9}{4} \right], \quad f(a_2) = -\frac{7}{64}, \quad f(b_2) = \frac{49}{16} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{29}{16} \text{ e } f(c_2) = \frac{329}{256}$$



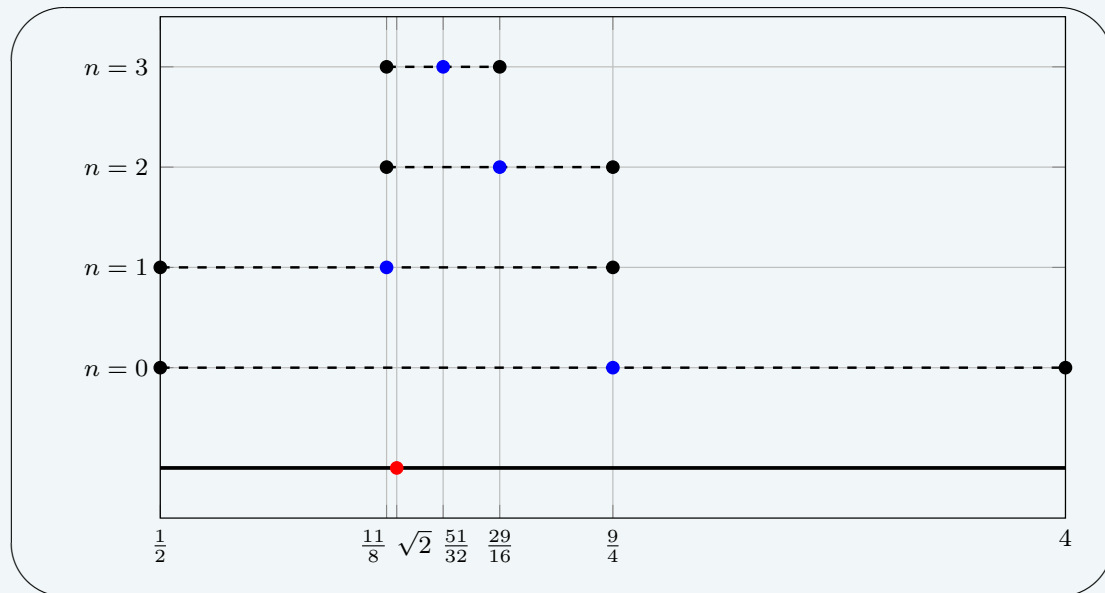
- Iterazione $n = 3$, abbiamo:

$$[a_3, b_3] = \left[\frac{11}{8}, \frac{29}{16} \right], \quad f(a_3) = -\frac{7}{64}, \quad f(b_3) = \frac{329}{256} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{51}{32} \text{ e } f(c_3) = \frac{553}{1024}$$



Esempio 8.4: Intervalli del metodo della bisezione

Facendo il grafico dei valori ottenuti nell'esercizio precedente abbiamo i seguenti intervalli e stime di $\sqrt{2}$:

**8.2.1 Stima degli errori del metodo della bisezione**

- All'iterazione n , abbiamo:

$$c \in [a_n, b_n]$$

ovvero lo zero si trova all'interno dell'intervallo n -esimo. Dato che arrestando il procedimento dopo n passi, a_n approssima lo zero per difetto e b_n approssima lo zero per eccesso. Quindi:

$$a_n \leq c \leq b_n$$

- La stima del valore c all'iterazione n è:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

ovvero il punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$.

- L'errore assoluto ε_n commesso all'iterazione n è:

$$\varepsilon_n = |c_n - c|$$

Il valore di c è ignoto quindi ci serve un modo per analizzare i valori degli errori che sia indipendente da c .

- Possiamo stimare l'errore all'iterazione n come segue:

$$\varepsilon_n = |c_n - c| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

questo deriva da:

- la lunghezza dell'intervallo all'iterazione n è $\frac{b-a}{2^n}$

- il punto medio di questo intervallo è c_n e c si trova all'interno dell'intervallo stesso
- la distanza di un qualsiasi punto c dal centro dell'intervallo è minore o uguale alla lunghezza dell'intervallo stesso

Se $n \rightarrow +\infty$ allora $\varepsilon_n \rightarrow 0$, ovvero l'errore tende a zero se n tende all'infinito.

- All'iterazione n , possiamo migliorare la stima dell'errore come segue:

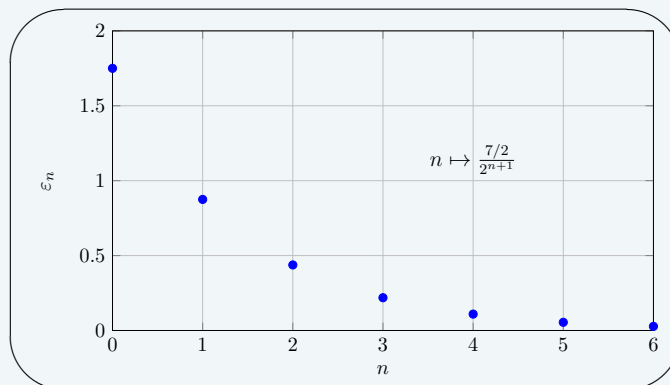
$$\varepsilon_n = |c_n - c| \leq \frac{1}{2} \frac{b - a}{2^n} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

ovvero metà della lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$, dato che $c \in (a_n, c_n)$ oppure $c \in (c_n, b_n)$.

Esempio 8.5: Stima degli errori del metodo della bisezione ($\sqrt{2} = 1.414213562\dots$)

Riprendiamo l'esercizio precedente con $b - a = \frac{7}{2}$, nelle prime 6 iterazioni abbiamo:

iterazione	a_n	c_n	b_n	stima di $\sqrt{2}$	ε_n
$n = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	4	2.25	$\leq \frac{7/2}{2^1} = 1.75$
$n = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{9}{4}$	1.375	$\leq \frac{7/2}{2^2} = 0.875$
$n = 2$	$\frac{11}{8}$	$\frac{29}{16}$	$\frac{9}{4}$	1.8125	$\leq \frac{7/2}{2^3} = 0.4375$
$n = 3$	$\frac{11}{8}$	$\frac{51}{32}$	$\frac{29}{16}$	1.59375	$\leq \frac{7/2}{2^4} = 0.21875$
$n = 4$	$\frac{11}{8}$	$\frac{95}{64}$	$\frac{51}{32}$	1.484375	$\leq \frac{7/2}{2^5} = 0.109375$
$n = 5$	$\frac{11}{8}$	$\frac{183}{128}$	$\frac{95}{64}$	1.4296875	$\leq \frac{7/2}{2^6} = 0.0546875$



- Al fine di garantire che l'errore commesso non superi una data tolleranza δ , ovvero imporre $\varepsilon_n \leq \delta$, occorre eseguire $n(\delta)$ iterazioni dove $n(\delta)$ è il più piccolo intero che soddisfa la disuguaglianza:

$$n(\delta) > \log_2 \left(\frac{b - a}{\delta} \right) - 1$$

ottenuta ricavando $n(\delta)$ dalla stima dell'errore massimo:

$$\delta = \frac{b-a}{2^{(n(\delta)+1)}}$$

quindi

$$2^{(n(\delta)+1)} = \frac{b-a}{\delta} \quad \text{e} \quad n(\delta) + 1 = \log_2 \left(\frac{b-a}{\delta} \right)$$

Chiaramente se $\delta \rightarrow 0$ allora $n(\delta) \rightarrow +\infty$, e più la tolleranza sull'errore è piccola maggiore è il numero di iterazioni per garantirla.

- Se volessimo ridurre la tolleranza di una cifra decimale, ossia passare da δ a $\frac{\delta}{10}$ avremmo:

$$n(\delta) \approx \log_2 \left(\frac{b-a}{\delta} \right) - 1 \quad \text{e} \quad n\left(\frac{\delta}{10}\right) \approx \log_2 \left(\frac{b-a}{\frac{\delta}{10}} \right) - 1$$

dato che

$$\log_2 \left(\frac{b-a}{\frac{\delta}{10}} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{b-a}{\delta} \cdot 10 \right) - 1 = \underbrace{\log_2 \left(\frac{b-a}{\delta} \right) - 1}_{\approx n(\delta)} + \log_2 10$$

il numero di iterazioni aggiuntive è indipendente dall'intervallo $[a, b]$, ed è uguale a

$$\log_2 10 \approx 3,32$$

Servono in media più di tre bisezioni per migliorare di una cifra significativa l'accuratezza della stima, **la convergenza è quindi lenta**.

Esempio 8.6: Metodo della bisezione (stima degli errori)

Sempre per l'esempio precedente:

- nel caso si volesse una tolleranza (errore massimo) $\delta = 0.00001 = 10^{-5}$:

$$n(10^{-5}) > \log_2 \left(\frac{7/2}{10^{-5}} \right) - 1 = 17.416 \dots \quad \text{quindi } n(10^{-5}) = 18$$

- nel caso si volesse una tolleranza (errore massimo) $\delta = 0.000001 = 10^{-6}$:

$$n(10^{-6}) > \log_2 \left(\frac{7/2}{10^{-6}} \right) - 1 = 20.738 \dots \quad \text{quindi } n(10^{-6}) = 21$$

Vogliamo ora capire con che “velocità” decresca l'errore comparando gli errori di due iterazioni consecutive. Questa stima ci fornisce delle informazioni sulla qualità dell'algoritmo, ovvero vogliamo determinare la “**velocità di convergenza**” dell'algoritmo.

- Consideriamo l'errore massimo, che denotiamo ε_n^* abbiamo:

$$\varepsilon_n^* = \frac{b-a}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_n \leq \varepsilon_n^*$$

quindi

$$\frac{\varepsilon_{n+1}^*}{\varepsilon_n^*} = \frac{1}{2} \quad \text{dato che} \quad \frac{\frac{b-a}{2^{n+2}}}{\frac{b-a}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

ovvero l'errore massimo a ogni iterazione si dimezza. Di conseguenza abbiamo:

$$\underbrace{\varepsilon_{n+1}^*}_{\geq \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_n^*}_{\geq \varepsilon_n}$$

L'errore assoluto massimo del metodo della bisezione ad ogni passo è proporzionale all'errore assoluto massimo nel passaggio precedente. **La velocità di convergenza è lineare.**

- Abbiamo per ogni terna c_{n+1}, c_n e c_{n-1} , con $n \geq 1$, il seguente legame:

$$c_{n+1} = \frac{c_{n-1} + c_n}{2} \tag{8.2}$$

ovvero la stima c_{n+1} è il punto medio dell'intervallo che ha come estremi c_{n-1} e c_n . Scriviamo ora:

$$c_{n+1} = c + \varepsilon_{n+1}, \quad c_n = c + \varepsilon_n, \quad c_{n-1} = c + \varepsilon_{n-1}$$

ora sostituendo nell'equazione (8.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} c + \varepsilon_{n+1} &= \frac{c + \varepsilon_n + c + \varepsilon_{n-1}}{2} = \frac{2c + \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}{2} \\ &= c + \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

quindi

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon_n \left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n} + 1 \right)$$

Il termine $\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$, ovvero il rapporto fra gli errori di due iterazioni consecutive, può essere un numero piccolo o grande a piacere (l'errore a ogni iterazione può infatti crescere o decrescere).

Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi

9.1 Teorema di Weierstrass

- Il seguente teorema stabilisce condizioni **sufficienti ma non necessarie** affinché una funzione abbia massimo e minimo.

Teorema 9.1: di Weierstrass

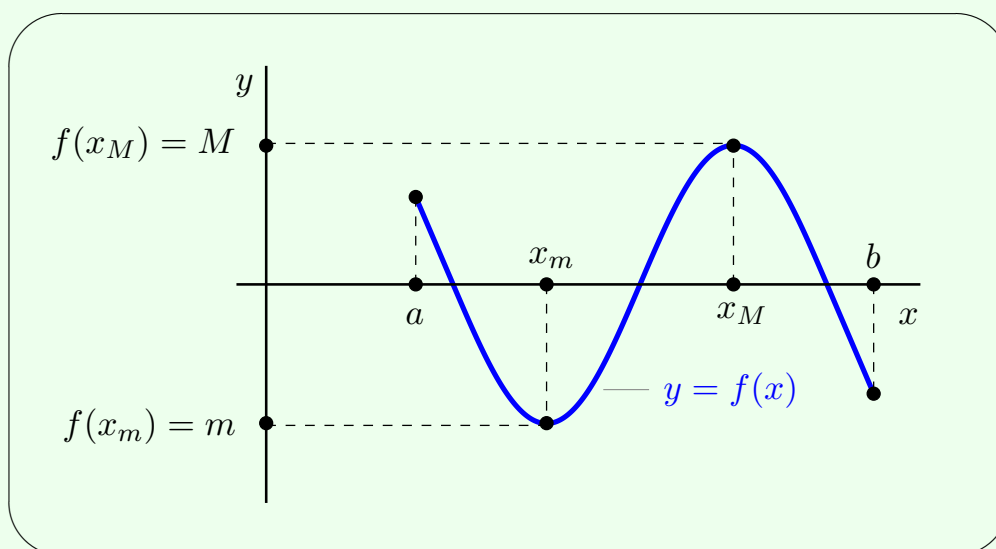
Se una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ allora ha massimo M e minimo m in $[a, b]$.

Sotto le ipotesi del teorema esistono:

x_m e $x_M \in [a, b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in [a, b]$

Si dice che x_m è **punto di minimo** per f e $m = f(x_m)$ è il **minimo** di f .

Si dice che x_M è **punto di massimo** per f e $M = f(x_M)$ è il **massimo** di f .



Proprietà dell'estremo superiore/inferiore

- Dati due sottoinsiemi E_1, E_2 non vuoti di $\mathbb{R}$ abbiamo:

$$\sup(E_1 \cup E_2) = \max(\sup E_1, \sup E_2)$$

Questa proprietà è vera per insiemi sia limitati che illimitati. Se uno o entrambi gli insiemi sono superiormente illimitati abbiamo: $\sup(E_1 \cup E_2) = +\infty$. Per l'estremo inferiore abbiamo:

$$\inf(E_1 \cup E_2) = \min(\inf E_1, \inf E_2)$$

Dimostrazione.

Proveremo che f ammetta massimo in $[a, b]$. Consideriamo la funzione:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{e poniamo} \quad \ell = \sup_{[a, b]} f$$

Si tratta ora di dimostrare che:

- i) ℓ assuma valore finito, ovvero $\ell \in \mathbb{R}$;
- ii) ℓ sia uguale a $f(x_0)$ per un qualche $x_0 \in [a, b]$ (e quindi ℓ è il massimo e x_0 è il punto di massimo).

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due intervalli uguali: I_1 e I_2 ; per le proprietà dell'estremo superiore abbiamo:

$$\sup_{[a, b]} f = \max\left(\sup_{I_1} f, \sup_{I_2} f\right) \quad \text{ovvero} \quad \sup_{[a, b]} f = \sup_{I_1} f \quad \text{oppure} \quad \sup_{[a, b]} f = \sup_{I_2} f$$

Quindi per uno dei due intervalli, che chiamiamo $[a_1, b_1]$, sarà vero che:

$$\ell = \sup_{[a_1, b_1]} f$$

Suddividiamo ora $[a_1, b_1]$ in due intervalli uguali; per uno di questi, che chiamiamo $[a_2, b_2]$, sarà vero che:

$$\ell = \sup_{[a_2, b_2]} f$$

Procedendo per dicotomia, così facendo, costruiamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$, ciascuno contenuto nei precedenti, con le proprietà:

- 1) la successione $\{a_n\}$ è monotona non decrescente e limitata e la successione $\{b_n\}$ monotona non crescente e limitata;
- 2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$;
- 3) $\ell = \sup_{[a_n, b_n]} f$ (l'estremo superiore di f si trova nell'intervallo $[a_n, b_n]$)

Per lo stesso ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema degli zeri (che utilizza il teorema di monotonia delle successioni), dai punti 1) e 2) segue che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono ad uno stesso limite $x_0 \in [a, b]$:

$$a_n \rightarrow x_0 \text{ e } b_n \rightarrow x_0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Procediamo ora per casi. □

Dimostrazione. Caso 1: $\ell \in \mathbb{R}$

Se $\ell \in \mathbb{R}$, per ogni n esiste un punto $t_n \in [a_n, b_n]$ tale che:

$$\ell - \frac{1}{n} < f(t_n) \leq \ell \quad (9.1)$$

Infatti, poiché $\ell - \frac{1}{n}$ è minore di ℓ che è il minimo dei maggioranti dei valori di $f(x)$ in $[a_n, b_n]$, $\ell - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante, quindi esiste $t_n \in [a_n, b_n]$ con la proprietà (9.1).

Poiché $t_n \in [a_n, b_n]$, e abbiamo:

$$a_n \rightarrow x_0 \text{ e } b_n \rightarrow x_0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ allora } t_n \rightarrow x_0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

per il teorema del confronto. Ancora per il teorema del confronto, la (9.1) dà allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = \ell$$

D'altro canto, poiché f è continua e $t_n \rightarrow x_0$ si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = f(x_0) \quad \text{perciò} \quad f(x_0) = \ell.$$

Allora, poiché ℓ è il sup dei valori di f in $[a, b]$, ℓ è il **massimo** di f in $[a, b]$, ed è assunto nel punto x_0 , **punto di massimo**. In questo caso perciò il teorema è dimostrato.

Caso 2: $\ell = +\infty$

Se $\ell = +\infty$, per ogni n esiste un punto $t_n \in [a_n, b_n]$ tale che:

$$f(t_n) \geq n \quad (9.2)$$

Ragionando come sopra si prova che $t_n \rightarrow x_0$ per un certo $x_0 \in [a, b]$. Poiché f è continua in x_0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = f(x_0)$$

ma per la (9.2) abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = +\infty$$

che è un **assurdo** dato che in x_0 la funzione deve avere un valore finito. Quindi questo caso non si può verificare.

Analogamente si prova che la funzione ammetta minimo in $[a, b]$. □

La dimostrazione è una prova di esistenza costruttiva (simile a quella del teorema degli zeri) che però non può essere utilizzata in maniera algoritmica dato che, dopo ogni bisezione, non è noto a priori l'intervallo a cui è associato l'estremo superiore o inferiore.

Le ipotesi del teorema di Weierstrass sono tutte essenziali

1. L'intervallo deve essere chiuso

Consideriamo come controesempio:

$$f(x) = x \quad \text{con } x \in (0, 1)$$

La funzione è continua su un intervallo limitato, ma non chiuso. In questo caso, la funzione non ha né massimo né minimo (il suo estremo superiore, 1, e il suo estremo inferiore, 0; e non sono assunti dalla funzione).

2. L'intervallo deve essere limitato

Consideriamo come controesempio:

$$f(x) = x \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

La funzione è continua su un intervallo non limitato ma non ha né massimo né minimo (non è nemmeno limitata).

3. La funzione deve essere continua

Consideriamo come controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = 0 \text{ e } x = 1 \end{cases}$$

La funzione è definita su un intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$ ma non è continua. La funzione non ha né massimo né minimo (il suo estremo superiore, 1, e il suo estremo inferiore, 0; e non sono assunti dalla funzione).

9.2 Teorema dei valori intermedi

Teorema 9.2: dei valori intermedi

Se una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$, allora ha massimo M e minimo m in $[a, b]$ e assume tutti i valori compresi fra m e M .

Siamo sotto le ipotesi del teorema di Weierstrass quindi abbiamo:

$$x_m \text{ e } x_M \in [a, b] \quad \text{tali che} \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

Il teorema dei valori intermedi ci dice inoltre che:

$$\forall \lambda \in (m, M), \quad \text{esiste } x(\lambda) \in [x_m, x_M] \text{ tale che } f(x(\lambda)) = \lambda$$

Questa proprietà prende il nome di **proprietà dei valori intermedi**.

Dimostrazione. Dal teorema di Weierstrass abbiamo punto di massimo x_M e punto di minimo x_m tali che $f(x_M) = M$ (massimo) e $f(x_m) = m$ (minimo) in $[a, b]$. Sia

$$m < \lambda < M$$

e consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \lambda \quad \text{con } x \in [x_m, x_M]$$

che è continua dato che $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e $x_m, x_M \in [a, b]$.

Quindi:

$$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$$

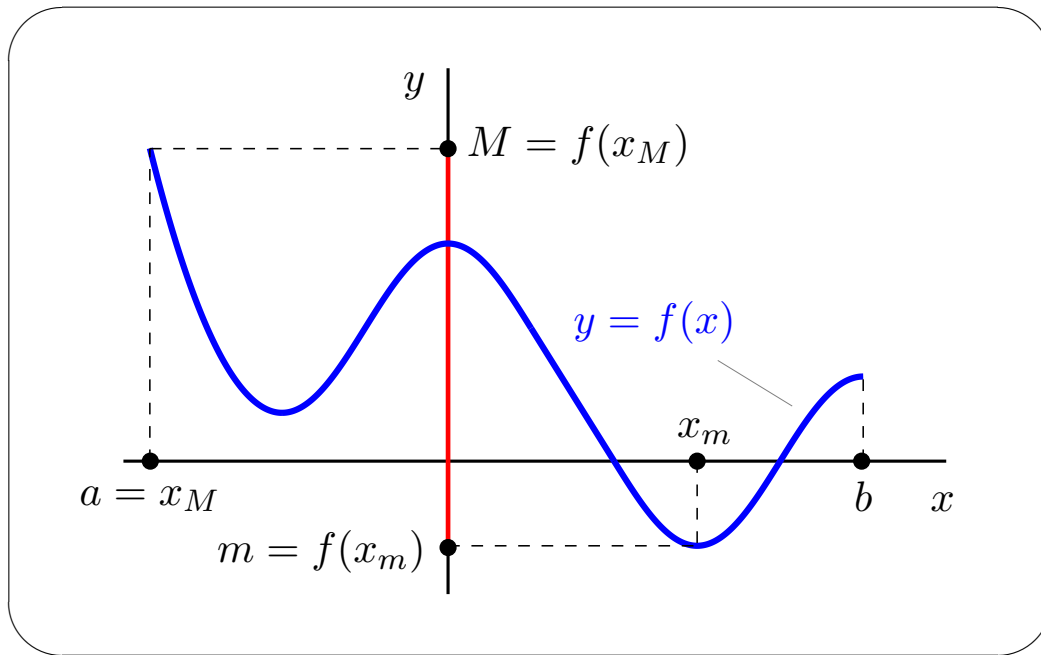
$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$$

Allora, dal teorema degli zeri, esiste $x(\lambda) \in (x_m, x_M)$ tale che:

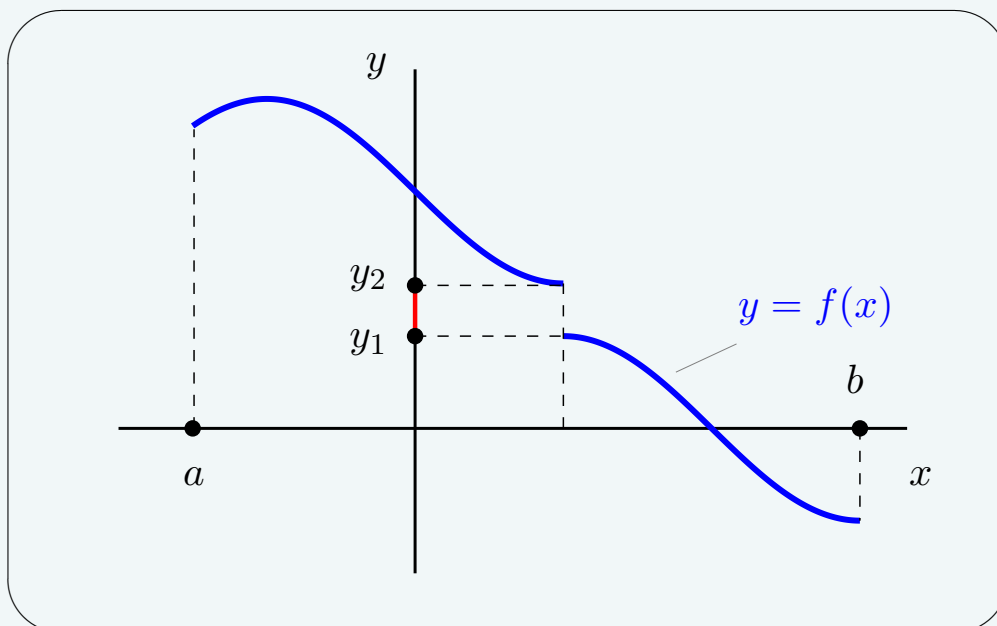
$$g(x(\lambda)) = 0 \quad \text{e cioè} \quad f(x(\lambda)) = \lambda$$

□

- Presa una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ abbiamo graficamente:


Esempio 9.1: Funzione discontinua e assenza della proprietà dei valori intermedi

Consideriamo ad esempio il grafico della seguente funzione discontinua in $[a, b]$:



Questa funzione non ha la proprietà dei valori intermedi ovvero i valori $\lambda \in (y_1, y_2)$ non sono uscite di f .

- Le proprietà dei due teoremi precedenti si possono sintetizzare nell'unico enunciato seguente:

Corollario 9.3

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$f([a, b]) = [m, M];$$

cioè l'immagine di un intervallo $[a, b]$ è l'intervallo di estremi:

$$m = \min_{[a, b]} f \quad \text{e} \quad M = \max_{[a, b]} f.$$

Dimostrazione. Derivato dal teorema di Weierstrass e dal teorema dei valori intermedi. $\square$

Esempio 9.2: non validità del teorema dei valori intermedi in $\mathbb{Q}$

- Sia

$$f(x) = x^2$$

e consideriamo f come funzione definita dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali a $\mathbb{Q}$ stesso (questo è lecito perché il quadrato di un razionale è un razionale).

- Allora f non ha la proprietà dei valori intermedi.
- Infatti, ad esempio,

$$f(1) = 1, f(2) = 4,$$

ma f non assume tutti i valori razionali compresi tra 1 e 4: per esempio non assume mai il valore 2, o 3.

- In altre parole, la proprietà dei valori intermedi è vera per le funzioni continue **grazie alle proprietà dell'insieme dei numeri reali**.
- Questo è un ulteriore motivo per cui è utile avere come ambiente di lavoro l'insieme dei reali e non l'insieme dei razionali.

9.3 Teorema di esistenza della radice n -esima**Teorema 9.4**

Per ogni $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tale che $x^n = y$.

Questo numero x si definisce radice n -esima di y

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$.

Questa funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, perché è il prodotto di n funzioni continue $g(x) = x$.

Mostriamo che esistono

$$x_2 > x_1 > 0 \text{ tali che } x_1^n < y < x_2^n.$$

Se $y = 1$ la radice ennesima esiste ed è unica, inoltre:

1. Se $y > 1$: basta scegliere

$$x_1 = 1, x_2 = y \text{ e si ha } x_1^n < y < x_2^n \quad (1 < y < y^n)$$

2. Se $y < 1$: basta scegliere

$$x_1 = y, x_2 = 1 \text{ e si ha } x_1^n < y < x_2^n \quad (y^n < y < 1)$$

Allora possiamo applicare il teorema dei valori intermedi alla funzione continua $f(x) = x^n$ sull'intervallo $[x_1, x_2]$. Dove il suo minimo è x_1^n e il suo massimo è x_2^n .

Poiché:

$$x_1^n < y < x_2^n, \text{ esiste } x_0 \in [x_1, x_2] \text{ tale che } x_0^n = y.$$

L'unicità deriva dal fatto che la funzione è strettamente crescente.

□

Funzioni monotone su un intervallo e invertibilità

10.1 Funzioni monotone su un intervallo

- Ci occupiamo ora di funzioni monotone su un intervallo (e **non necessariamente continue**) e il prossimo teorema (basato sull'assioma di continuità di $\mathbb{R}$) si può vedere come una estensione alle funzioni del teorema di monotonia per le successioni.

Teorema 10.1: di monotonia delle funzioni

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora per ogni $c \in (a, b)$ esistono finiti i limiti destro e sinistro, per $x \rightarrow c$; ai due estremi a, b esistono i limiti destro (in a) e sinistro (in b), eventualmente infiniti.

Dimostrazione. Supponiamo f crescente in (a, b) e sia $c \in (a, b)$, ovvero un punto all'interno dell'intervallo.

Dimostriamo che esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \sup \{f(x) : x \in (a, c)\}.$$

Poniamo

$$\ell = \sup \{f(x) : x \in (a, c)\}$$

Notiamo che ℓ esiste finito per la proprietà dell'estremo superiore, in quanto $f(c)$ è un maggiorante dell'insieme $\{f(x) : x \in (a, c)\}$.

Quindi occorre provare che

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \ell$$

Sia dunque $\{x_n\}$ una qualsiasi successione in (a, c) tale che $x_n \rightarrow c$, e proviamo che $f(x_n) \rightarrow \ell$, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta definitivamente

$$\ell - \varepsilon < f(x_n) < \ell + \varepsilon.$$

La seconda disuguaglianza è ovvia in quanto $f(x_n) \leq \ell$ per definizione di ℓ , perché $x_n \in (a, c)$.

□

Dimostrazione. Per provare la prima, osserviamo che essendo $\ell - \varepsilon$ minore di ℓ , cioè del minimo maggiorante di $\{f(x) : x \in (a, c)\}$, non è un maggiorante di tale insieme, perciò esiste un punto

$$\tilde{x} \in (a, c) \text{ tale che } f(\tilde{x}) > \ell - \varepsilon$$

Poiché f è crescente, ne segue che

$$f(x) > \ell - \varepsilon, \forall x \in (\tilde{x}, c)$$

D'altro canto per ipotesi

$$x_n < c, \forall n \text{ e } x_n \rightarrow c \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

perciò $x_n \in (\tilde{x}, c)$ definitivamente. Quindi

$$f(x_n) \geq \ell - \varepsilon \quad (\text{definitivamente})$$

che è quanto occorre provare.

Analogamente si può dimostrare che esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \inf \{f(x) : x \in (c, b)\}.$$

Per quanto riguarda i limiti ai due estremi dell'intervallo, proviamo che esiste

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Poniamo (come prima)

$$\ell = \sup \{f(x) : x \in (a, b)\}$$

tuttavia in questo caso ℓ potrebbe anche essere $+\infty$ (non possiamo affermare che $f(b)$ sia un maggiorante dell'insieme, perché in b la funzione non è definita). Procediamo quindi per casi.

Nel caso in cui $\ell < \infty$ si può ripetere la dimostrazione precedente.

□

Dimostrazione. Se invece $\ell = \infty$, il ragionamento si modifica. Dall'ipotesi

$$\sup \{f(x) : x \in (a, b)\} = +\infty$$

segue che per ogni $M > 0$ esiste $\tilde{x} \in (a, b)$ tale che $f(\tilde{x}) > M$.

Per la monotonia di f allora

$$f(x) > M, \quad \forall x \in (\tilde{x}, b)$$

quindi presa una qualunque successione $x_n \rightarrow b$ si ha che $x_n \in (\tilde{x}, b)$, definitivamente, e quindi

$$f(x_n) > M, \quad \text{definitivamente,}$$

perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$$

Allo stesso modo si prova che esiste:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

□

Una conseguenza del teorema di monotonia è che se una funzione è monotona in un intervallo (a, b) , i suoi eventuali punti di discontinuità in (a, b) sono necessariamente discontinuità a salto, ad eccezione degli estremi a, b , in cui può aversi anche un asintoto verticale.

10.2 Continuità e invertibilità

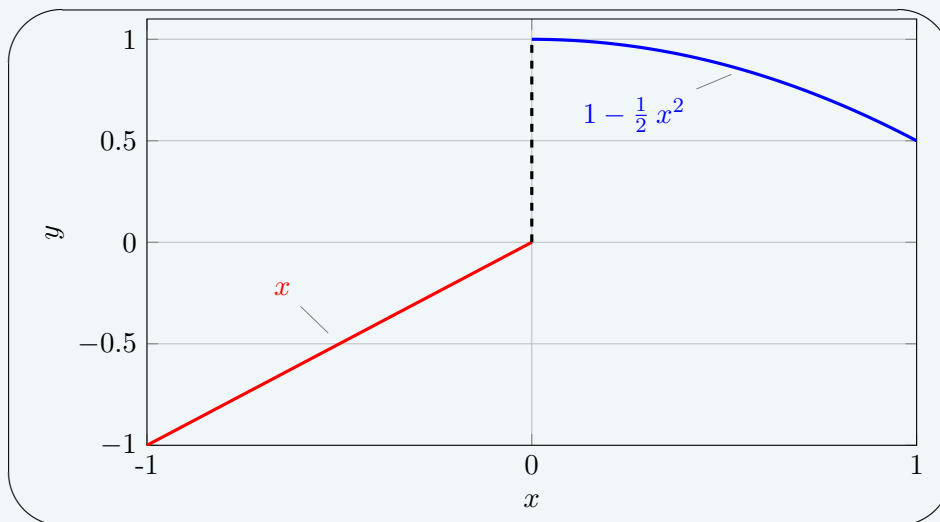
- Abbiamo visto il teorema che dice che se una generica funzione di dominio D è strettamente monotona allora è invertibile.
- Sappiamo anche che il viceversa non è vero in generale: esistono funzioni invertibili su un intervallo, e non monotone.

Esempio 10.1: Funzione invertibile ma non monotona

Consideriamo ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x^2 & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

il suo grafico è:



Questa funzione rispetta la condizione di invertibilità che richiede che il grafico di f sia intersecato al massimo in un punto da ogni retta parallela all'asse delle ascisse, ma non è monotona.

- Se aggiungiamo l'ipotesi della continuità e il dominio uguale a un intervallo, essere strettamente monotona diventa condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità come enunciato dal seguente teorema.

Teorema 10.2: di invertibilità di funzioni monotone e continue

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I .

Se la funzione f è continua allora è invertibile nell'intervallo I se e solo se è strettamente monotona.

In tal caso la sua funzione inversa è ancora strettamente monotona e continua.

Dimostrazione. Sappiamo già che se f è strettamente monotona è invertibile (indipendentemente dalle ipotesi che f sia continua, e che sia definita su un intervallo).

Mostriamo che vale il viceversa, ossia che se è continua e invertibile, allora è strettamente monotona.

Supponiamo per assurdo che la funzione non sia strettamente monotona, allora esistono tre punti:

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad (\text{nell'intervallo } I)$$

tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) > f(x_3)$$

oppure tali che

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) < f(x_3).$$

Supponiamo che valga la prima delle due alternative (nell'altro caso si ragionerà analogamente). Confrontiamo i valori di $f(x_1)$ e $f(x_3)$; non possono essere uguali perché f per ipotesi è invertibile, dunque

$$f(x_1) < f(x_3) \quad \text{oppure} \quad f(x_1) > f(x_3).$$

Di nuovo, supponiamo che valga la prima delle due alternative (nell'altro caso si ragionerà analogamente). Dunque sappiamo che :

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{e} \quad f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

Poiché f è continua, per il teorema dei valori intermedi esiste

$$x_0 \in (x_1, x_2) \quad \text{tale che} \quad f(x_0) = f(x_3).$$

Poiché $x_0 \neq x_3$ (perché $x_1 < x_2 < x_3$), ne segue che f non può essere invertibile, **assurdo**. Questo dimostra la prima parte del teorema.

Sia ora f una funzione continua, strettamente monotona e quindi invertibile in I , e sia g la sua funzione inversa, ancora strettamente monotona e invertibile. Proviamo che g è continua.

- Per quanto osservato dopo il teorema di monotonia, la funzione g , strettamente monotona, o è continua, oppure ha dei punti di discontinuità a salto.
- In tal caso l'immagine di g non è un intervallo (ma è l'unione di almeno due intervalli disgiunti), il che è **assurdo** perché tale immagine è I . Dunque g è continua.

□

- Si noti che nella dimostrazione del teorema precedente si sono utilizzati sia il teorema dei valori intermedi, sia il teorema di monotonia per le funzioni. Abbiamo inoltre fatto implicitamente uso dell'assioma di continuità di $\mathbb{R}$.
- Il teorema appena dimostrato significa in particolare che:

una funzione continua e invertibile su un intervallo, ha come funzione inversa una funzione continua.

- Questo fatto completa la dimostrazione del teorema di continuità delle funzioni elementari:
 1. la continuità della funzione a^x implica la continuità della funzione $\log_a x$.
 2. la continuità delle funzioni $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$ implica la continuità delle funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$.