



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Volume 3 — Funzioni

Il terzo volume: relazioni, funzioni e grafici. Relazioni binarie (le funzioni sono relazioni particolari), funzioni fra insiemi e funzioni reali di variabile reale, funzioni potenza, esponenziali e logaritmiche, trigonometriche (con un'applicazione: i fenomeni vibratori), parte intera e funzioni a tratti, funzioni iperboliche, operazioni sui grafici, funzioni composte e inverse. Definizioni, risultati, molti grafici ed esempi svolti; gli esercizi della parte, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 3.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Relazioni binarie	3
1.1	Relazioni binarie	3
1.2	Proprietà delle relazioni	7
1.3	Rappresentazione con grafi direzionati	9
1.4	Relazioni di equivalenza	13
1.5	Relazioni d'ordine parziale	18
1.6	Relazioni d'ordine totale	23
1.7	Funzioni	26
2	Le funzioni	28
2.1	Il concetto di funzione	28
2.2	Definizione di funzione, dominio, codominio e immagine	30
2.3	Suriezioni, iniezioni e biiezioni	33
2.4	Inversa di una biiezione	36
3	Funzioni reali di variabile reale	38
3.1	Funzione reale di variabile reale	38
3.2	Segno di una funzione	40
3.3	Funzioni limitate	41
3.4	Funzioni simmetriche	44
3.5	Funzioni monotone	45
3.6	Funzioni periodiche	48
4	Funzioni potenza	49
4.1	Funzioni potenza	49
4.2	Funzioni di proporzionalità diretta e inversa	55
5	Funzioni esponenziali e logaritmiche	58
5.1	Funzioni esponenziali	58
5.2	Funzioni logaritmiche	59
5.3	Cambiamento di base	59
6	Funzioni trigonometriche	62
6.1	Funzioni trigonometriche	62
6.2	Valori delle funzioni trigonometriche	65
6.3	Principali formule trigonometriche	66
6.4	Un'applicazione: i fenomeni vibratori	69

7	Funzioni parte intera e mantissa	76
7.1	Funzioni parte intera e mantissa	76
7.2	Funzioni definite a tratti	78
7.3	Funzione valore assoluto	79
8	Funzioni iperboliche	81
8.1	Funzioni iperboliche	81
8.2	Principali formule iperboliche	82
9	Operazioni sui grafici	84
9.1	Operazioni sui grafici	84
10	Funzioni composte	92
10.1	Funzioni composte	92
11	Funzioni inverse	96
11.1	Funzioni invertibili e funzioni inverse	96

Relazioni binarie

1.1 Relazioni binarie

Definizione 1.1: di relazione binaria

Dati due insiemi A e B , una **relazione binaria** R è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

Quando diciamo che R è una relazione binaria di un solo insieme A , intendiamo che R è un sottoinsieme di $A \times A$.

- Chiameremo semplicemente relazione una relazione binaria (esistono però anche relazioni non binarie).
- Se $(a, b) \in R$ scriviamo anche $a R b$ e diciamo che a è **in relazione** con b .

Esempio 1.1

- La relazione “minore di” (“ $<$ ”) dei numeri naturali è l’insieme :

$$R_{<} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a < b \right\}.$$

- La relazione “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) dei numeri naturali è l’insieme :

$$R_{\leq} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \leq b \right\}.$$

- La relazione “uguale a” (“ $=$ ”) dei numeri naturali è l’insieme :

$$R_{=} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a = b \right\}.$$

- La relazione “è sottoinsieme di” $R_{\subseteq}$ dell’insieme delle parti dei numeri naturali (indicato con $2^{\mathbb{N}}$) è l’insieme:

$$R_{\subseteq} = \left\{ (A, B) : A, B \in 2^{\mathbb{N}} \text{ e } A \subseteq B \right\}.$$

Una relazione R su un insieme di numeri naturali si può visualizzare con una **tabella**: nella riga a e nella colonna b compare la coppia (a, b) se $(a, b) \in R$, e la casella resta vuota se $(a, b) \notin R$.

Esempio 1.2: tabelle di relazioni

- La tabella della relazione $R_{<}$ (righe e colonne da 0 a 4):

	0	1	2	3	4	...
0		(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	
1			(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	
2				(2, 3)	(2, 4)	
3					(3, 4)	
4						
...						

- La tabella della relazione $R_{=}$:

	0	1	2	3	4	...
0	(0, 0)					
1		(1, 1)				
2			(2, 2)			
3				(3, 3)		
4					(4, 4)	
...						

- La tabella della relazione $R_{\leq}$, che contiene le coppie di $R_{<}$ e quelle di $R_{=}$:

	0	1	2	3	4	...
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	
1		(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	
2			(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	
3				(3, 3)	(3, 4)	
4					(4, 4)	
...						

Definizione 1.2: di congruenza modulo n

Dato un numero naturale $n \geq 1$, due numeri naturali a e b sono **congrui modulo n** , e si scrive $a \equiv b \pmod{n}$, se la loro differenza è un multiplo intero di n :

$$a \equiv b \pmod{n} \iff \exists q \in \mathbb{Z} \text{ tale che } b - a = qn.$$

Definizione 1.3: di multiplo e di divisore

Dati due numeri naturali a e b , diciamo che a è un **multiplo** di b se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $a = kb$. Diciamo che a è un **divisore** di b se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $b = ka$.

- Quindi a è un divisore di b se e solo se b è un multiplo di a .
- Con questa definizione 0 è un multiplo di ogni numero naturale ($0 = 0 \cdot b$) e 0 è divisore solo di sé stesso (se $b = k \cdot 0$ allora $b = 0$).

Esempio 1.3: altre relazioni sui numeri naturali

- La relazione “congruo modulo n ” dei numeri naturali è l'insieme:

$$R_{\equiv_n} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \equiv b \pmod{n} \right\}.$$

Con $n = 3$ la tabella è:

	0	1	2	3	4	5	6	...
0	(0, 0)			(0, 3)			(0, 6)	
1		(1, 1)			(1, 4)			
2			(2, 2)			(2, 5)		
3	(3, 0)			(3, 3)			(3, 6)	
4		(4, 1)			(4, 4)			
5			(5, 2)			(5, 5)		
6	(6, 0)			(6, 3)			(6, 6)	
...								

- La relazione “è multiplo di” dei numeri naturali è l'insieme:

$$R_{\text{mul}} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } a = kb \right\}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	...
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)	
1		(1, 1)						
2		(2, 1)	(2, 2)					
3		(3, 1)		(3, 3)				
4		(4, 1)	(4, 2)		(4, 4)			
5		(5, 1)				(5, 5)		
6		(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)			(6, 6)	
...								

Esempio 1.4: altre relazioni sui numeri naturali

- La relazione “è divisore di” dei numeri naturali è l'insieme:

$$R_{\text{div}} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } b = k a \right\}.$$

Poiché $(a, b) \in R_{\text{div}}$ se e solo se $(b, a) \in R_{\text{mul}}$, la sua tabella si ottiene da quella di R_{mul} scambiando i due elementi di ogni coppia:

	0	1	2	3	4	5	6	...
0	(0, 0)							
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	
2	(2, 0)		(2, 2)		(2, 4)		(2, 6)	
3	(3, 0)			(3, 3)			(3, 6)	
4	(4, 0)				(4, 4)			
5	(5, 0)					(5, 5)		
6	(6, 0)						(6, 6)	
...								

Esempio 1.5: altre relazioni sui numeri naturali

- La relazione “differenza di uno” dei numeri naturali è l'insieme:

$$R_{ab}^1 = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a = b - 1 \right\}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	...
0		(0, 1)						
1			(1, 2)					
2				(2, 3)				
3					(3, 4)			
4						(4, 5)		
5							(5, 6)	
6								
...								

- La relazione “la somma è pari” dei numeri naturali è l'insieme:

$$R_{\text{pari}} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } a + b = 2m \right\}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	...
0	(0, 0)		(0, 2)		(0, 4)		(0, 6)	
1		(1, 1)		(1, 3)		(1, 5)		
2	(2, 0)		(2, 2)		(2, 4)		(2, 6)	
3		(3, 1)		(3, 3)		(3, 5)		
4	(4, 0)		(4, 2)		(4, 4)		(4, 6)	
5		(5, 1)		(5, 3)		(5, 5)		
6	(6, 0)		(6, 2)		(6, 4)		(6, 6)	
...								

- La tabella della relazione $R_{\subseteq}$ ristretta ai sottoinsiemi di $\{0, 1, 2\}$ (righe e colonne sono gli insiemi A e B):

	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$\emptyset$	$(\emptyset, \emptyset)$	$(\emptyset, \{0\})$	$(\emptyset, \{1\})$	$(\emptyset, \{2\})$	$(\emptyset, \{0, 1\})$	$(\emptyset, \{0, 2\})$	$(\emptyset, \{1, 2\})$	$(\emptyset, \{0, 1, 2\})$
$\{0\}$		$(\{0\}, \{0\})$			$(\{0\}, \{0, 1\})$	$(\{0\}, \{0, 2\})$		$(\{0\}, \{0, 1, 2\})$
$\{1\}$			$(\{1\}, \{1\})$		$(\{1\}, \{0, 1\})$		$(\{1\}, \{1, 2\})$	$(\{1\}, \{0, 1, 2\})$
$\{2\}$				$(\{2\}, \{2\})$		$(\{2\}, \{0, 2\})$	$(\{2\}, \{1, 2\})$	$(\{2\}, \{0, 1, 2\})$
$\{0, 1\}$					$(\{0, 1\}, \{0, 1\})$			$(\{0, 1\}, \{0, 1, 2\})$
$\{0, 2\}$						$(\{0, 2\}, \{0, 2\})$		$(\{0, 2\}, \{0, 1, 2\})$
$\{1, 2\}$							$(\{1, 2\}, \{1, 2\})$	$(\{1, 2\}, \{0, 1, 2\})$
$\{0, 1, 2\}$								$(\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2\})$

Definizione 1.4: di relazione n -aria

Dati n insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, una **relazione n -aria** R è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

- Le relazioni binarie sono le relazioni n -arie con $n = 2$.

1.2 Proprietà delle relazioni

- Una relazione $R \subseteq A \times A$ è **riflessiva** se:

$$\forall a \in A, \quad (a, a) \in R$$

- Una relazione $R \subseteq A \times A$ è **simmetrica** se:

$$\forall a, b \in A, \quad (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

- Una relazione $R \subseteq A \times A$ è **transitiva** se:

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

- Una relazione $R \subseteq A \times A$ è **antisimmetrica** se:

$$\forall a, b \in A, \quad (a, b) \in R \text{ e } (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

Osservazione 1.5: forma equivalente dell'antisimmetria

Una relazione $R \subseteq A \times A$ è antisimmetrica se e solo se:

$$\forall a, b \in A, \quad (a, b) \in R \text{ e } a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin R$$

Dimostrazione. Fissiamo $a, b \in A$. Un'implicazione è falsa solo quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

- L'implicazione “ $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$ ” è falsa solo quando $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ e $a \neq b$.
- L'implicazione “ $(a, b) \in R$ e $a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin R$ ” è falsa solo quando $(a, b) \in R$, $a \neq b$ e $(b, a) \in R$.

Le due implicazioni sono quindi false esattamente negli stessi casi: per ogni coppia a, b una è vera se e solo se lo è l'altra, e quindi valgono per ogni $a, b \in A$ una se e solo se vale l'altra. $\square$

Esempio 1.6

- La relazione $R_{\leq}$ è riflessiva, ma $R_{<}$ non lo è.
- Le relazioni $R_{<}$ e $R_{\leq}$ non sono simmetriche.
- Le relazioni $R_{<}$ e $R_{\leq}$ sono transitive, ma ad esempio la relazione:

$$R_{ab}^1 = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a = b - 1 \right\}$$

non lo è, e.g., $(3, 4) \in R_{ab}^1$ e $(4, 5) \in R_{ab}^1$ ma $(3, 5) \notin R_{ab}^1$.

Vediamo ora in dettaglio, per ciascuna proprietà, come si dimostra che una relazione la possiede e come si mostra, con un controesempio, che non la possiede.

Esempio 1.7: proprietà riflessiva

- La relazione $R_{=}$ è riflessiva, dato che

$$a = a, \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

- La relazione $R_{\leq}$ è riflessiva, dato che

$$a \leq a, \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

- La relazione $R_{<}$ non è riflessiva: un controesempio è $a = 1$, dato che $1 < 1$ è falso e quindi $(1, 1) \notin R_{<}$.

Esempio 1.8: proprietà simmetrica

- La relazione $R_=_$ è simmetrica, dato che

$$a = b \Rightarrow b = a, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

- Le relazioni $R_<$ e $R_\leq$ non sono simmetriche: un controesempio è la coppia $(1, 2)$, dato che $1 < 2$ e $1 \leq 2$, ma $2 < 1$ e $2 \leq 1$ sono falsi. Quindi $(1, 2) \in R_<$ ma $(2, 1) \notin R_<$, e $(1, 2) \in R_\leq$ ma $(2, 1) \notin R_\leq$.

Esempio 1.9: proprietà transitiva

- La relazione $R_=_$ è transitiva, dato che

$$a = b \text{ e } b = c \Rightarrow a = c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Lo stesso vale per $R_<$ e $R_\leq$: se $a < b$ e $b < c$ allora $a < c$, e se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.

- La relazione R_{ab}^1 non è transitiva: un controesempio è dato da $(3, 4) \in R_{ab}^1$ e $(4, 5) \in R_{ab}^1$, mentre $(3, 5) \notin R_{ab}^1$ perché $3 \neq 5 - 1$.

Esempio 1.10: proprietà antisimmetrica

- La relazione $R_\leq$ è antisimmetrica, dato che $a \leq b$ e $b \leq a$ implicano $a = b$.
- La relazione $R_=_$ è antisimmetrica, dato che

$$a = b \text{ e } b = a \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

- La relazione $R_<$ è antisimmetrica. Infatti non esistono due numeri naturali a e b con $a < b$ e $b < a$ (altrimenti avremmo $a < a$): l'antecedente dell'implicazione non è mai vero, e quindi l'implicazione è vera per ogni $a, b \in \mathbb{N}$. Con la forma equivalente dell'antisimmetria lo si vede direttamente:

$$a < b \text{ e } a \neq b \Rightarrow b \not< a, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

- La relazione $R_{\equiv_3}$ non è antisimmetrica: un controesempio è dato da $(0, 3) \in R_{\equiv_3}$ (perché $3 - 0 = 1 \cdot 3$) e $(3, 0) \in R_{\equiv_3}$ (perché $0 - 3 = (-1) \cdot 3$), mentre $0 \neq 3$.

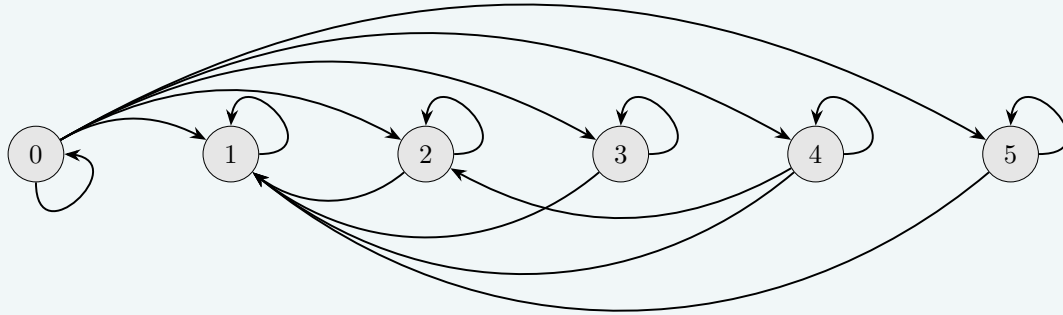
1.3 Rappresentazione con grafi direzionati

Le relazioni possono essere rappresentate da un **grafo direzionato**, dove i **vertici** sono gli elementi dell'insieme su cui è definita la relazione R e un **arco** (a, b) , disegnato come una freccia da a a b , significa che $(a, b) \in R$. Un arco (a, a) si chiama **cappio**.

Esempio 1.11: grafi di relazioni

- Il grafo direzionato della relazione “è multiplo di” sull’insieme $\{0, 1, \dots, 5\}$:

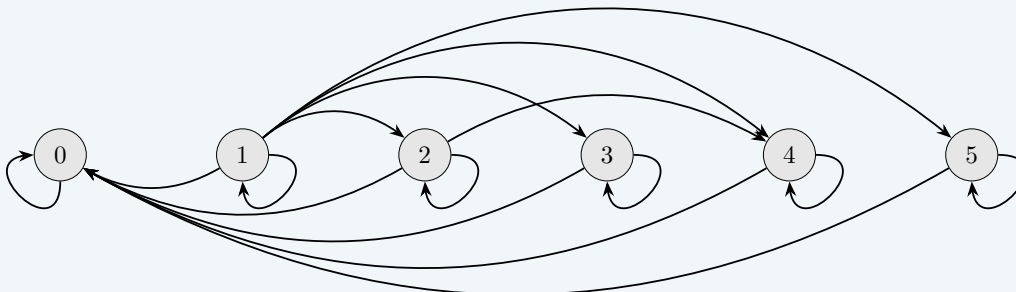
$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in \{0, 1, \dots, 5\} \text{ e } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } a = kb \right\}.$$



- Il grafo direzionato della relazione “è divisore di” sull’insieme $\{0, 1, \dots, 5\}$:

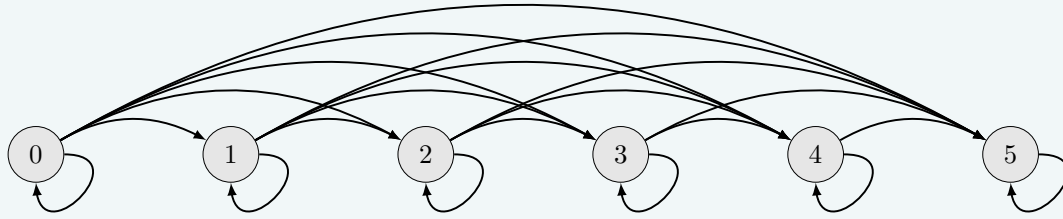
$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in \{0, 1, \dots, 5\} \text{ e } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } b = ka \right\}.$$

Ha gli stessi archi del grafo precedente, percorsi nel verso opposto.

**Esempio 1.12: grafi di relazioni**

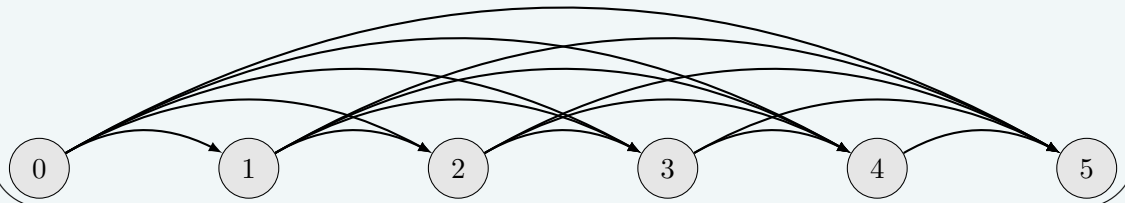
- Il grafo direzionato della relazione “minore o uguale di” sull’insieme $\{0, 1, \dots, 5\}$:

$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in \{0, 1, \dots, 5\} \text{ e } a \leq b \right\}.$$



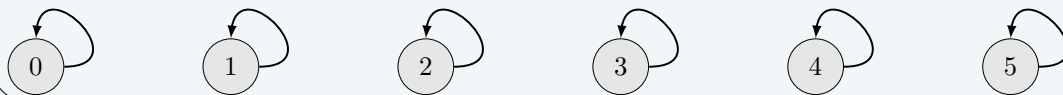
- Il grafo direzionato della relazione “minore di” sull’insieme $\{0, 1, \dots, 5\}$, che si ottiene dal precedente togliendo i cappi:

$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in \{0, 1, \dots, 5\} \text{ e } a < b \right\}.$$



- Il grafo direzionato della relazione “uguale a” sull’insieme $\{0, 1, \dots, 5\}$, che ha solo i cappi:

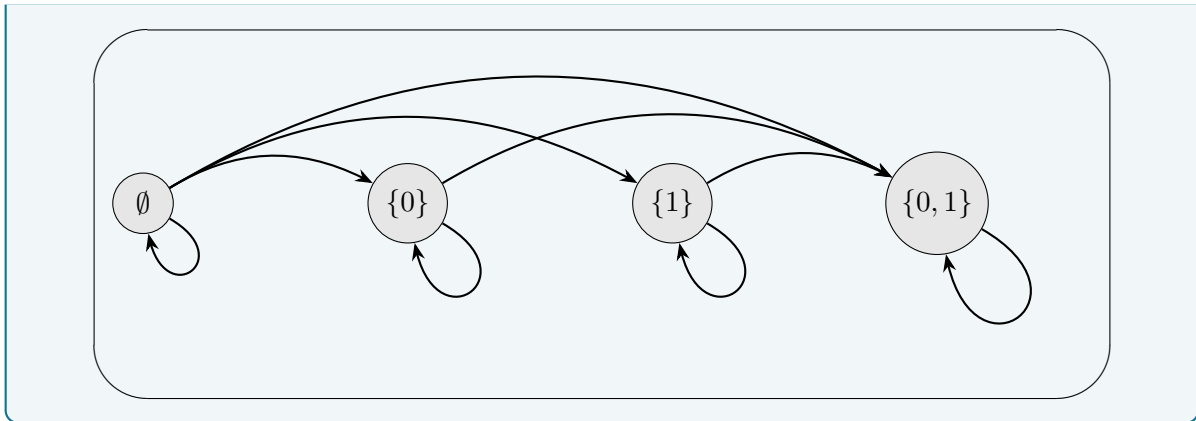
$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in \{0, 1, \dots, 5\} \text{ e } a = b \right\}.$$



Esempio 1.13: grafo della relazione di inclusione

Il grafo direzionato della relazione “è sottoinsieme di” sui sottoinsiemi di $\{0, 1\}$:

$$R = \left\{ (A, B) : A, B \in 2^{\{0,1\}} \text{ e } A \subseteq B \right\}.$$

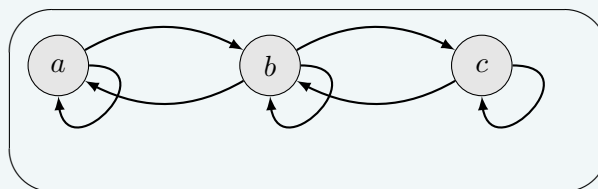


Le proprietà principali di una relazione si leggono sul suo grafo direzionato:

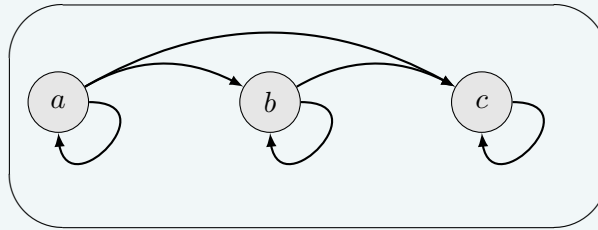
- la relazione è **riflessiva** se e solo se ogni vertice a ha il cappio (a, a) ;
 - la relazione è **simmetrica** se e solo se, per ogni coppia di vertici a e b , se c'è l'arco da a a b allora c'è anche l'arco da b ad a ;
 - la relazione è **transitiva** se e solo se, per ogni terna di vertici a , b e c , se ci sono l'arco da a a b e l'arco da b a c allora c'è anche l'arco da a a c ;
 - la relazione è **antisimmetrica** se e solo se, per ogni coppia di vertici distinti a e b , se c'è l'arco da a a b allora non c'è l'arco da b ad a (forma equivalente dell'antisimmetria).
- Per esempio, nei grafi di “è multiplo di”, “è divisore di”, “minore o uguale di” e “uguale a” ogni vertice ha il cappio (relazioni riflessive), mentre nel grafo di “minore di” nessun vertice lo ha. In nessuno di questi grafi ci sono due archi in versi opposti fra due vertici distinti (relazioni antisimmetriche).

Esempio 1.14: grafi che verificano solo due proprietà

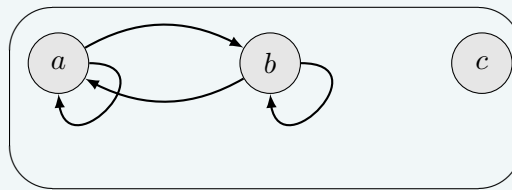
- La relazione $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ sull'insieme $\{a, b, c\}$ è riflessiva e simmetrica, ma non è transitiva: ci sono gli archi (a, b) e (b, c) , ma non l'arco (a, c) .



- La relazione $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$ sull'insieme $\{a, b, c\}$ è riflessiva e transitiva, ma non è simmetrica: c'è l'arco (a, b) , ma non l'arco (b, a) .



- La relazione $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ sull'insieme $\{a, b, c\}$ è simmetrica e transitiva, ma non è riflessiva: manca il coppia (c, c) . Per la transitività basta controllare le coppie di archi consecutivi: da (a, b) e (b, a) segue (a, a) , da (b, a) e (a, b) segue (b, b) , e le coppie che contengono un coppia danno un arco già presente.



Osservazione 1.6: relazioni simmetriche e transitive

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione simmetrica e transitiva. Se un elemento $a \in A$ compare in almeno una coppia di R , allora $(a, a) \in R$.

Dimostrazione. Se a compare in una coppia di R , esiste $b \in A$ tale che $(a, b) \in R$ oppure $(b, a) \in R$. Per la simmetria, in entrambi i casi abbiamo sia $(a, b) \in R$ sia $(b, a) \in R$. Per la transitività, da $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ segue $(a, a) \in R$. $\square$

- Quindi una relazione simmetrica e transitiva non è riflessiva solo se qualche elemento di A non compare in nessuna coppia della relazione, come l'elemento c dell'ultimo grafo.

1.4 Relazioni di equivalenza

Definizione 1.7: di relazione di equivalenza

Una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è una **relazione di equivalenza**.

Esempio 1.15: relazioni di equivalenza

- La relazione $R_{=}$ è una relazione di equivalenza, perché è riflessiva, simmetrica e transitiva.
- La relazione $R_{<}$ non è una relazione di equivalenza, perché non è riflessiva (e nemmeno simmetrica).

- La relazione $R_{\leq}$ non è una relazione di equivalenza, perché non è simmetrica.

Esempio 1.16: congruenza modulo n

Dato un numero naturale $n \geq 1$, la relazione

$$R_{\equiv_n} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \equiv b \pmod{n} \right\}$$

è una relazione di equivalenza. Ricordiamo che $(a, b) \in R_{\equiv_n}$ se e solo se esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che $b - a = qn$.

- Riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{N}$ abbiamo $a - a = 0 \cdot n$, con $0 \in \mathbb{Z}$, quindi $(a, a) \in R_{\equiv_n}$.
- Simmetrica: per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, se esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che $b - a = qn$, allora

$$a - b = (-q)n, \quad \text{con } -q \in \mathbb{Z},$$

quindi $(b, a) \in R_{\equiv_n}$.

- Transitiva: per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$, se esistono $q, p \in \mathbb{Z}$ tali che $b - a = qn$ e $c - b = pn$, allora

$$c - a = (c - b) + (b - a) = pn + qn = (q + p)n, \quad \text{con } q + p \in \mathbb{Z},$$

quindi $(a, c) \in R_{\equiv_n}$.

Esempio 1.17: la somma è pari

La relazione

$$R_{\text{pari}} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } a + b = 2m \right\}$$

è una relazione di equivalenza.

- Riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{N}$ abbiamo $a + a = 2a$, con $a \in \mathbb{N}$, quindi $(a, a) \in R_{\text{pari}}$.
- Simmetrica: per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, se $a + b = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, allora anche $b + a = a + b = 2m$, quindi $(b, a) \in R_{\text{pari}}$.
- Transitiva: per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$, se esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $a + b = 2p$ e $b + c = 2q$, allora

$$(a + b) + (b + c) = 2p + 2q \Rightarrow a + c = 2(p + q - b).$$

Il numero $p + q - b$ è un intero, e non è negativo perché $2(p + q - b) = a + c \geq 0$; quindi $p + q - b \in \mathbb{N}$ e $(a, c) \in R_{\text{pari}}$.

Definizione 1.8: di classe di equivalenza

Data una relazione di equivalenza R su un insieme A , la **classe di equivalenza** di un elemento $a \in A$ è l'insieme

$$[a] = \left\{ b \in A : (a, b) \in R \right\}.$$

Lemma 1.9: elementi in relazione hanno la stessa classe

Sia R una relazione di equivalenza su un insieme A . Per ogni $a, b \in A$:

$$(a, b) \in R \Rightarrow [a] = [b].$$

Dimostrazione. Sia $(a, b) \in R$. Mostriamo le due inclusioni.

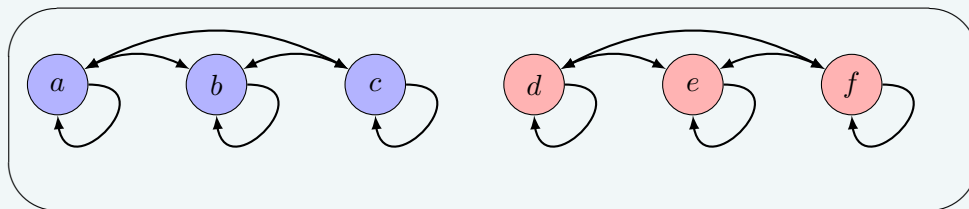
- $[b] \subseteq [a]$: se $c \in [b]$, allora $(b, c) \in R$. Da $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, per la transitività, segue $(a, c) \in R$, cioè $c \in [a]$.
- $[a] \subseteq [b]$: per la simmetria $(b, a) \in R$. Se $c \in [a]$, allora $(a, c) \in R$, e da $(b, a) \in R$ e $(a, c) \in R$, per la transitività, segue $(b, c) \in R$, cioè $c \in [b]$.

Quindi $[a] = [b]$. □

- Due elementi qualsiasi di una stessa classe sono in relazione fra loro: se $b, c \in [a]$, allora $(a, b) \in R$ e $(a, c) \in R$; per la simmetria $(b, a) \in R$ e per la transitività $(b, c) \in R$. Una classe di equivalenza raccoglie quindi elementi tutti in relazione fra loro.

Esempio 1.18: classi di equivalenza

Il grafo direzionato di una relazione di equivalenza sull'insieme $\{a, b, c, d, e, f\}$ con due classi di equivalenza, $\{a, b, c\}$ (in blu) e $\{d, e, f\}$ (in rosso). Una freccia con due punte fra x e y rappresenta i due archi (x, y) e (y, x) .

**Definizione 1.10: di partizione**

Una **partizione** di un insieme A è una famiglia $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di A tale che:

- ogni insieme della famiglia è non vuoto: $S \neq \emptyset$ per ogni $S \in \mathcal{S}$;

- due insiemi distinti della famiglia sono disgiunti: $S \cap T = \emptyset$ per ogni $S, T \in \mathcal{S}$ con $S \neq T$;
- l'unione degli insiemi della famiglia è A : $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = A$, cioè ogni $a \in A$ appartiene ad almeno un $S \in \mathcal{S}$.

- La famiglia può essere finita, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, oppure infinita.
- Dalla seconda e dalla terza condizione segue che ogni elemento di A appartiene a **uno e un solo** insieme della partizione: ad almeno uno per la terza condizione, e non a due insiemi distinti S e T , che sono disgiunti.

Proposizione 1.11: le classi di equivalenza formano una partizione

Sia R una relazione di equivalenza su un insieme A . Allora la famiglia delle classi di equivalenza

$$\mathcal{S} = \{[a] : a \in A\}$$

è una partizione di A .

- La dimostrazione verifica le tre condizioni della definizione di partizione; la seconda segue dal fatto che due classi sono uguali oppure disgiunte.

Dimostrazione. Ogni classe $[a]$ è un sottoinsieme di A per definizione.

- Classi non vuote: per la riflessività $(a, a) \in R$, quindi $a \in [a]$ e $[a] \neq \emptyset$.
- Unione uguale ad A : ogni $a \in A$ appartiene alla classe $[a]$, quindi $A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]$; l'altra inclusione vale perché ogni classe è contenuta in A .
- Classi distinte disgiunte: mostriamo che se due classi $[a]$ e $[b]$ hanno un elemento in comune, allora sono uguali. Sia $c \in [a] \cap [b]$. Allora $(a, c) \in R$ e $(b, c) \in R$. Per la simmetria $(c, b) \in R$, e per la transitività, da $(a, c) \in R$ e $(c, b) \in R$, segue $(a, b) \in R$. Per il Lemma 1.9 abbiamo allora $[a] = [b]$. Quindi due classi distinte non hanno elementi in comune.

□

Proposizione 1.12: ogni partizione definisce una relazione di equivalenza

Sia $\mathcal{S}$ una partizione di un insieme A e sia

$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in A \text{ e } \exists S \in \mathcal{S} \text{ tale che } a \in S \text{ e } b \in S \right\}.$$

Allora R è una relazione di equivalenza su A , e le sue classi di equivalenza sono esattamente gli insiemi della partizione $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. Mostriamo prima che R è una relazione di equivalenza.

- Riflessiva: per ogni $a \in A$ esiste $S \in \mathcal{S}$ con $a \in S$ (l'unione degli insiemi della partizione è A). Allora a e a appartengono allo stesso insieme S , cioè $(a, a) \in R$.
- Simmetrica: se $(a, b) \in R$, esiste $S \in \mathcal{S}$ con $a \in S$ e $b \in S$; lo stesso S contiene b e a , quindi $(b, a) \in R$.
- Transitiva: se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, esistono $S, T \in \mathcal{S}$ con $a, b \in S$ e $b, c \in T$. Allora $b \in S \cap T$, quindi $S \cap T \neq \emptyset$ e, poiché due insiemi distinti della partizione sono disgiunti, $S = T$. Quindi a e c appartengono allo stesso insieme S , cioè $(a, c) \in R$.

Mostriamo ora che le classi sono gli insiemi della partizione. Dato $a \in A$, sia S_a l'unico insieme di $\mathcal{S}$ che contiene a . Se $b \in S_a$, allora $(a, b) \in R$, cioè $b \in [a]$. Viceversa, se $b \in [a]$, esiste $S \in \mathcal{S}$ con $a, b \in S$; poiché a appartiene a un solo insieme della partizione, $S = S_a$ e quindi $b \in S_a$. Dunque $[a] = S_a$: ogni classe è un insieme della partizione. Infine ogni $S \in \mathcal{S}$ è non vuoto: preso $a \in S$, abbiamo $S = S_a = [a]$, quindi ogni insieme della partizione è una classe. $\square$

Esempio 1.19: classi modulo 3

La relazione di equivalenza $R_{\equiv_3}$ divide i numeri naturali in 3 classi di equivalenza:

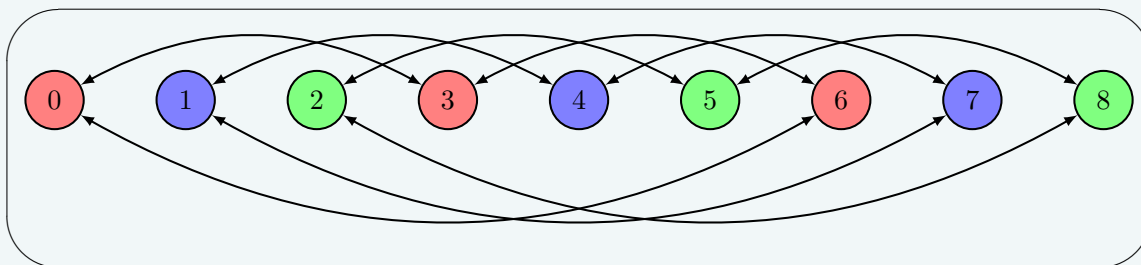
$$[0] = \{0, 3, 6, 9, \dots\}, \quad [1] = \{1, 4, 7, 10, \dots\}, \quad [2] = \{2, 5, 8, 11, \dots\}.$$

Ogni classe contiene i numeri naturali che hanno lo stesso resto nella divisione per 3. Infatti, scriviamo $a = 3q_a + r_a$ e $b = 3q_b + r_b$, con $q_a, q_b \in \mathbb{N}$ e resti $r_a, r_b \in \{0, 1, 2\}$. Allora

$$b - a = 3(q_b - q_a) + (r_b - r_a).$$

- Se $r_a = r_b$, allora $b - a = 3(q_b - q_a)$ e $(a, b) \in R_{\equiv_3}$.
- Se $(a, b) \in R_{\equiv_3}$, cioè $b - a = 3q$ con $q \in \mathbb{Z}$, allora $r_b - r_a = 3(q - q_b + q_a)$ è un multiplo di 3 compreso fra -2 e 2 , quindi $r_b - r_a = 0$.

Ecco il grafo direzionato della relazione sui numeri naturali da 0 a 8, con un colore per classe. Una freccia con due punte rappresenta i due archi (a, b) e (b, a) ; i cappi (a, a) , presenti per ogni a , non sono disegnati.



Esempio 1.20: numeri pari e numeri dispari

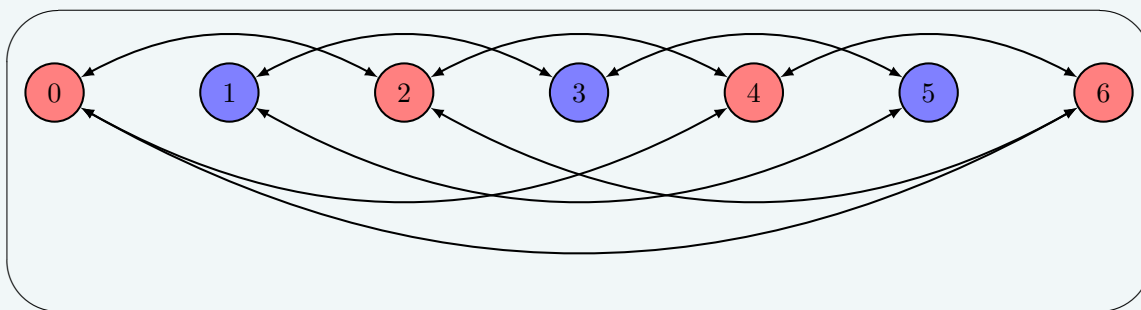
La relazione di equivalenza R_{pari} divide i numeri naturali in 2 classi di equivalenza, i numeri pari e i numeri dispari:

$$[0] = \{0, 2, 4, 6, \dots\}, \quad [1] = \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Infatti, scriviamo $a = 2q_a + r_a$ e $b = 2q_b + r_b$, con $q_a, q_b \in \mathbb{N}$ e resti $r_a, r_b \in \{0, 1\}$. Allora $a + b = 2(q_a + q_b) + (r_a + r_b)$, con $r_a + r_b \in \{0, 1, 2\}$.

- Se $r_a = r_b$, allora $r_a + r_b = 2r_a$ e $a + b = 2(q_a + q_b + r_a)$ è pari.
- Se $r_a \neq r_b$, allora $r_a + r_b = 1$ e $a + b = 2(q_a + q_b) + 1$ non è pari.

Quindi $(a, b) \in R_{\text{pari}}$ se e solo se a e b sono entrambi pari o entrambi dispari. Ecco il grafo direzionato della relazione sui numeri naturali da 0 a 6 (pari in rosso, dispari in blu; frecce con due punte e cappi omessi come nell'esempio precedente):

**Osservazione 1.13: equivalenza e antisimmetria**

Se una relazione di equivalenza R su un insieme A è anche antisimmetrica, allora ogni classe di equivalenza ha un solo elemento: $[a] = \{a\}$ per ogni $a \in A$.

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Per la riflessività $a \in [a]$. Se $b \in [a]$, allora $(a, b) \in R$; per la simmetria anche $(b, a) \in R$, e per l'antisimmetria $a = b$. Quindi $[a] = \{a\}$. $\square$

- In questo caso $(a, b) \in R$ se e solo se $b \in [a] = \{a\}$, cioè se e solo se $a = b$: l'unica relazione di equivalenza su A che è anche antisimmetrica è la relazione "uguale a".

1.5 Relazioni d'ordine parziale**Definizione 1.14: di relazioni d'ordine parziale**

Una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva è una **relazione d'ordine parziale**.

Esempio 1.21

- La relazione $R_{\leq}$ è una relazione d'ordine parziale, ma la relazione $R_{<}$ non lo è in quanto non è riflessiva.
- La relazione $R_{=}$ è una relazione d'ordine parziale, perché è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Osservazione 1.15

La relazione $R_{\subseteq}$ è una relazione d'ordine parziale

Dimostrazione. Dobbiamo provare che la relazione sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

- Per essere riflessiva dobbiamo provare che $(S, S) \in R_{\subseteq}$, cosa che è vera dato che $S \subseteq S$.
- Per essere antisimmetrica dobbiamo provare che se $S_1 \neq S_2$ allora $S_1 \not\subseteq S_2$ o $S_2 \not\subseteq S_1$ o entrambe, la negazione della proprietà desiderata.

Dato che $S_1 \neq S_2$:

o esiste qualche elemento che è in S_1 ma non è in S_2 , quindi $S_1 \not\subseteq S_2$
 o esiste qualche elemento che è in S_2 ma non è in S_1 , quindi $S_2 \not\subseteq S_1$
 oppure entrambe le opzioni precedenti

- Per essere transitiva dobbiamo provare che $(S_1, S_2) \in R_{\subseteq}$ e $(S_2, S_3) \in R_{\subseteq}$ implica $(S_1, S_3) \in R_{\subseteq}$. Chiaramente, dato che $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_3$, abbiamo $S_1 \subseteq S_3$.

□

Esempio 1.22: multipli e divisori

La relazione R_{mul} ("è multiplo di") è una relazione d'ordine parziale.

- Riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{N}$ abbiamo $a = 1 \cdot a$, quindi $(a, a) \in R_{\text{mul}}$.
- Transitiva: per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$, se esistono $q, p \in \mathbb{N}$ tali che $a = qb$ e $b = pc$, allora

$$a = qb = q(pc) = (qp)c, \quad \text{con } qp \in \mathbb{N},$$

quindi $(a, c) \in R_{\text{mul}}$.

- Antisimmetrica: siano $a, b \in \mathbb{N}$ con $(a, b) \in R_{\text{mul}}$ e $(b, a) \in R_{\text{mul}}$, cioè $a = qb$ e $b = pa$ con $q, p \in \mathbb{N}$. Allora

$$a = qb = qpa.$$

Se $a = 0$, allora $b = p \cdot 0 = 0 = a$. Se $a \neq 0$, dividendo per a otteniamo $qp = 1$. Nessuno dei due fattori è 0 (altrimenti il prodotto sarebbe 0), quindi $q \geq 1$ e $p \geq 1$;

se fosse $q \geq 2$ avremmo $qp \geq 2p \geq 2$, quindi $q = 1$, e allo stesso modo $p = 1$. Dunque $a = 1 \cdot b = b$.

Anche R_{div} (“è divisore di”) è una relazione d’ordine parziale, perché $(a, b) \in R_{\text{div}}$ se e solo se $(b, a) \in R_{\text{mul}}$:

- riflessiva: $(a, a) \in R_{\text{mul}}$, quindi $(a, a) \in R_{\text{div}}$;
- transitiva: se $(a, b), (b, c) \in R_{\text{div}}$, allora $(c, b), (b, a) \in R_{\text{mul}}$, quindi $(c, a) \in R_{\text{mul}}$ per la transitività di R_{mul} , cioè $(a, c) \in R_{\text{div}}$;
- antisimmetrica: se $(a, b), (b, a) \in R_{\text{div}}$, allora $(b, a), (a, b) \in R_{\text{mul}}$, quindi $a = b$ per l’antisimmetria di R_{mul} .

Definizione 1.16: di insieme parzialmente ordinato

Si definisce **insieme parzialmente ordinato** la coppia costituita da un insieme e da una relazione d’ordine parziale definita su di esso.

Esempio 1.23

- L’insieme dei numeri naturali, razionali o reali con la relazione $R_{\leq}$ sono insiemi parzialmente ordinati.
- La relazione “è discendente di” definita su un sottoinsieme delle persone è una relazione d’ordine parziale (se consideriamo gli individui come discendenti di loro stessi). Di conseguenza il sottoinsieme di persone considerato con la relazione “è discendente di” è un insieme parzialmente ordinato.
- L’insieme dei numeri naturali con la relazione R_{mul} , oppure con la relazione R_{div} , è un insieme parzialmente ordinato.

Osservazione 1.17: grafo di un ordine parziale

Il grafo direzionato di una relazione d’ordine parziale non contiene **cicli**, cioè successioni di archi

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, a_1)$$

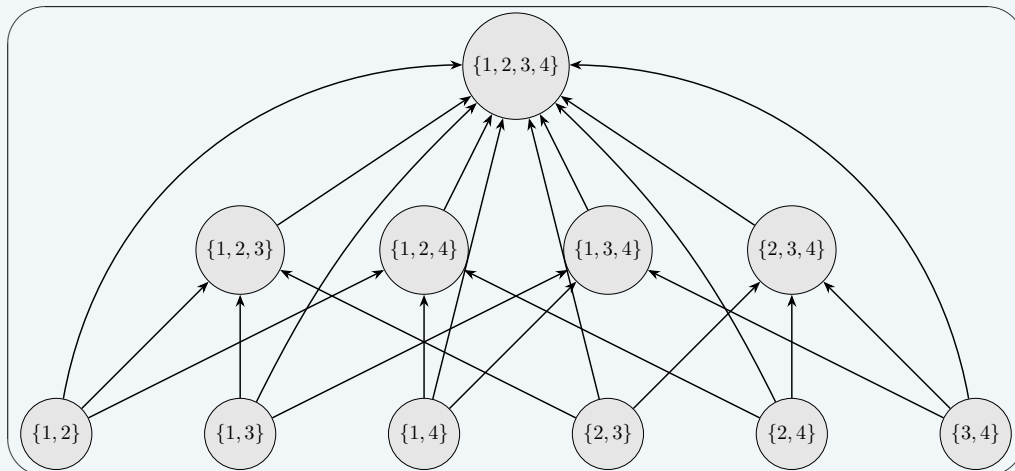
con $k \geq 2$ vertici $a_1, a_2, \dots, a_k$ distinti. In altre parole, tolti i cappi, il grafo è **aciclico**.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il grafo contenga un ciclo come sopra. Se $k = 2$, il ciclo è formato dagli archi (a_1, a_2) e (a_2, a_1) . Se $k \geq 3$, applicando la transitività agli archi (a_2, a_3) e (a_3, a_4) otteniamo $(a_2, a_4) \in R$, poi da (a_2, a_4) e (a_4, a_5) otteniamo $(a_2, a_5) \in R$, e così via fino all’arco (a_k, a_1) , da cui otteniamo $(a_2, a_1) \in R$. In entrambi i casi $(a_1, a_2) \in R$ e $(a_2, a_1) \in R$, e per l’antisimmetria $a_1 = a_2$, contro l’ipotesi che i vertici del ciclo siano distinti. $\square$

- Il viceversa non vale: un grafo aciclico non rappresenta necessariamente una relazione d'ordine parziale. Per esempio la relazione $\{(1, 2), (2, 3)\}$ sull'insieme $\{1, 2, 3\}$ ha un grafo senza cicli, ma non è riflessiva $((1, 1)$ non appartiene alla relazione) né transitiva $((1, 3)$ non appartiene alla relazione).

Esempio 1.24

Il grafo direzionato della relazione $R_{\subseteq}$ sui sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è il seguente. Per non appesantire la figura non sono rappresentati l'insieme vuoto, gli insiemi formati da un solo numero (e quindi gli archi che partono da essi) e i cappi (S, S) ; tutti gli altri archi sono disegnati.



1.5.1 Massimo, massimali, minimo e minimali

Definizione 1.18: di massimo, massimale, minimo e minimale

Sia (A, R) un insieme parzialmente ordinato.

- Un elemento $\tilde{a} \in A$ è il **massimo** di A se:

$$(b, \tilde{a}) \in R, \quad \forall b \in A.$$

- Un elemento $\bar{a} \in A$ è un **elemento massimale** di A se non esiste $b \in A$ tale che:

$$(\bar{a}, b) \in R \quad \text{e} \quad b \neq \bar{a}.$$

- Un elemento $\tilde{a} \in A$ è il **minimo** di A se:

$$(\tilde{a}, b) \in R, \quad \forall b \in A.$$

- Un elemento $\bar{a} \in A$ è un **elemento minimale** di A se non esiste $b \in A$ tale che:

$$(b, \bar{a}) \in R \quad \text{e} \quad b \neq \bar{a}.$$

- Sul grafo direzionato: il massimo è il vertice in cui entra un arco da ogni vertice; un elemento massimale è un vertice da cui non esce nessun arco, a parte il cappio. Per il minimo e i minimali si scambiano archi entranti e uscenti.

Proposizione 1.19: unicità del massimo e del minimo

In un insieme parzialmente ordinato (A, R) il massimo, se esiste, è unico. Lo stesso vale per il minimo.

Dimostrazione. Siano $\tilde{a}_1$ e $\tilde{a}_2$ due massimi di A . Poiché $\tilde{a}_2$ è un massimo, $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \in R$; poiché $\tilde{a}_1$ è un massimo, $(\tilde{a}_2, \tilde{a}_1) \in R$. Per l'antisimmetria $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Per il minimo: se $\tilde{a}_1$ e $\tilde{a}_2$ sono due minimi, allora $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \in R$ perché $\tilde{a}_1$ è un minimo e $(\tilde{a}_2, \tilde{a}_1) \in R$ perché $\tilde{a}_2$ è un minimo, e di nuovo $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. $\square$

Osservazione 1.20: il massimo è l'unico elemento massimale

Se un insieme parzialmente ordinato (A, R) ha il massimo $\tilde{a}$, allora $\tilde{a}$ è un elemento massimale, ed è l'unico elemento massimale di A .

Dimostrazione. • $\tilde{a}$ è massimale: se $b \in A$ e $(\tilde{a}, b) \in R$, poiché $\tilde{a}$ è il massimo anche $(b, \tilde{a}) \in R$, e per l'antisimmetria $b = \tilde{a}$. Quindi non esiste $b \neq \tilde{a}$ con $(\tilde{a}, b) \in R$.

- $\tilde{a}$ è l'unico massimale: sia $\bar{a}$ un elemento massimale. Poiché $\tilde{a}$ è il massimo, $(\bar{a}, \tilde{a}) \in R$; poiché $\bar{a}$ è massimale, non può essere $\tilde{a} \neq \bar{a}$. Quindi $\bar{a} = \tilde{a}$. $\square$

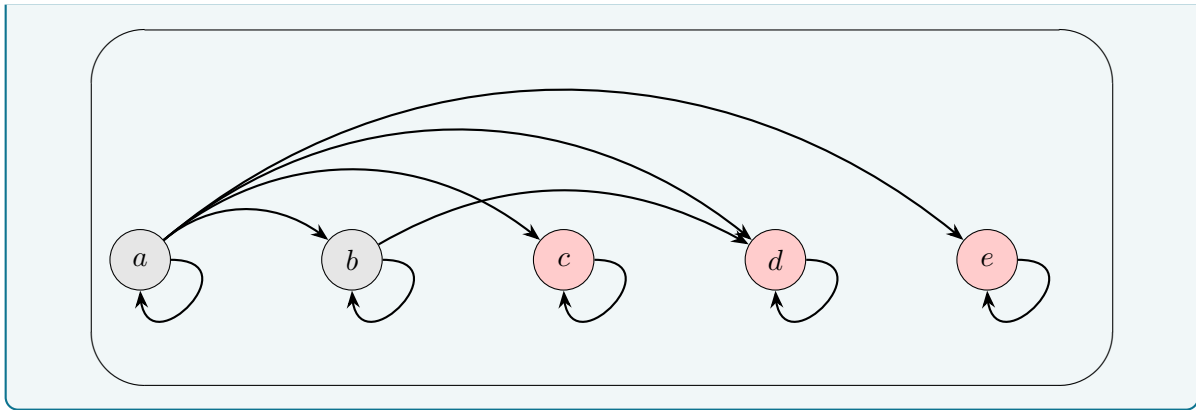
- In un insieme parzialmente ordinato potrebbe non esistere l'elemento massimo, ovvero un elemento a tale che:

$$\forall b \in A, \quad (b, a) \in R$$

Un insieme parzialmente ordinato potrebbe quindi contenere diversi elementi massimali a tali che, per nessun $b \in A$, dove $b \neq a$, abbiamo $(a, b) \in R$.

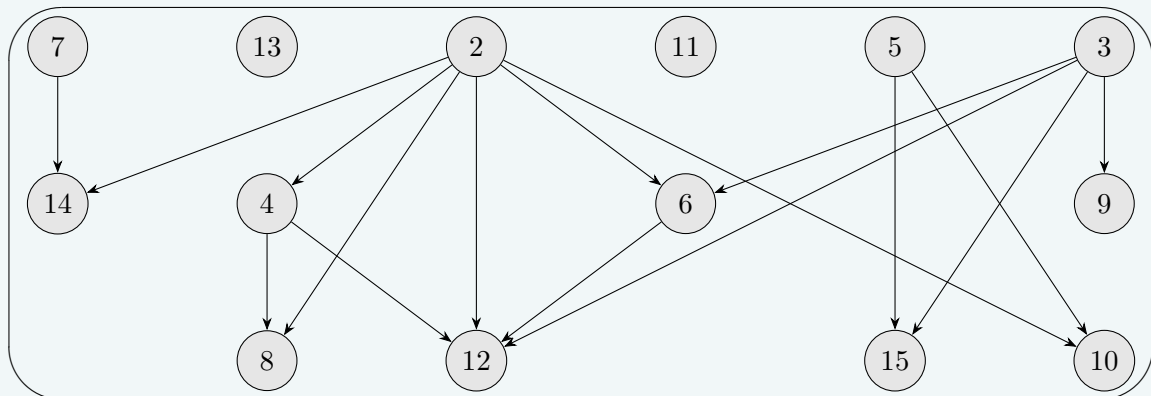
Esempio 1.25: elementi massimali

Il grafo direzionato di una relazione d'ordine parziale sull'insieme $\{a, b, c, d, e\}$ con tre elementi massimali, c , d ed e , in rosso. Non esiste il massimo: per esempio (d, c) non appartiene alla relazione. L'elemento a è il minimo.



Esempio 1.26

Il grafo direzionato associato alla relazione di ordine parziale “è divisore di” sull’insieme $\{2, 3, \dots, 15\}$ è il seguente (i cappi (a, a) , presenti per ogni a , non sono disegnati). Gli elementi massimali sono 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, che non dividono nessun altro numero dell’insieme, e non esiste il massimo. Gli elementi minimali sono 2, 3, 5, 7, 11 e 13, e non esiste il minimo.



Esempio 1.27

Dato un insieme di scatole di dimensioni diverse, la relazione “una scatola è contenuta nell’altra” sull’insieme di scatole può contenere diverse scatole massimali, ovvero scatole che non sono contenute in nessuna altra scatola.

1.6 Relazioni d’ordine totale

Definizione 1.21: di relazione totale

Una relazione R di un insieme A è una **relazione totale** se:

$$\forall a, b \in A, \quad (a, b) \in R \quad \text{o} \quad (b, a) \in R \quad (\text{o entrambi})$$

Osservazione 1.22: una relazione totale è riflessiva

Ogni relazione totale R su un insieme A è riflessiva.

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Scegliendo $b = a$ nella definizione di relazione totale otteniamo che $(a, a) \in R$ oppure $(a, a) \in R$, cioè $(a, a) \in R$. $\square$

Esempio 1.28

- La relazione $R_{\leq}$ è una relazione totale.
- La relazione $R_{\subseteq}$ non è una relazione totale in quanto prendendo ad esempio $S_1 = \{1, 2\}$ e $S_2 = \{2, 3\}$, $(S_1, S_2) \notin R_{\subseteq}$ e $(S_2, S_1) \notin R_{\subseteq}$.
- La relazione “è discendente di” non è una relazione totale in quanto esistono coppie di individui (a, b) per cui né a discende da b né b discende da a .
- La relazione $R_{<}$ non è una relazione totale, perché non è riflessiva: per $a = b = 1$ la condizione della definizione chiede $(1, 1) \in R_{<}$, che è falso.
- La relazione $R_{=}$ non è una relazione totale: per esempio $(3, 4) \notin R_{=}$ e $(4, 3) \notin R_{=}$.

Definizione 1.23: di relazione di ordine totale

Una relazione di ordine parziale che è anche una relazione totale è una **relazione di ordine totale**.

Esempio 1.29

- La relazione $R_{\leq}$ è una relazione di ordine totale.
- La relazione $R_{=}$ è una relazione d'ordine parziale ma non di ordine totale, perché non è una relazione totale.
- La relazione $R_{<}$ non è una relazione di ordine totale, perché non è una relazione d'ordine parziale.
- La relazione $R_{\subseteq}$ è una relazione d'ordine parziale ma non di ordine totale: come abbiamo visto, gli insiemi $S_1 = \{1, 2\}$ e $S_2 = \{2, 3\}$ non sono confrontabili.
- La relazione R_{mul} è una relazione d'ordine parziale ma non di ordine totale: per esempio $(6, 9) \notin R_{\text{mul}}$, perché non esiste $k \in \mathbb{N}$ con $6 = k \cdot 9$, e $(9, 6) \notin R_{\text{mul}}$, perché non esiste $k \in \mathbb{N}$ con $9 = k \cdot 6$.

Esempio 1.30: divisibilità fra potenze di 2

La relazione

$$R = \left\{ (a, b) : a, b \in A \text{ e } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } b = k a \right\}, \quad \text{con } A = \left\{ 2^n : n \in \mathbb{N} \right\},$$

cioè la relazione “è divisore di” sulle potenze di 2, è una relazione di ordine totale.

- È una relazione d'ordine parziale: riflessività, antisimmetria e transitività valgono per R_{div} su tutti i numeri naturali, quindi valgono in particolare per gli elementi di A .
- È una relazione totale: siano $a = 2^m$ e $b = 2^n$ due elementi di A , con $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m \leq n$, allora

$$b = 2^n = 2^{n-m} \cdot 2^m = 2^{n-m} a, \quad \text{con } 2^{n-m} \in \mathbb{N},$$

quindi $(a, b) \in R$. Se invece $n < m$, allo stesso modo $a = 2^{m-n} b$ e $(b, a) \in R$.

Definizione 1.24: di insieme totalmente ordinato

Si definisce **insieme totalmente ordinato** la coppia costituita da un insieme e da una relazione d'ordine totale definita su di esso.

Esempio 1.31

- Gli insiemi dei numeri naturali, razionali o reali con la relazione $R_{\leq}$ sono insiemi totalmente ordinati.

Proposizione 1.25: massimale e massimo in un insieme totalmente ordinato

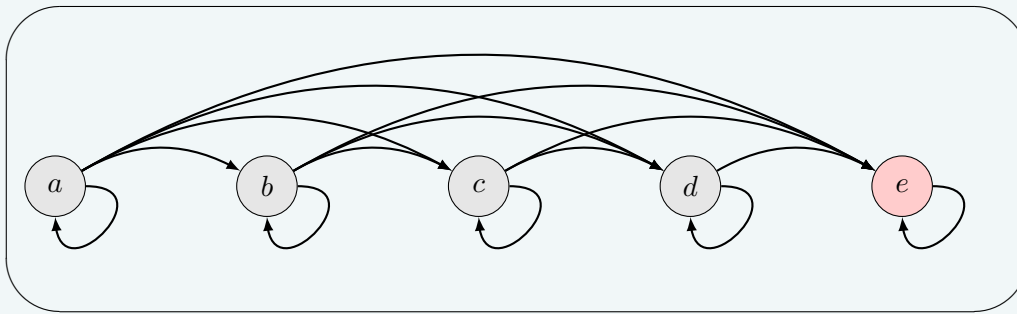
In un insieme totalmente ordinato (A, R) un elemento è massimale se e solo se è il massimo. Quindi un insieme totalmente ordinato ha al più un elemento massimale.

Dimostrazione. Se $\bar{a}$ è il massimo, allora è massimale, come abbiamo già dimostrato per ogni insieme parzialmente ordinato. Viceversa, sia $\bar{a}$ un elemento massimale e sia $b \in A$. Poiché la relazione è totale, $(b, \bar{a}) \in R$ oppure $(\bar{a}, b) \in R$. Nel secondo caso, poiché $\bar{a}$ è massimale, $b = \bar{a}$, e quindi $(b, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{a}) \in R$ per la riflessività. In entrambi i casi $(b, \bar{a}) \in R$, quindi $\bar{a}$ è il massimo. Poiché il massimo, se esiste, è unico, c'è al più un elemento massimale. $\square$

- “Al più” non si può sostituire con “esattamente”: l'insieme totalmente ordinato $(\mathbb{N}, R_{\leq})$ non ha elementi massimali, perché per ogni $a \in \mathbb{N}$ abbiamo $(a, a+1) \in R_{\leq}$ con $a+1 \neq a$.

Esempio 1.32: massimo

Il grafo direzionato di una relazione d'ordine totale sull'insieme $\{a, b, c, d, e\}$, con il massimo e in rosso:

**1.7 Funzioni****Definizione 1.26: di funzione**

Dati due insiemi A e B , una **funzione** f è una relazione binaria su A e B se, per ciascun $a \in A$, esiste uno e un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$.

Definizione 1.27: di dominio e codominio

L'insieme A è chiamato **dominio** di f , e l'insieme B è chiamato **codominio** di f .

- Scriviamo:

$$f : A \rightarrow B$$

e se $(a, b) \in f$, scriviamo:

$$b = f(a)$$

dato che b è univocamente determinato dalla scelta di a .

- Intuitivamente, la funzione f assegna un elemento di B a ciascun elemento di A . Nessun elemento di A è associato a due elementi differenti di B . Lo stesso elemento di B può però essere assegnato a elementi differenti di A .

Esempio 1.33

- La relazione binaria su $\mathbb{N}$ e $\{0, 1\}$:

$$f = \left\{ (a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \{0, 1\} \text{ e } b = a \bmod 2 \right\},$$

dove $a \bmod 2$ è il resto della divisione di a per 2, è una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ dato che per tutti i numeri naturali a , c'è esattamente un valore $b \in \{0, 1\}$ tale che $b = a \bmod 2$. Per esempio,

$$0 = f(0), \quad 1 = f(1), \quad 0 = f(2), \dots$$

Esempio 1.34

- La relazione binaria

$$g = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a + b \text{ è pari} \right\}$$

non è una funzione, dato che per esempio $(1, 3)$ e $(1, 5)$ sono entrambi in g . In altre parole per $a = 1$, non abbiamo uno e un solo b tale che $(a, b) \in g$.

Definizione 1.28: di argomento e valore

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, se $b = f(a)$, diciamo che $a \in A$ è l'argomento di f e che $b \in B$ è il valore di f associato ad a .

- Possiamo **definire una funzione** definendo direttamente il valore per tutti gli elementi del suo *dominio*.

Esempio 1.35

Per esempio, possiamo definire $f(n) = 2n$ per $n \in \mathbb{N}$, che significa:

$$f = \{(n, 2n) : n \in \mathbb{N}\} \text{ e } f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

- Il capitolo successivo, «[Funzioni](#)», riparte da questa definizione: una funzione $f : A \rightarrow B$ è una relazione binaria su A e B con la **proprietà funzionale** (a ogni $a \in A$ corrisponde uno e un solo $b \in B$). Lì si studiano dominio, codominio e immagine, e le funzioni iniettive, suriettive e biiettive.

Le funzioni

2.1 Il concetto di funzione

L'esistenza di una **grandezza variabile** sottintende l'esistenza di una **relazione** tra **due grandezze**, ovvero la dipendenza di una grandezza da un'altra.

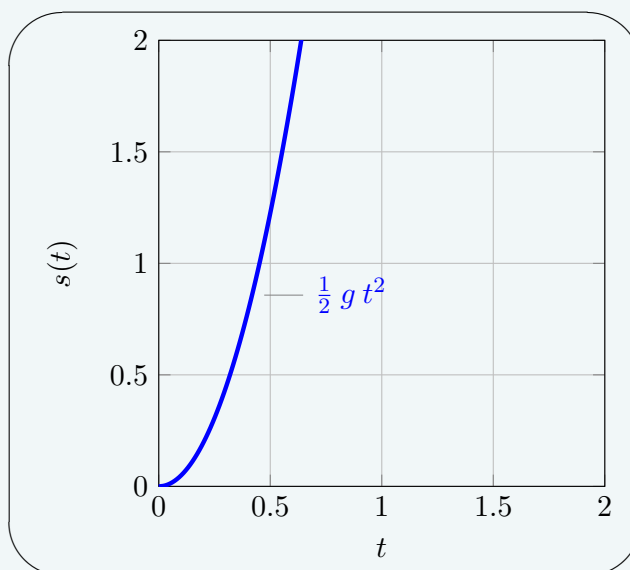
- Questa relazione segue, di volta in volta, una certa **legge** o **formula**.

Esempio 2.1: Leggi/formule $\rightarrow$ funzioni

Se si lascia cadere un oggetto pesante da una certa altezza, lo spazio percorso dall'oggetto varia col tempo t secondo la formula:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{con } t \geq 0$$

dove $g \approx 9,8$ è costante di accelerazione di gravità.



Al tempo t viene quindi associato lo spazio percorso $s(t)$: $t \mapsto s(t)$.

Esempio 2.2: Leggi/formule $\rightarrow$ funzioni

Se un capitale unitario viene investito per un anno al tasso annuale i con interessi pagati mensilmente a un tasso $\frac{i}{12}$, avremo:

- dopo il primo mese, un capitale pari a:

$$1 + \frac{i}{12} \cdot 1 = \underbrace{1 + \frac{i}{12}}_{\alpha}$$

- dopo il secondo mese, un capitale pari a:

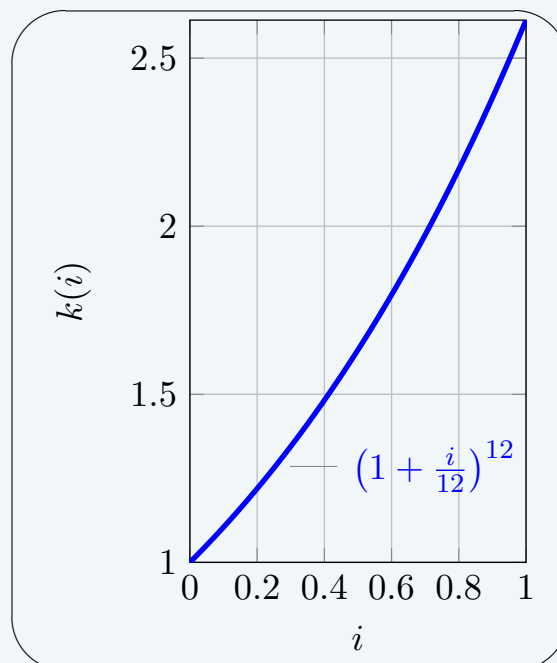
$$\underbrace{1 + \frac{i}{12}}_{\alpha} + \frac{i}{12} \underbrace{\left(1 + \frac{i}{12}\right)}_{\alpha} = \left(1 + \frac{i}{12}\right) \left(1 + \frac{i}{12}\right) = \underbrace{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^2}_{\beta}$$

- dopo il terzo mese, un capitale pari a:

$$\underbrace{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^2}_{\beta} + \frac{i}{12} \underbrace{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^2}_{\beta} = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^2 \left(1 + \frac{i}{12}\right) = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^3$$

Ripetendo il ragionamento, il capitale alla fine dell'anno dipende quindi dal tasso i secondo la formula:

$$k(i) = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} \quad \text{con } i \in [0, 1]$$



Al tasso i viene quindi associato il capitale $k(i)$ alla fine dell'anno: $i \mapsto k(i)$

- In ciascuno degli esempi precedenti, a un *numero reale* (**ingresso**) viene associato *univocamente* un altro *numero reale* (**uscita**). È proprio l'**univocità della relazione** a caratterizzare una funzione.
- In generale, gli **ingressi ammissibili** per una data relazione (funzione) sono soggetti a restrizioni naturali, legate alla natura stessa della relazione.

Esempio 2.3: Ingressi ammissibili

- Nel primo esempio il numero reale “di partenza” ha il significato di *tempo*; immaginando di lasciar cadere l’oggetto a un tempo iniziale $t = 0$ è evidente che ci si dovrà limitare a tempi $t \geq 0$.
- Nel secondo esempio, evidentemente dovrà essere $0 \leq i \leq 1$, dove 1 corrisponde a un tasso del 100%.

2.2 Definizione di funzione, dominio, codominio e immagine

Definizione 2.1: di dominio

L’insieme degli ingressi ammissibili per una data funzione prende il nome di **dominio**.

- Spesso si usano le locuzioni **variabile indipendente** per indicare un *ingresso* generico e **variabile dipendente** per indicare l’*uscita*.

Esempio 2.4: Altri tipi di relazioni

Consideriamo l’insieme degli studenti di un determinato corso.

- Se A è l’insieme degli studenti e B è l’insieme dei loro nomi, la relazione che associa ad ogni studente il suo nome è *univoca*.
- In questo caso né A né B sono insiemi numerici, ma tuttavia risulta ben definita una relazione univoca tra questi due insiemi.

Mentre il viceversa non è necessariamente vero: potrebbero esserci due studenti con lo stesso nome.

Definizione 2.2: di funzione

Dati due insiemi A, B qualsiasi, una **funzione** f di **dominio** A a valori in B (o anche “di **codominio** B ”) è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B .

- Nel linguaggio del capitolo precedente, «Relazioni binarie», la legge f si identifica con l’insieme delle coppie $(x, f(x))$ con $x \in A$: una funzione è quindi una **relazione binaria** su A e B con la **proprietà funzionale**, cioè a ogni $x \in A$ corrisponde uno e un solo $y \in B$ con (x, y) nella relazione (è la definizione di funzione data in quel capitolo).

- La scrittura:

$$f : A \rightarrow B$$

(che si legge “ f definita da A a B ”), indica il **dominio** e il **codominio** della funzione f .

- La scrittura

$$f : x \mapsto f(x)$$

(che si legge “ f ad x associa $f(x)$ ”) indica come la funzione f agisce sugli elementi.

- Il **simbolo** $f(x)$ **indica l’uscita o il valore** che la funzione f associa ad x , e non va confuso col simbolo f , che denota la **funzione stessa**.

Esempio 2.5: Notazione delle funzioni

Per la funzione

$$k(i) = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}$$

dell’esempio precedente si avrebbe:

$$k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k : i \mapsto \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}$$

Definizione 2.3: di uguaglianza di due funzioni

Due funzioni f e g sono **uguali** se hanno lo stesso dominio A , lo stesso codominio B e se

$$f(a) = g(a), \quad \text{per ogni } a \in A.$$

- Una funzione non è quindi solo una “formula”: **dominio e codominio fanno parte della funzione**. Cambiando uno dei due si ottiene una funzione diversa, anche a parità di legge.

Esempio 2.6: funzioni uguali e funzioni diverse

Consideriamo le tre funzioni

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^2 \quad g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \quad g : x \mapsto x^2 \quad h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : x \mapsto x^2$$

- $f \neq g$: hanno lo stesso dominio e la stessa legge, ma codomini diversi;
- $f \neq h$: hanno lo stesso codominio e la stessa legge, ma domini diversi.

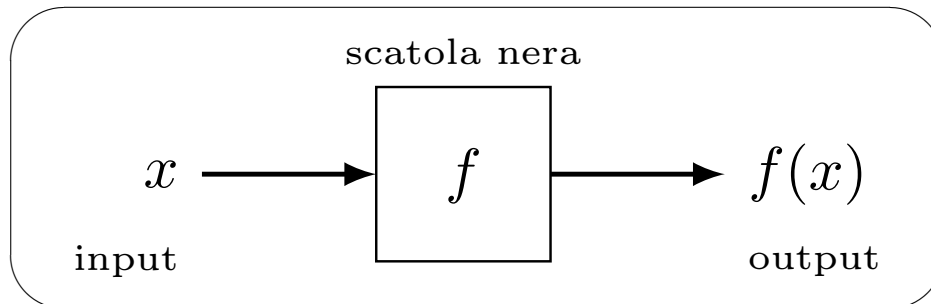
- Si usa anche la scrittura

$$y = f(x)$$

per indicare che la variabile y è funzione di x . In questo caso y è l’uscita o il valore che f associa all’ingresso x .

Per brevità, a volte si definisce direttamente il valore di $f(x)$ in funzione di x , come ad esempio $f(x) = x^2 + 10$.

- In generale, si può pensare a una funzione come a una **scatola nera** che a ogni ingresso ammissibile x (**input**) associa un'unica uscita $f(x)$ (**output**) :



Definizione 2.4: di immagine e immagine del dominio

L'uscita corrispondente a x si chiama **immagine** di x ; l'insieme delle possibili uscite si chiama **immagine del dominio** A tramite f e si indica con il simbolo $f(A)$ o $\text{Im } f$.

- Si noti che nella scrittura $f : A \rightarrow B$, il codominio B può essere più grande dell'immagine $f(A)$, ovvero in generale abbiamo

$$f(A) \subseteq B.$$

- Se f ha valori reali, solitamente si scrive $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ senza precisare quale sia l'effettiva immagine di f .

Definizione 2.5: di immagine di un sottoinsieme del dominio

Data una funzione $f : A \rightarrow B$ e un sottoinsieme $A' \subseteq A$, l'**immagine di A' tramite f** è l'insieme delle uscite prodotte dagli ingressi di A' :

$$f(A') = \{b \in B : b = f(a) \text{ per qualche } a \in A'\}.$$

- Prendendo $A' = A$ si ritrova l'*immagine del dominio*, che si scrive quindi in forma esplicita come

$$f(A) = \{b \in B : b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\} \subseteq B.$$

Esempio 2.7: immagine del dominio e immagine di un sottoinsieme

Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f : n \mapsto 2n$$

- L'immagine del suo dominio è

$$f(\mathbb{N}) = \{m \in \mathbb{N} : m = 2n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\},$$

ovvero l'insieme dei **numeri pari non negativi**. In particolare $f(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{N}$: il codominio è strettamente più grande dell'immagine.

- L'immagine del sottoinsieme $A' = \{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ è invece

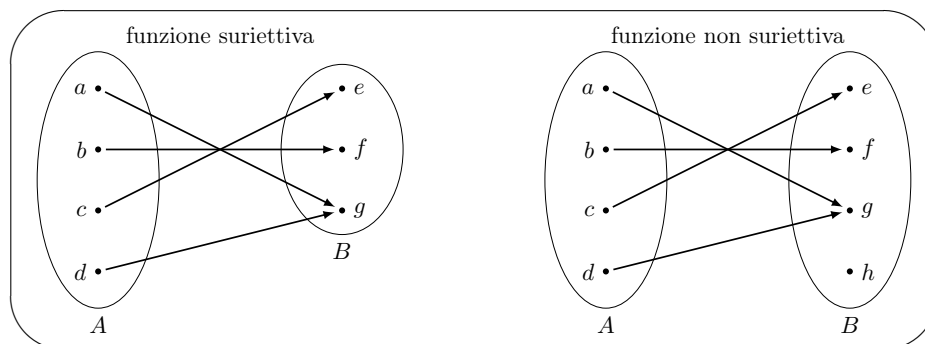
$$f(A') = \{0, 2, 4, 6\}.$$

2.3 Suriezioni, iniezioni e biiezioni

Definizione 2.6: di suriezione (funzione suriettiva)

Una funzione f è una **suriezione** se l'immagine del suo dominio corrisponde al suo codominio.

- Se $f : A \rightarrow B$ è una suriezione si dice anche che f **mappa A su B** (in inglese “ f maps A onto B ”). Si noti che la parola inglese *mapping* indica una funzione qualsiasi: è la preposizione *onto* (“su”) a esprimere la suriettività.
- Rappresentazione insiemistica:



Esempio 2.8: funzioni suriettive e non suriettive

- La funzione $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ è una funzione suriettiva da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, dato che ogni elemento nel codominio $\mathbb{N}$ è l'immagine di un qualche valore del dominio.
- La funzione $f(n) = 2n$ non è una funzione suriettiva da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, dato che nessun argomento di f produce 3 come valore.
- La funzione $f(n) = 2n$ è però una funzione suriettiva dai numeri naturali ai numeri pari.

Osservazione 2.7

Dati due insiemi **finiti** A e B , e una funzione $f : A \rightarrow B$, se f è suriettiva allora $|A| \geq |B|$.

Dimostrazione. Scriviamo $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, con $m = |B|$, e per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ consideriamo l'insieme degli ingressi che hanno b_i come uscita:

$$A_i = \{a \in A : f(a) = b_i\} \subseteq A.$$

- Ogni A_i è **non vuoto**: poiché f è suriettiva, ogni b_i è immagine di almeno un elemento di A , quindi $|A_i| \geq 1$.
- Gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono a **due a due disgiunti**: se $a \in A_i \cap A_j$ allora $b_i = f(a) = b_j$, perché f associa ad a una e una sola uscita, e quindi $i = j$.
- La loro **unione è tutto** A : ogni $a \in A$ appartiene all'insieme A_i con $b_i = f(a)$.

Gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_m$ formano quindi una *partizione* di A e, essendo A finito, contiamo gli elementi di A sommando le cardinalità dei blocchi:

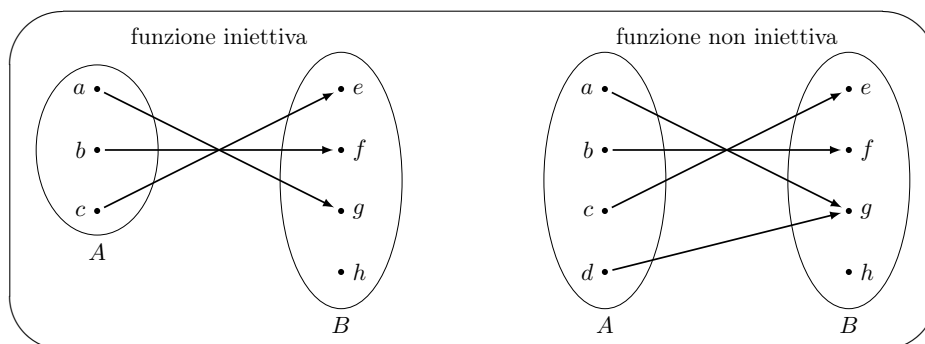
$$|A| = \sum_{i=1}^m |A_i| \geq \sum_{i=1}^m 1 = m = |B|.$$

□

Definizione 2.8: di iniezione (funzione iniettiva)

Una funzione f è un'**iniezione** se argomenti distinti di f producono valori distinti, ovvero se $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$.

- rappresentazione insiemistica:



Esempio 2.9

- La funzione $f(n) = 2n$ è una funzione iniettiva da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, dato che ciascun numero pari b è l'immagine attraverso f di esattamente un elemento del dominio, ovvero $n = \frac{b}{2}$.
- La funzione $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ non è una funzione iniettiva dato che il valore 1 si ottiene con due argomenti: 2 e 3.

- Una iniezione è anche chiamata una funzione **one-to-one**.

Osservazione 2.9

Dati due insiemi **finiti** A e B , e una funzione $f : A \rightarrow B$, se f è iniettiva allora $|A| \leq |B|$.

Dimostrazione. Scriviamo $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, con $n = |A|$, e consideriamo le n uscite

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \in f(A).$$

- Queste uscite sono **tutte distinte**: se $i \neq j$ allora $a_i \neq a_j$ e, poiché f è iniettiva, $f(a_i) \neq f(a_j)$.
- Ogni elemento di $f(A)$ **compare** nell'elenco: per definizione di immagine del dominio, ogni $b \in f(A)$ è della forma $b = f(a)$ con $a \in A$, cioè $a = a_i$ per qualche $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

L'elenco $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ enumera quindi gli elementi di $f(A)$ senza ripetizioni, e perciò

$$|A| = n = |f(A)|.$$

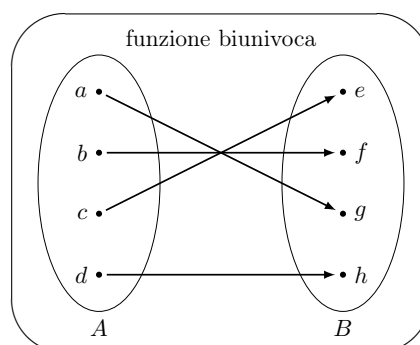
Infine $f(A) \subseteq B$ e B è finito, quindi $|f(A)| \leq |B|$. Mettendo insieme le due relazioni otteniamo $|A| \leq |B|$. □

Le due osservazioni precedenti sono enunciate per insiemi **finiti**: le dimostrazioni *contano* gli elementi, e il conteggio ha senso solo per insiemi finiti. Il confronto fra le “grandezze” di due insiemi infiniti richiede una nozione diversa di cardinalità, che si introduce nel capitolo “**Cardinalità degli insiemi infiniti**” della Parte 2.

Definizione 2.10: di biiezione (funzione biunivoca o bigettiva)

Una funzione f è una **biiezione** se: (i) è iniettiva e (ii) è suriettiva.

- rappresentazione insiemistica:



Esempio 2.10

- La funzione $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$ è una biiezione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$. I valori della funzione sono:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = -2, \quad f(4) = 2 \dots$$

La funzione è iniettiva, dato che nessun elemento di $\mathbb{Z}$ è immagine di più di un elemento di $\mathbb{N}$. La funzione è suriettiva, dato che tutti gli elementi di $\mathbb{Z}$ sono immagini di un qualche elemento di $\mathbb{N}$.

- Una biiezione è chiamata anche una corrispondenza **one-to-one**, dato che accoppia elementi del dominio a elementi del codominio.
- Una biiezione da un insieme A a se stesso è chiamata anche **permutazione**.

2.4 Inversa di una biiezione

- Una biiezione $f : A \rightarrow B$ accoppia ogni elemento di A con un elemento di B e viceversa: si può quindi percorrere l'accoppiamento anche nel verso opposto, da B ad A .

Definizione 2.11: di inversa di una biiezione

Data una biiezione $f : A \rightarrow B$, la sua **inversa** è la funzione

$$f^{-1} : B \rightarrow A, \quad f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

- La definizione è ben posta, cioè f^{-1} è davvero una funzione, proprio perché f è una biiezione: dato $b \in B$,
 - la *suriettività* di f garantisce che esista *almeno un* $a \in A$ con $f(a) = b$;
 - l'*iniettività* di f garantisce che ne esista *al più uno*, perché due ingressi distinti hanno uscite distinte.

Quindi a ogni $b \in B$ corrisponde *uno e un solo* $a \in A$, come richiede la definizione di funzione.

- In altre parole, se f applicata all'ingresso a dà l'uscita b , allora f^{-1} applicata a b restituisce a :

$$f^{-1}(f(a)) = a, \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(b)) = b, \quad \forall b \in B.$$

Qui l'inversa è definita su **tutto** il codominio B , e perciò servono *sia* l'iniettività *sia* la suriettività di f . Nel capitolo "[Funzioni inverse](#)" si studiano invece le funzioni reali di variabile reale, e lì una funzione si dice *invertibile* quando è soltanto **iniettiva**: l'inversa viene costruita sull'*immagine* $f(D)$ e non su tutto il codominio, e rispetto all'immagine la suriettività è automatica.

Esempio 2.11: inversa di una biiezione

Riprendiamo la biiezione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dell'esempio precedente,

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

che accoppia $0 \leftrightarrow 0, 1 \leftrightarrow -1, 2 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow -2, 4 \leftrightarrow 2, \dots$

La sua inversa $f^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ è:

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m & \text{se } m \geq 0 \\ -(2m+1) & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Infatti, se $m \geq 0$, allora $n = 2m$ è pari e $f(n) = (-1)^{2m} \lceil m \rceil = m$; se invece $m < 0$, allora $n = -(2m+1) = -2m-1$ è dispari e non negativo, e

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{-2m-1}{2} \right\rceil = - \left\lceil -m - \frac{1}{2} \right\rceil = -(-m) = m,$$

dove si è usato che $-m - \frac{1}{2}$ ha parte intera superiore $-m$, essendo $-m$ un intero positivo.

Funzioni reali di variabile reale

3.1 Funzione reale di variabile reale

Definizione 3.1: funzione reale di variabile reale

Una funzione che ha per dominio D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e per codominio $\mathbb{R}$:

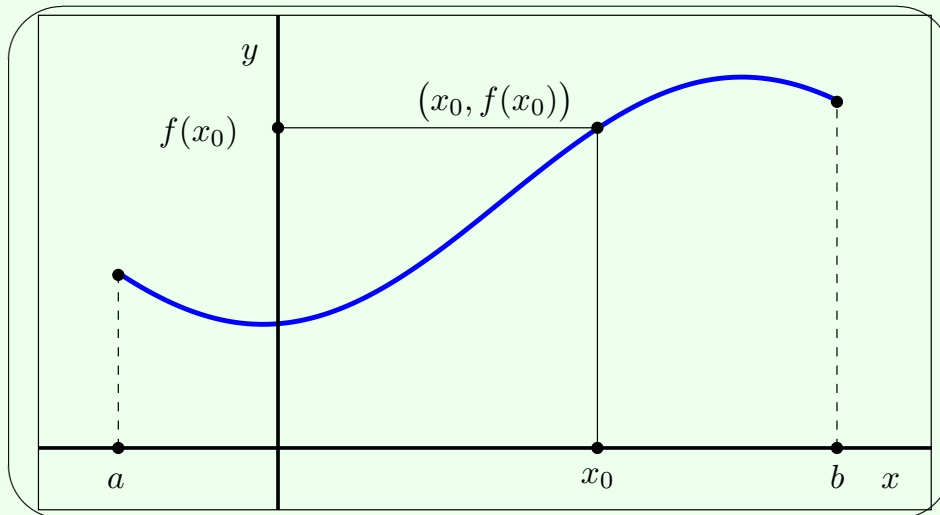
$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto f(x)$$

si chiama **funzione reale di variabile reale**.

- Sono funzioni in cui la variabile di “ingresso” x e quella di “uscita” $f(x)$ sono numeri reali.
- Le funzioni reali di variabile reale più comuni hanno come dominio D e come immagine $f(D)$ un **intervallo** (eventualmente tutto $\mathbb{R}$) o l’unione di un **numero finito di intervalli**.

La dipendenza dell’uscita $f(x)$ dall’ingresso x si visualizza efficacemente disegnando il **grafico** di f , ossia l’insieme dei punti del piano di coordinate (x, y) con $y = f(x)$ e x nel dominio D .

Esempio di grafico di funzione reale di variabile reale di dominio $D = [a, b]$ (un intervallo chiuso e limitato):



Ogni retta parallela all'asse delle ordinate che interseca l'asse delle ascisse in un punto x_0 del dominio D , interseca il grafico di f in uno e un solo punto. ^a **Non tutte le curve sono quindi grafici di funzioni.**

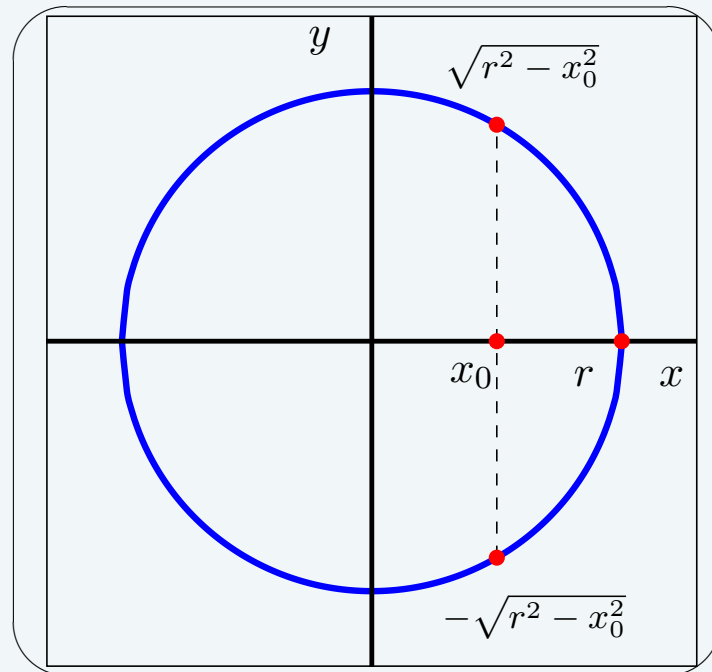
Si noti che, invece, nulla impedisce che una retta parallela all'asse delle ascisse intersechi il grafico di f in più punti o in nessun punto.

^aSe la retta non intersecasse il grafico significherebbe che all'ingresso x non corrisponde alcuna uscita. Se la retta intersecasse in più di un punto significherebbe che all'ingresso x corrispondono più uscite distinte, cadendo quindi l'univocità della funzione.

Esempio 3.1: curva che non corrisponde al grafico di una funzione

Consideriamo ad esempio la curva dei punti della circonferenza di raggio r :

$$x^2 + y^2 = r^2 \iff y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



All'ingresso $x_0 \in (-r, r)$ non è possibile associare un'unica uscita, quindi questa curva non corrisponde al grafico di una funzione!

3.2 Segno di una funzione

- Le proprietà di una funzione si studiano quasi sempre non solo su tutto il dominio, ma anche su una sua **parte**: si dice per esempio che $x \mapsto x^2$ è “positiva per $x > 0$ ” o che $x \mapsto x^2$ è “decrecente in $(-\infty, 0]$ ”. Conviene quindi dare le definizioni direttamente **su un sottoinsieme I del dominio**, e ritrovare poi la proprietà “globale” come caso particolare $I = D$.

Definizione 3.2: segno di una funzione in un sottoinsieme del dominio

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $I \subseteq D$, la funzione si dice

$$\begin{cases} \text{non negativa in } I & \text{se } f(x) \geq 0, \forall x \in I \\ \text{positiva in } I & \text{se } f(x) > 0, \forall x \in I \\ \text{non positiva in } I & \text{se } f(x) \leq 0, \forall x \in I \\ \text{negativa in } I & \text{se } f(x) < 0, \forall x \in I \end{cases}$$

Quando il sottoinsieme non viene indicato si intende *tutto il dominio*: una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **non negativa (positiva, non positiva, negativa)** se è non negativa (positiva, non positiva, negativa) in $I = D$.

- Graficamente: f è non negativa in I se nessun punto del grafico con ascissa in I sta sotto l'asse delle ascisse; è positiva in I se tutti questi punti stanno *strettamente sopra* l'asse delle ascisse.
- Se f è positiva in I allora è anche non negativa in I ; il viceversa è falso, perché f può annullarsi in qualche punto di I .

Esempio 3.2: segno di una funzione

- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$ è *non negativa* in $\mathbb{R}$, dato che $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Non è però *positiva* in $\mathbb{R}$, perché $f(0) = 0$: lo è invece in $I = (0, +\infty)$ e in $I = (-\infty, 0)$.
- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^3$ è *positiva* in $(0, +\infty)$ e *negativa* in $(-\infty, 0)$, dato che

$$x^3 > 0 \iff x > 0 \quad \text{e} \quad x^3 < 0 \iff x < 0.$$
- La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ è *positiva* in $(0, +\infty)$ e *negativa* in $(-\infty, 0)$: il segno di $\frac{1}{x}$ coincide con il segno di x .

3.3 Funzioni limitate

Definizione 3.3: funzioni limitate in un sottoinsieme del dominio

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $I \subseteq D$, la funzione si dice

$$\begin{cases} \text{limitata superiormente in } I & \text{se } \exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \quad \forall x \in I \\ \text{limitata inferiormente in } I & \text{se } \exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \quad \forall x \in I \\ \text{limitata in } I & \text{se } \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in I \end{cases}$$

- Un numero $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in I$ si chiama **maggiorante** dei valori di f in I ; un numero $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in I$ si chiama **minorante** dei valori di f in I . Quindi f è limitata superiormente in I se i suoi valori in I ammettono un maggiorante, limitata inferiormente in I se ammettono un minorante.

Quando il sottoinsieme non viene indicato si intende *tutto il dominio*: una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **limitata superiormente** (**limitata inferiormente**, **limitata**) se lo è in $I = D$.

- Una funzione è limitata in I se e solo se è limitata sia superiormente sia inferiormente in I . Infatti:
 1. se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$, allora $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in I$, quindi M è un maggiorante e $-M$ un minorante;

2. viceversa, se $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in I$, posto $K = \max\{|m|, |M|\} \geq 0$ si ha $-K \leq m \leq f(x) \leq M \leq K$, cioè $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in I$.

• Graficamente abbiamo:

1. una funzione è limitata superiormente se il suo grafico è contenuto nel semipiano inferiore delimitato da una retta parallela all'asse delle ascisse
2. una funzione è limitata inferiormente se il suo grafico è contenuto nel semipiano superiore delimitato da una retta parallela all'asse delle ascisse
3. una funzione è limitata se il suo grafico è contenuto in una striscia orizzontale

Esempio 3.3: funzione limitata

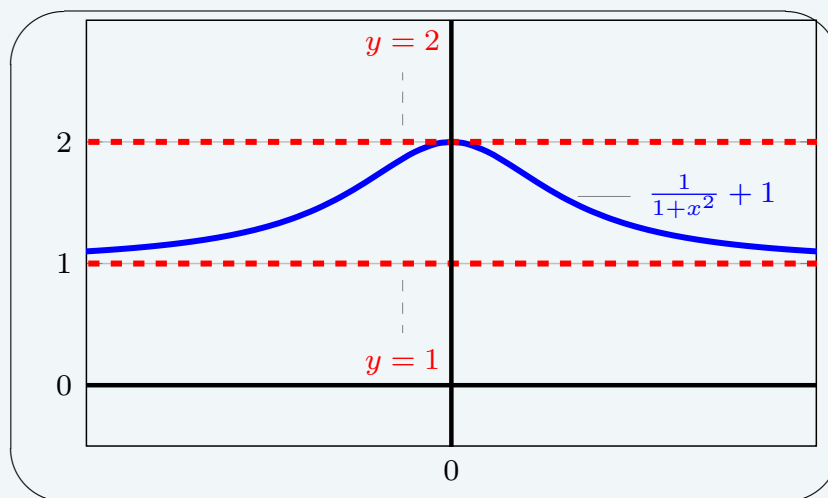
Consideriamo la funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + 1$$

abbiamo

$$\frac{1}{1+x^2} + 1 = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} + 1 = 2 - \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{quindi} \quad 1 < \frac{1}{1+x^2} + 1 \leq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

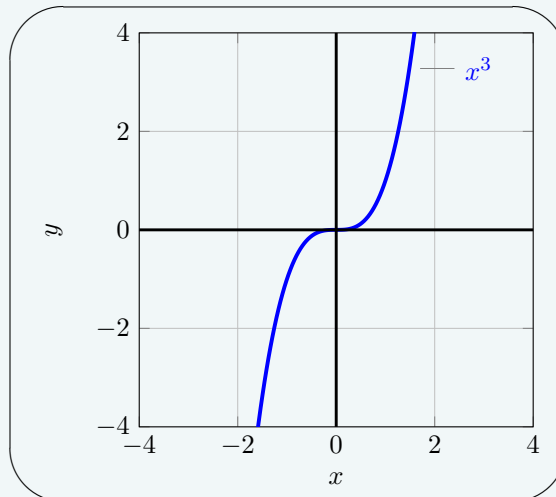


Esempio 3.4: Funzione non limitata

La funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^3 \quad (y = x^3)$$

non è limitata né superiormente, né inferiormente.

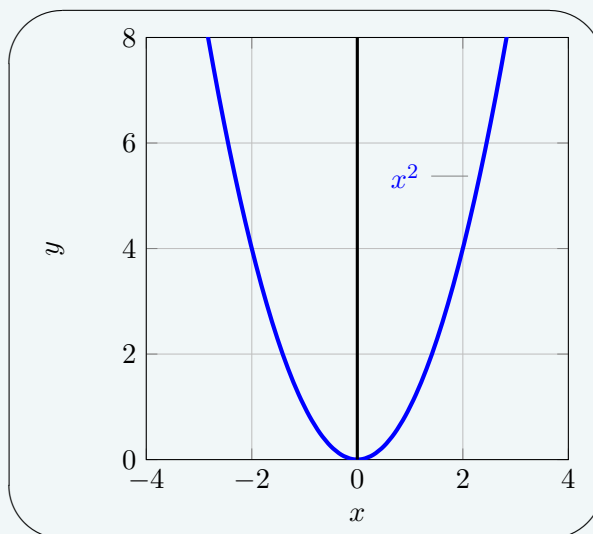


Esempio 3.5: Funzione limitata inferiormente

La funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^2 \quad (y = x^2)$$

è limitata inferiormente; infatti $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$



Esempio 3.6: limitatezza in un sottoinsieme del dominio

Una funzione può non essere limitata nel suo dominio ed esserlo in un suo sottoinsieme.

- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^3$ non è limitata in $\mathbb{R}$, ma è limitata in $I = [-2, 2]$: infatti per $-2 \leq x \leq 2$ si ha

$$|x^3| = |x|^3 \leq 2^3 = 8.$$

- La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \frac{1}{x}$ **non** è limitata superiormente in $I = (0, +\infty)$:

dato un qualunque $M \in \mathbb{R}$ con $M > 0$, scegliendo x con $0 < x < \frac{1}{M}$ si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{x} > M,$$

quindi nessun numero reale è maggiorante dei valori di f in $(0, +\infty)$. La stessa funzione è invece limitata in $I = [1, +\infty)$, dove $0 < \frac{1}{x} \leq 1$.

- Equivalentemente, si può dire che una funzione è *limitata superiormente* (*limitata inferiormente*, *limitata*) se, rispettivamente, la sua **immagine** è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ *limitato superiormente* (*limitato inferiormente*, *limitato*).

3.4 Funzioni simmetriche

Definizione 3.4: di funzione pari

Funzioni che hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate si chiamano **pari**.

- Sono caratterizzate dalla relazione

$$f(-x) = f(x)$$

che esprime l'uguaglianza delle ordinate corrispondenti ai punti x e $-x$, simmetrici rispetto a $x = 0$.

Definizione 3.5: Funzione dispari

Funzioni che hanno il grafico simmetrico rispetto all'origine si chiamano **dispari**.

- Sono caratterizzate dalla relazione

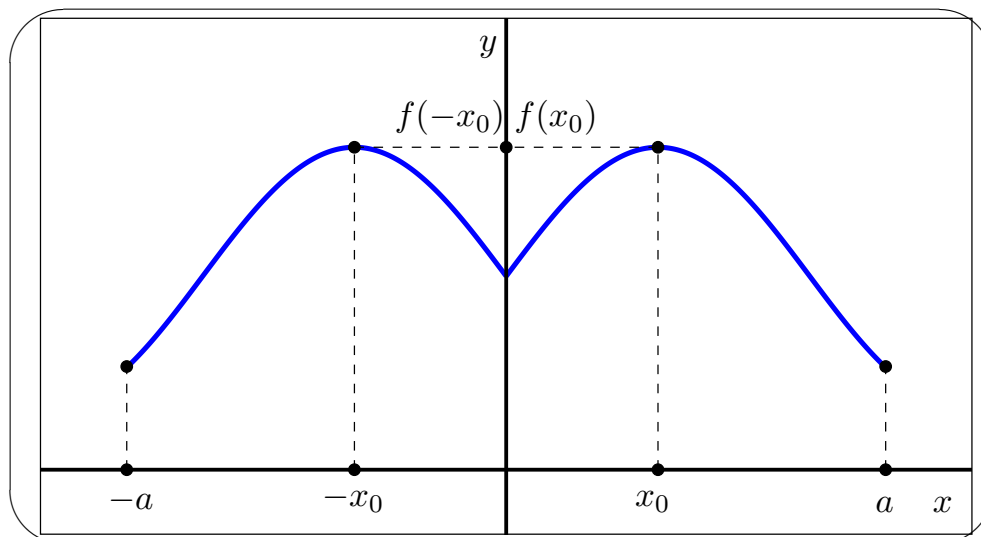
$$f(-x) = -f(x)$$

che esprime che le ordinate corrispondenti ai punti x e $-x$, simmetrici rispetto a $x = 0$, sono una l'opposto dell'altra.

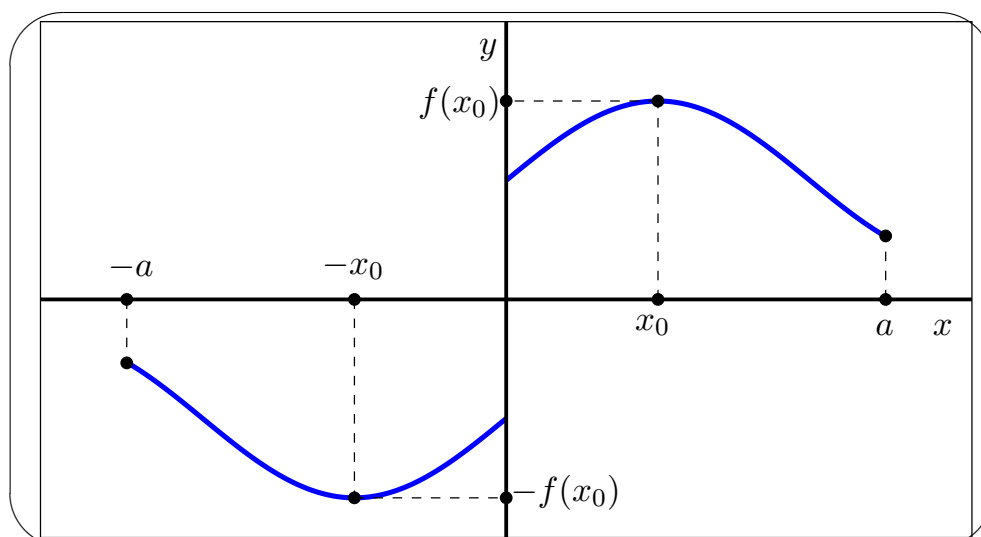
Esempio 3.7: Funzioni pari e dispari

Per esempio, la funzione $x \mapsto x^2$ è pari, mentre $x \mapsto x^3$ è dispari. Più in generale, le potenze a esponente intero sono funzioni pari se l'esponente è pari e sono dispari se l'esponente è dispari.

1. Esempio di grafico di funzione pari:



2. Esempio di grafico di funzione dispari:



Una funzione *non può* avere il grafico simmetrico rispetto all'asse x , in quanto verrebbe meno l'univocità della corrispondenza.

3.5 Funzioni monotone

Definizione 3.6: Funzione non decrescente in un sottoinsieme del dominio

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $I \subseteq D$, la funzione si dice **non decrescente in I** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (3.1)$$

Definizione 3.7: Funzione crescente in un sottoinsieme del dominio

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $I \subseteq D$, la funzione si dice **crescente in I** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (3.2)$$

Definizione 3.8: Funzione non crescente in un sottoinsieme del dominio

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $I \subseteq D$, la funzione si dice **non crescente in I** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \quad (3.3)$$

Definizione 3.9: Funzione decrescente in un sottoinsieme del dominio

Dati una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme $I \subseteq D$, la funzione si dice **decrescente in I** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \quad (3.4)$$

- Una funzione f è *non decrescente* in I se, all'aumentare di x in I , l'ordinata corrispondente sul grafico della funzione non diminuisce (quindi o rimane uguale o aumenta); è *crescente* in I se aumenta sempre;
- Una funzione f è *non crescente* in I se, all'aumentare di x in I , l'ordinata corrispondente sul grafico della funzione non aumenta (quindi o rimane uguale o diminuisce); è *decrescente* in I se diminuisce sempre.

- Una funzione si dice **monotona in I** se è *non decrescente in I* oppure *non crescente in I* .
- Una funzione si dice **strettamente monotona in I** se è *crescente in I* oppure *decrescente in I* .

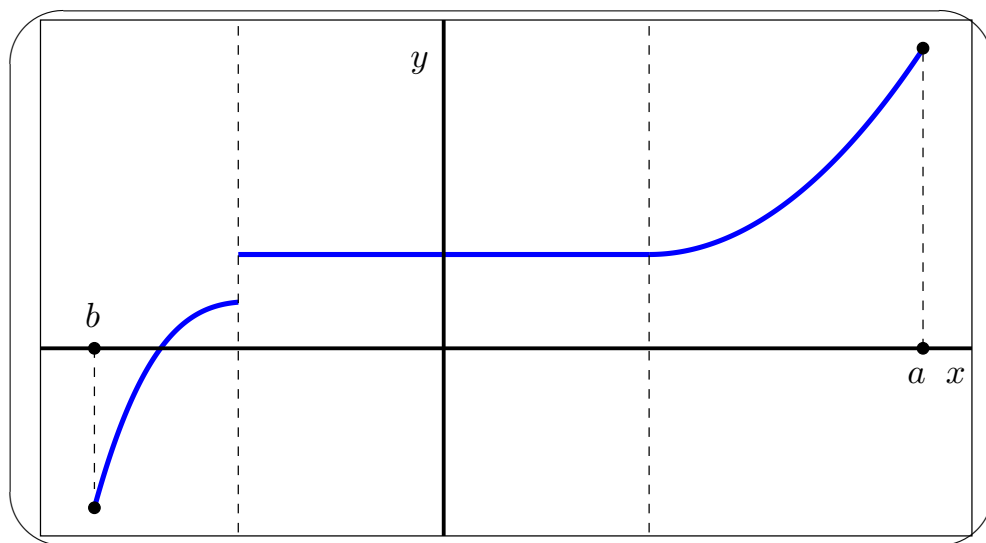
Quando il sottoinsieme non viene indicato si intende *tutto il dominio*: una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **non decrescente** (**crescente**, **non crescente**, **decrescente**, **monotona**, **strettamente monotona**) se lo è in $I = D$.

- Una funzione crescente in I è in particolare non decrescente in I (perché $f(x_1) < f(x_2)$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$), e una funzione decrescente in I è in particolare non crescente in I . Quindi **ogni funzione strettamente monotona in I è anche monotona in I** ; il viceversa è falso, come mostra la funzione costante.

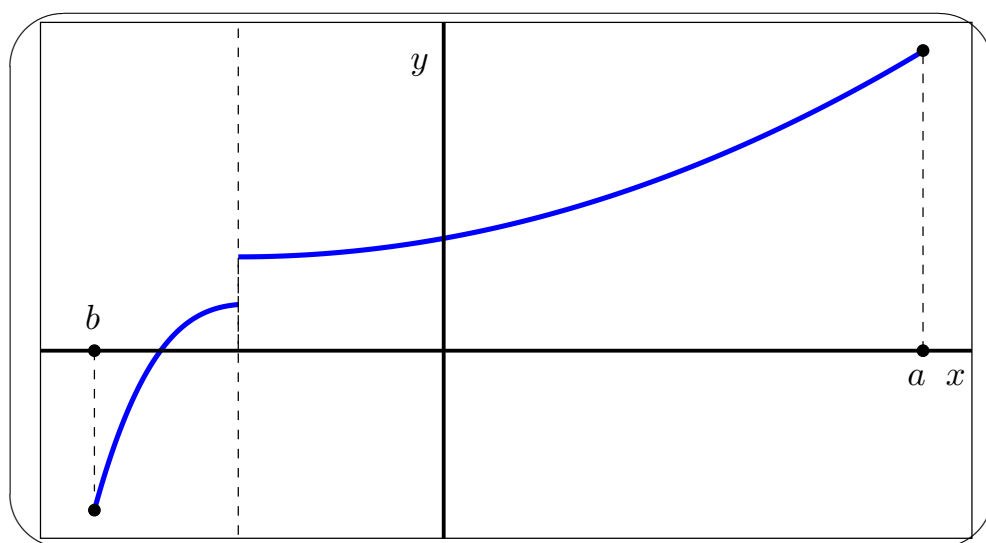
Esempio 3.8: Funzioni monotone

- La funzione $x \mapsto x^3$ è *crescente* in $\mathbb{R}$ (quindi strettamente monotona in $\mathbb{R}$).
- La funzione costante $x \mapsto k$ (che ha come grafico la retta di equazione $y = k$) è sia *non decrescente* sia *non crescente* in $\mathbb{R}$: è quindi monotona, ma non è né crescente né decrescente, e perciò non è strettamente monotona.
- La funzione $x \mapsto x^2$ è *decrescente* in $(-\infty, 0]$ ed è *crescente* in $[0, +\infty)$, ma **non** è monotona in $\mathbb{R}$: infatti $f(-1) = 1 > f(0) = 0$ (quindi non è non decrescente in $\mathbb{R}$) e $f(0) = 0 < f(1) = 1$ (quindi non è non crescente in $\mathbb{R}$). È l'esempio tipico di proprietà che vale *localmente* ma non su tutto il dominio.

1. Esempio di grafico di funzione non decrescente (tratto orizzontale):



2. Esempio di grafico di funzione crescente:



3.6 Funzioni periodiche

Definizione 3.10: Funzione periodica

Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (non costante) è **periodica** di periodo T , $T > 0$, se T è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in D$$

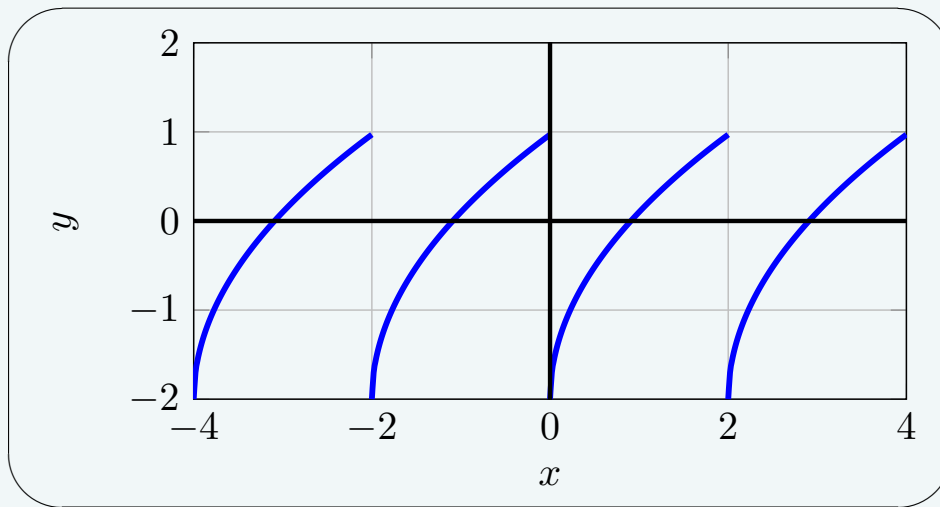
- Ogni intervallo di lunghezza T , contenuto in D , si chiama **intervallo di periodicità**.

Esempio 3.9: Funzioni periodiche

Tipici esempi di funzioni periodiche sono le *funzioni trigonometriche* $x \mapsto \sin(x)$ ($T = 2\pi$), $x \mapsto \cos(x)$ ($T = 2\pi$) e $x \mapsto \tan(x)$ ($T = \pi$).

Esempio 3.10: Grafico di funzioni periodiche

Grafico di funzione periodica di periodo $T = 2$:



- Le rette parallele all'asse delle ascisse, hanno equazione

$$y = k \quad k \in \mathbb{R}$$

Funzioni potenza

4.1 Funzioni potenza

Definizione 4.1: funzioni potenza

Dato $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, la funzione:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^\alpha \quad (4.1)$$

si chiama **funzione potenza** con esponente α . Il dominio D dipende dal valore di α :

- con esponente razionale $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}_+$ coprimi, abbiamo quattro casi:

$$D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ dispari e } \frac{m}{n} > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ dispari e } \frac{m}{n} < 0 \\ [0, +\infty) & \text{se } n \text{ pari e } \frac{m}{n} > 0 \\ (0, +\infty) & \text{se } n \text{ pari e } \frac{m}{n} < 0 \end{cases}$$

- con esponente reale e non razionale $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, abbiamo due casi:

$$D = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{se } \alpha > 0 \\ (0, +\infty) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

4.1.1 Esponente razionale

Con $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}_+$ coprimi, abbiamo una funzione potenza a esponente razionale:

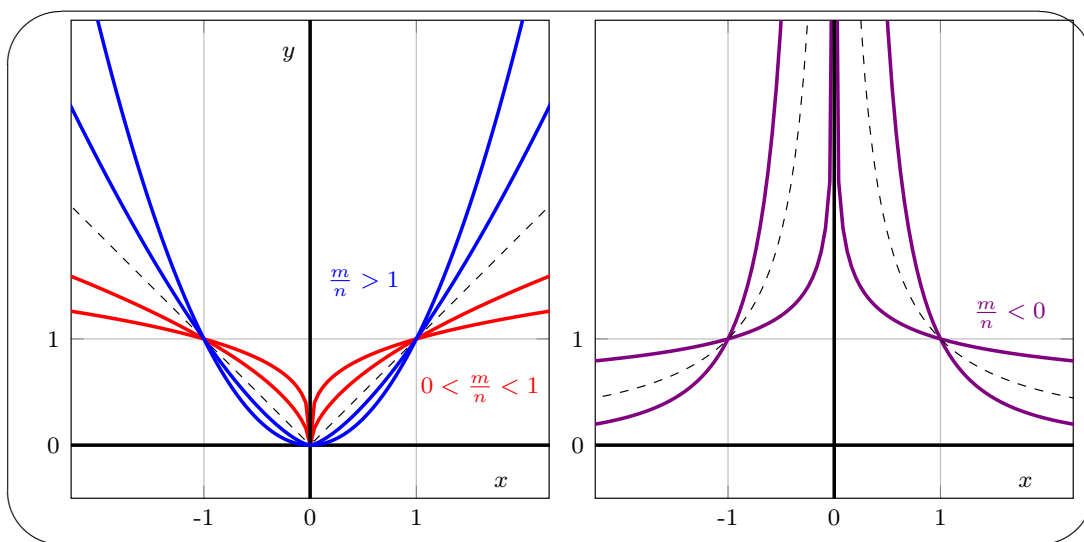
$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Abbiamo i tre seguenti casi in funzione della parità/disparità di m e n .

1. Con n dispari e m pari è una **funzione pari** ovvero $(-x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$. Per la positività e la monotonia abbiamo:

$$x^{\frac{m}{n}} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad x^{\frac{m}{n}} = 0 \iff x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} > 0$$

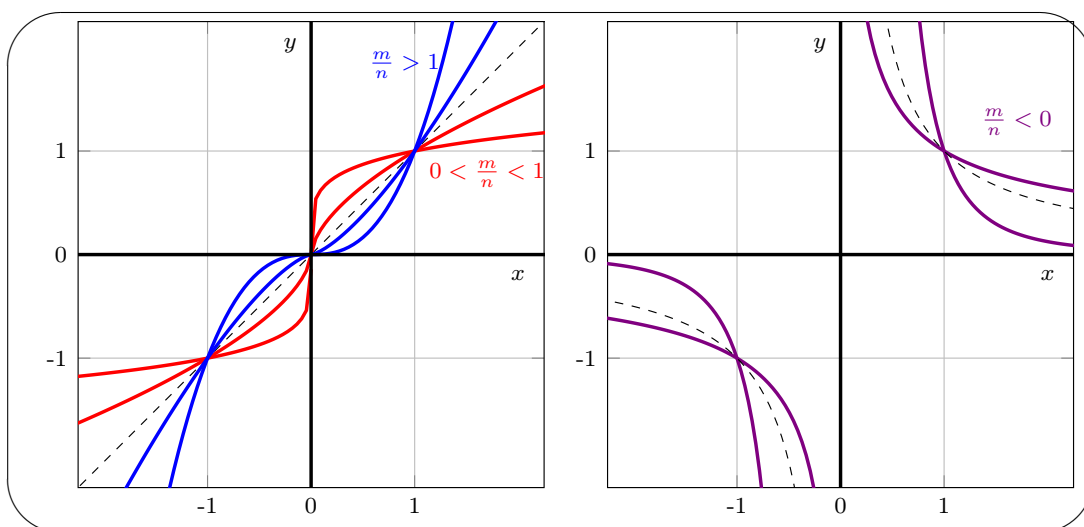
$$\begin{cases} \text{se } \frac{m}{n} > 0 & \text{allora } f \text{ è decrescente in } (-\infty, 0] \text{ e crescente in } [0, +\infty) \\ \text{se } \frac{m}{n} < 0 & \text{allora } f \text{ è crescente in } (-\infty, 0) \text{ e decrescente in } (0, +\infty) \end{cases}$$



2. Con n dispari e m dispari è una **funzione dispari** ovvero $(-x)^{\frac{m}{n}} = -x^{\frac{m}{n}}$. Per la positività e la monotonia abbiamo:

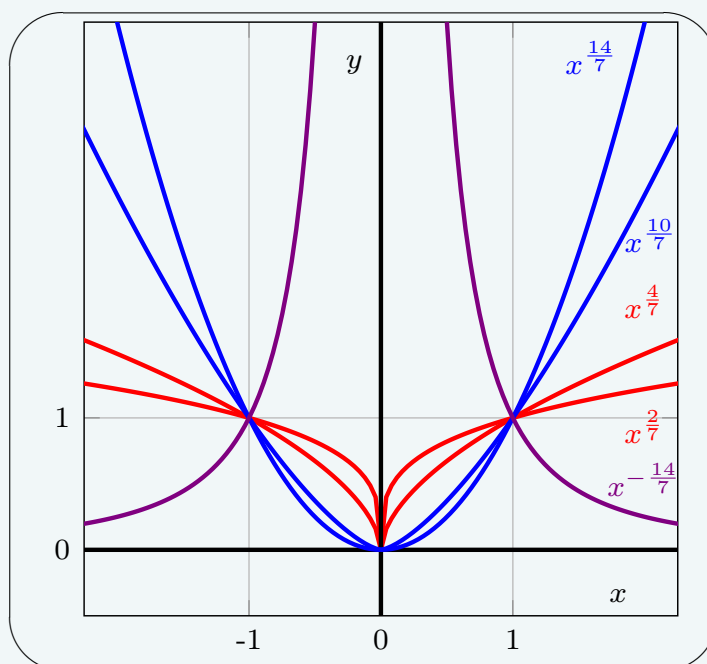
$$x^{\frac{m}{n}} < 0, \quad \forall x < 0, \quad x^{\frac{m}{n}} > 0, \quad \forall x > 0; \quad x^{\frac{m}{n}} = 0 \iff x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} > 0$$

$$\begin{cases} \text{se } \frac{m}{n} > 0 & \text{allora } f \text{ è crescente in } \mathbb{R} \\ \text{se } \frac{m}{n} < 0 & \text{allora } f \text{ è decrescente in } (-\infty, 0) \text{ e in } (0, +\infty) \end{cases}$$

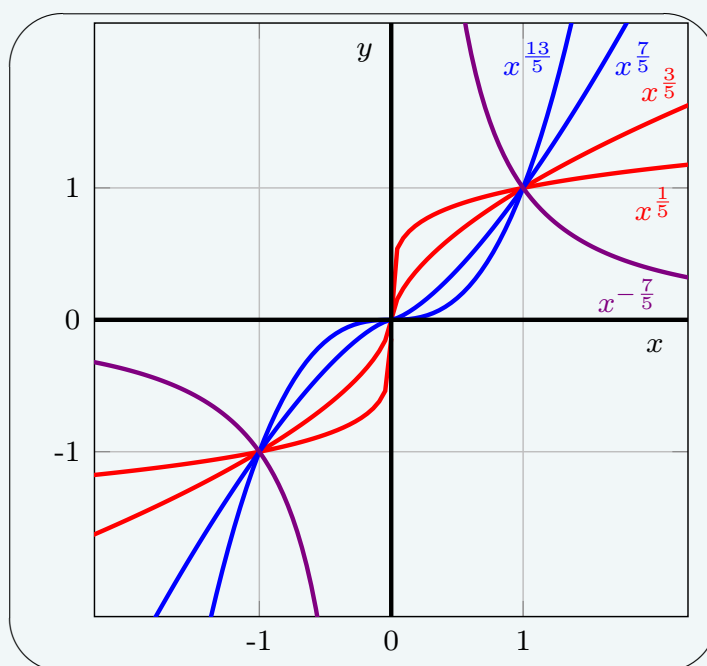


Esempio 4.1: grafici di funzioni potenza con esponente razionale $\frac{m}{n}$ e n dispari

Con m pari:



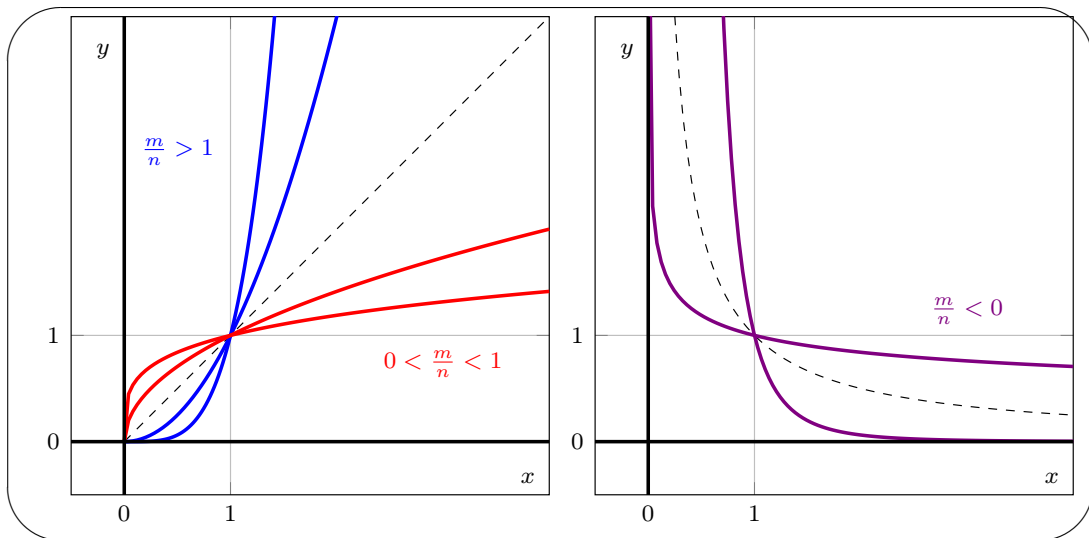
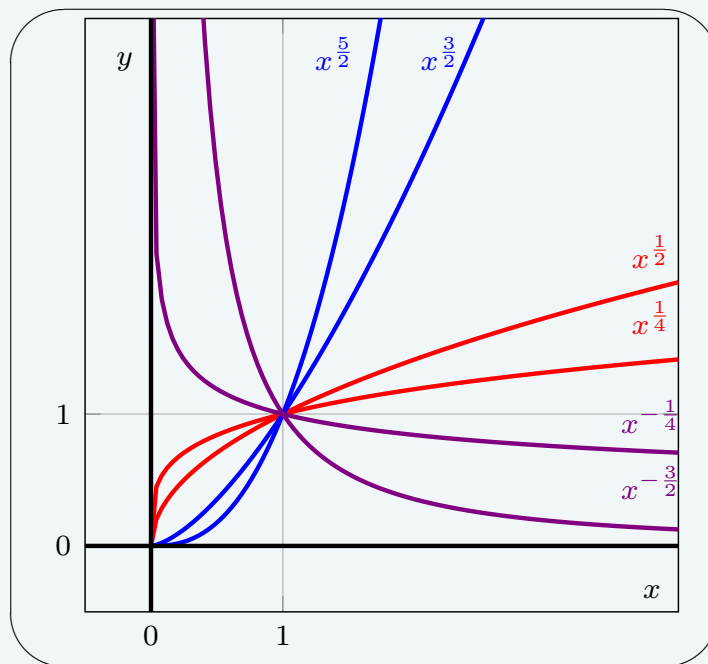
Con m dispari:



3. Con n pari e con m dispari (m non può essere pari dato che sono coprimi), per la positività e la monotonia abbiamo:

$$x^{\frac{m}{n}} > 0, \quad \forall x > 0; \quad x^{\frac{m}{n}} = 0 \iff x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} > 0$$

$$\begin{cases} \text{se } \frac{m}{n} > 0 & \text{allora } f \text{ è crescente in } [0, +\infty) \\ \text{se } \frac{m}{n} < 0 & \text{allora } f \text{ è decrescente in } (0, +\infty) \end{cases}$$

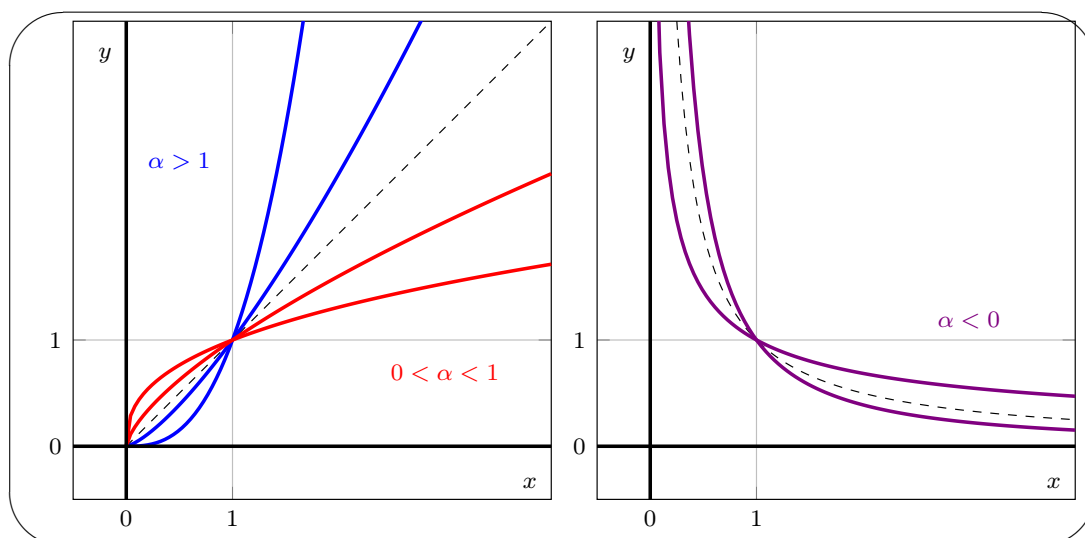

 Esempio 4.2: grafici di funzioni potenza con esponente razionale $\frac{m}{n}$ e n pari


4.1.2 Esponente reale

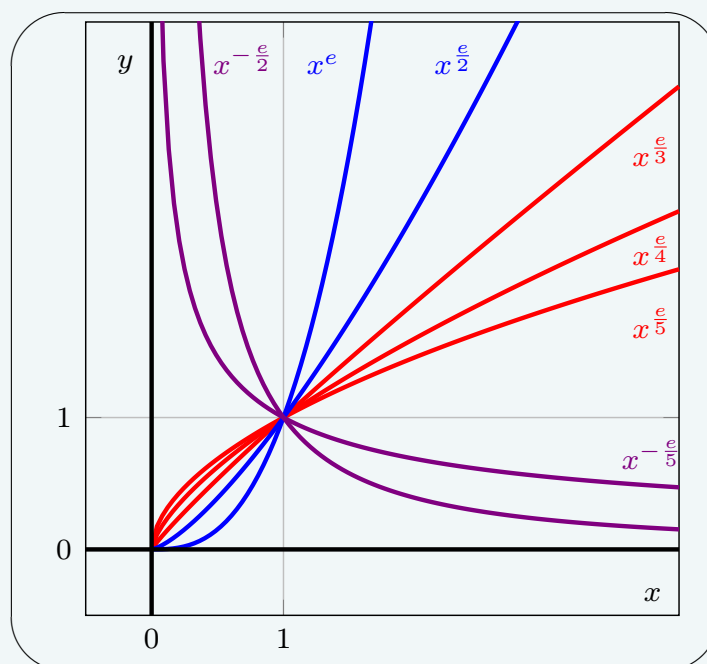
- Con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, per la positività e la monotonia abbiamo:

$$x^\alpha > 0, \quad \forall x > 0; \quad x^\alpha = 0 \iff x = 0 \text{ e } \alpha > 0$$

$$\begin{cases} \text{se } \alpha > 0 & \text{allora } f \text{ è crescente in } [0, +\infty) \\ \text{se } \alpha < 0 & \text{allora } f \text{ è decrescente in } (0, +\infty) \end{cases}$$



Esempio 4.3: grafici di funzioni potenza con esponente reale



4.1.3 Polinomi

Definizione 4.2: polinomio

Dati $n + 1$ valori $a_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $a_n \neq 0$, la funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i x^i}_{=P_n(x)} \quad (4.2)$$

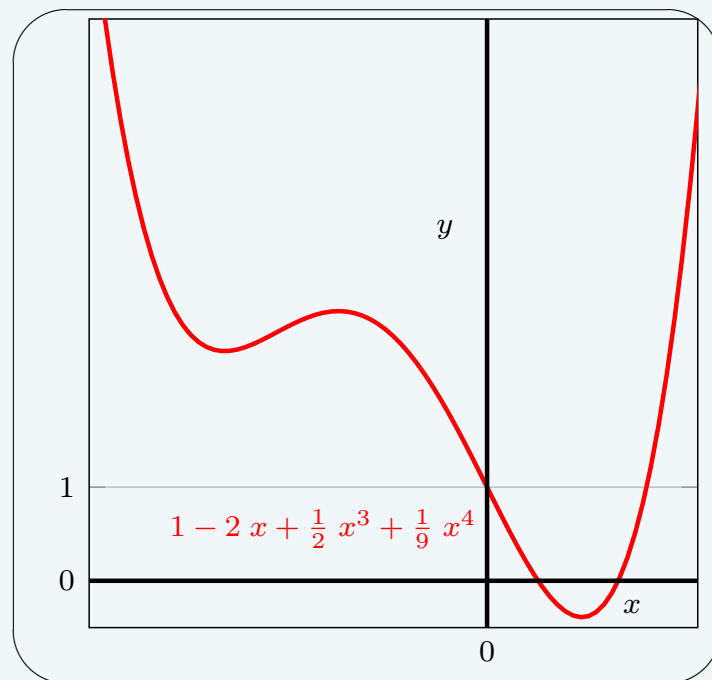
si chiama **polinomio** di grado n .

- Per ogni **monomio** $i \in \{0, 1, \dots, n\}$:
 1. il valore a_i è il **coefficiente del monomio**
 2. la funzione potenza x^i con esponente intero i è la **parte letterale** del monomio
- Il valore a_0 è il **termine noto** del polinomio dato che $x^0 = 1$.

Esempio 4.4: polinomio

Ad esempio con $n = 4$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2}$ e $a_4 = \frac{1}{9}$ abbiamo il seguente polinomio di grado quattro:

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{9}x^4$$

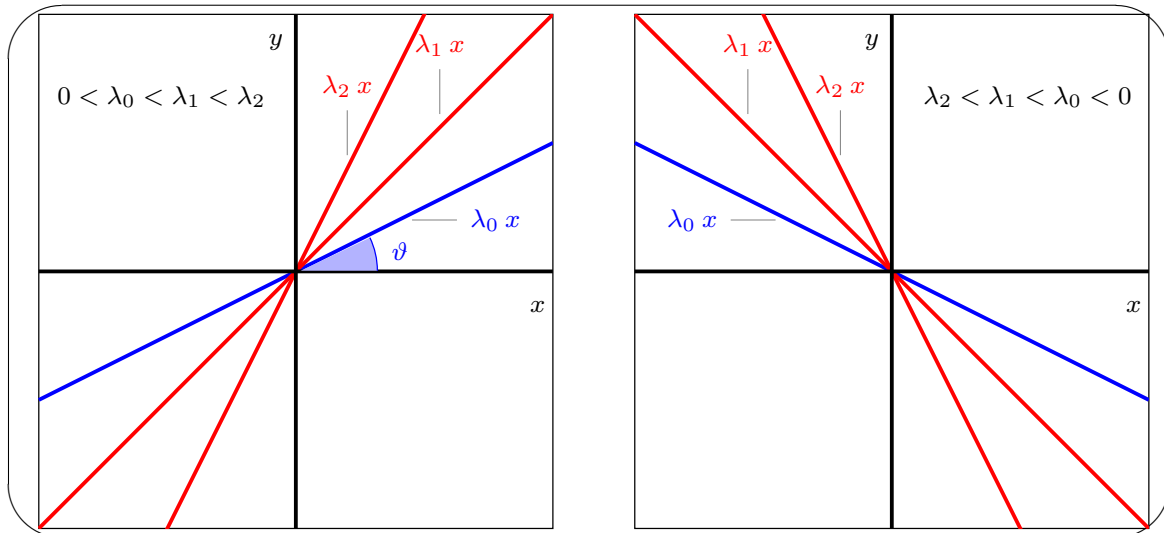


4.2 Funzioni di proporzionalità diretta e inversa

Con $\alpha = 1$ e dato $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo la famiglia di **funzioni di proporzionalità diretta o lineari**:

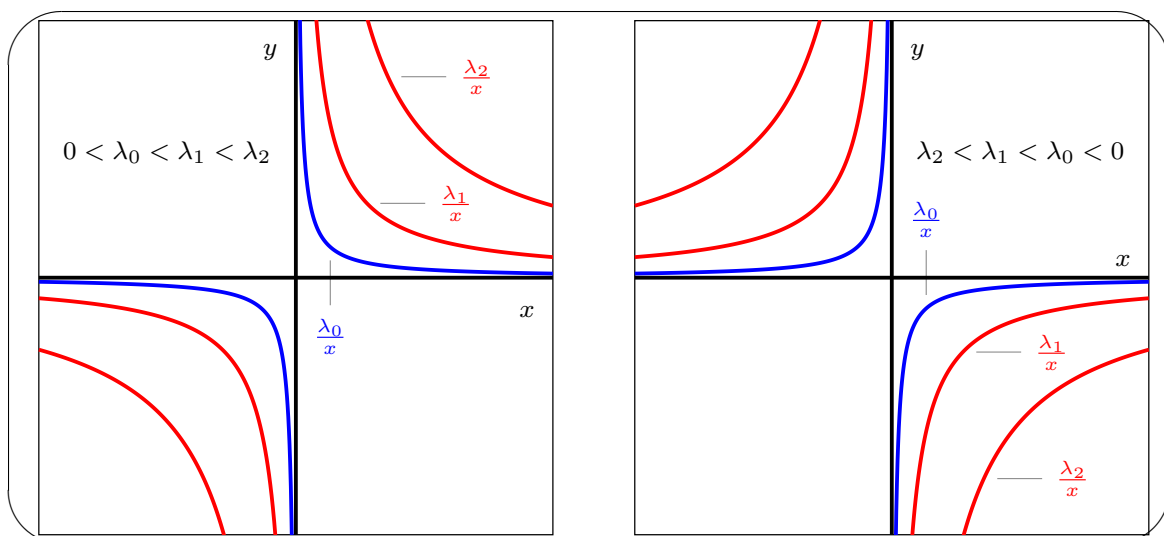
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: x \mapsto \lambda x \quad \text{dove } \lambda \text{ è la costante di proporzionalità diretta}$$

Inoltre $\lambda = \tan \vartheta$ e ϑ è l'angolo della retta $y = \lambda x$ con l'asse delle x .



Con $\alpha = -1$ e dato $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo la famiglia di **funzioni di proporzionalità inversa o iperboli equilateri**:

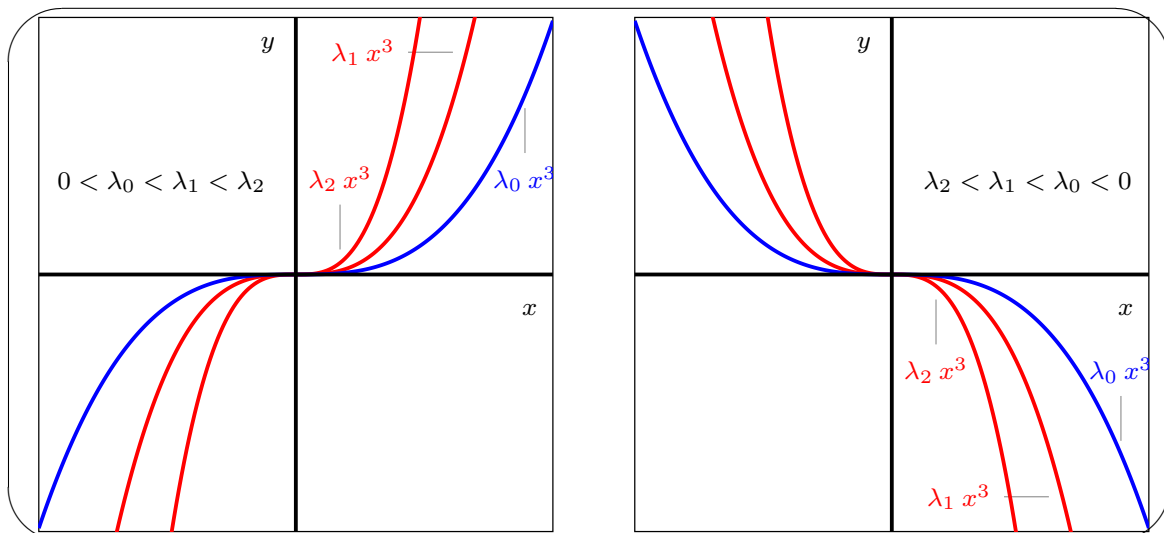
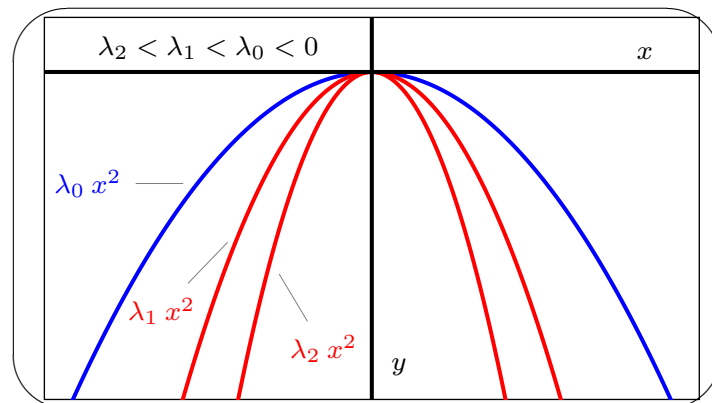
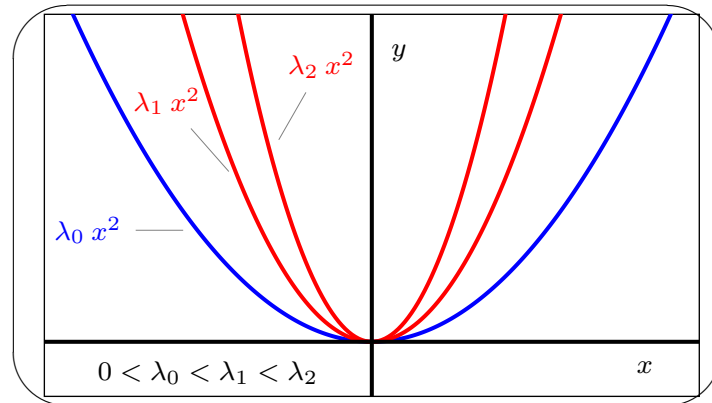
$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: x \mapsto \frac{\lambda}{x} \quad \text{dove } \lambda \text{ è la costante di proporzionalità indiretta}$$



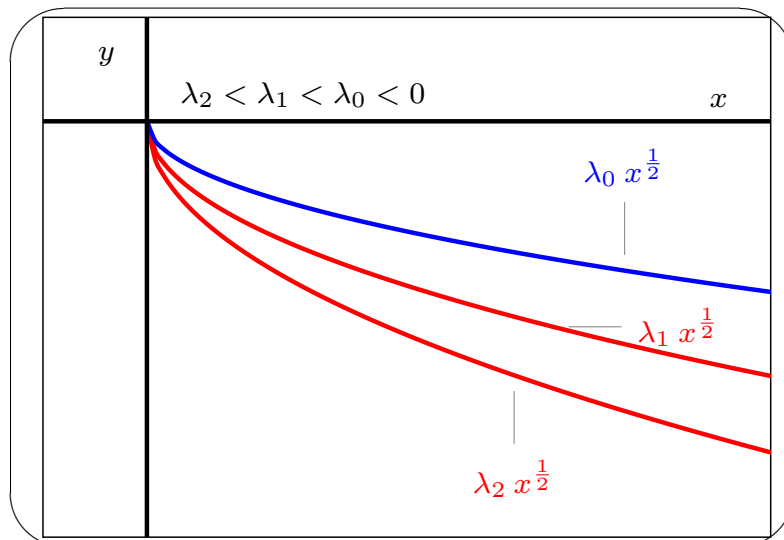
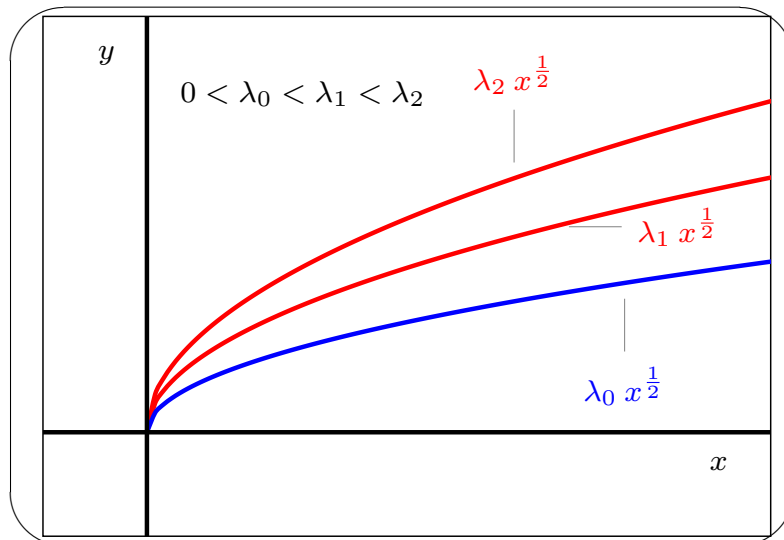
Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo la famiglia di **funzioni di potenza moltiplicate per una costante**:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \lambda x^\alpha \quad \text{dove } \lambda \text{ è la costante moltiplicativa}$$

- Ad esempio con α uguale a 2 o uguale a 3 e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo:



- Ad esempio con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo:



Funzioni esponenziali e logaritmiche

5.1 Funzioni esponenziali

Definizione 5.1: funzioni esponenziali

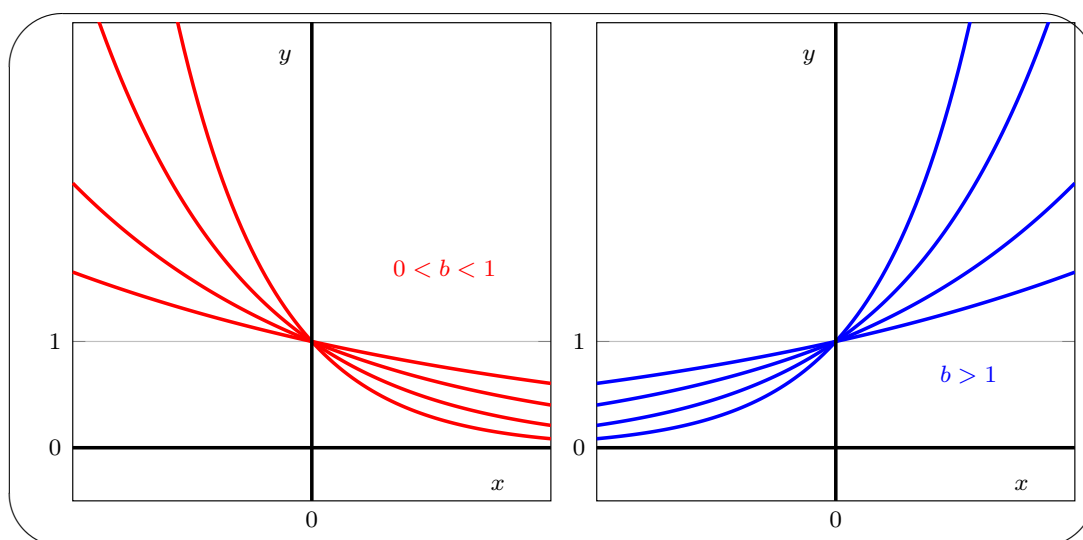
Dato $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, la funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto b^x \quad (5.1)$$

si chiama **funzione esponenziale** in base b .

- Per la positività e la monotonia abbiamo:

$$b^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \text{se } 0 < b < 1 & \text{allora } f \text{ è decrescente in } \mathbb{R} \\ \text{se } b > 1 & \text{allora } f \text{ è crescente in } \mathbb{R} \end{cases}$$



5.2 Funzioni logaritmiche

Definizione 5.2: funzioni logaritmiche

Dato $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, la funzione:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \log_a x \quad (5.2)$$

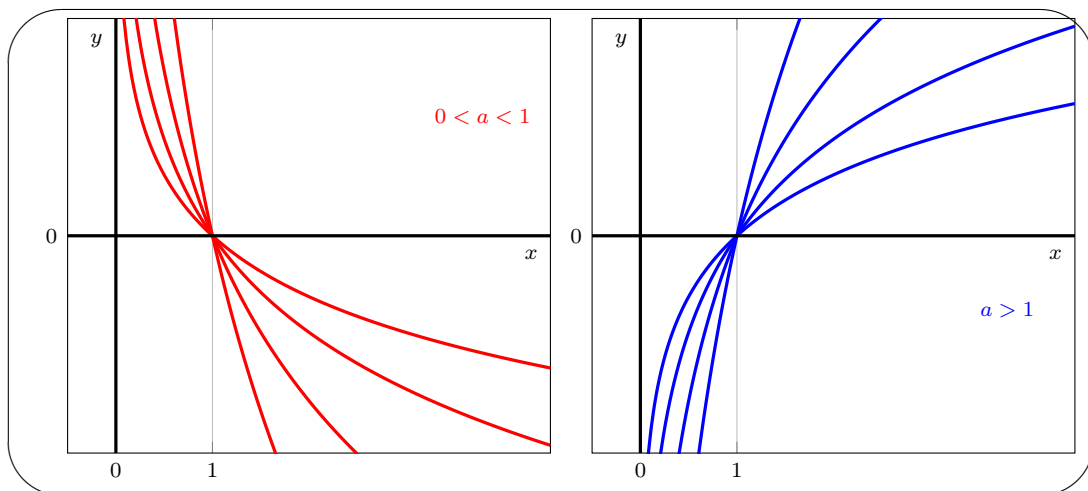
si chiama **funzione logaritmica** in base a .

- Per la positività e la monotonia abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } 0 < a < 1 \quad \log_a x > 0, \quad \forall x \in (0, 1), \quad \log_a x < 0, \quad \forall x \in (1, +\infty) \\ \quad \text{e } f \text{ è decrescente in } \mathbb{R}_{>0} \\ \\ \text{se } a > 1 \quad \log_a x < 0, \quad \forall x \in (0, 1), \quad \log_a x > 0, \quad \forall x \in (1, +\infty) \\ \quad \text{e } f \text{ è crescente in } \mathbb{R}_{>0} \end{array} \right.$$

Inoltre abbiamo:

$$\log_a x = 0 \iff x = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$$



5.3 Cambiamento di base

Data una qualsiasi base $c \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, tutte le funzioni esponenziali e logaritmiche si possono ricondurre ad un'altra base $d \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ come segue:

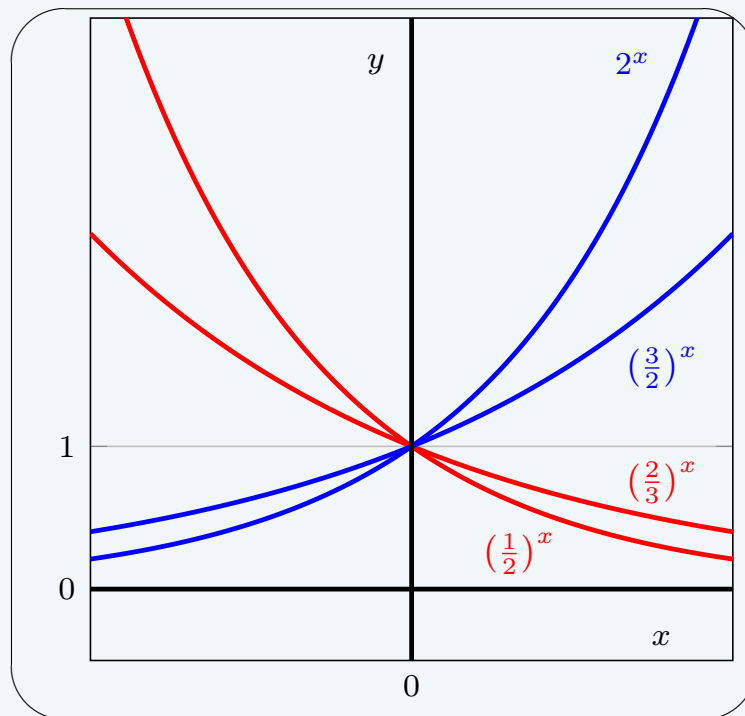
$$c^x = d^{\log_d c^x} = d^{x \log_d c} \quad \text{quindi con } \lambda = \log_d c \quad \text{risulta} \quad c^x = d^{\lambda x}$$

$$\log_c x = \frac{\log_d x}{\log_d c} \quad \text{quindi con } \lambda = \frac{1}{\log_d c} \quad \text{risulta} \quad \log_c x = \lambda \log_d x$$

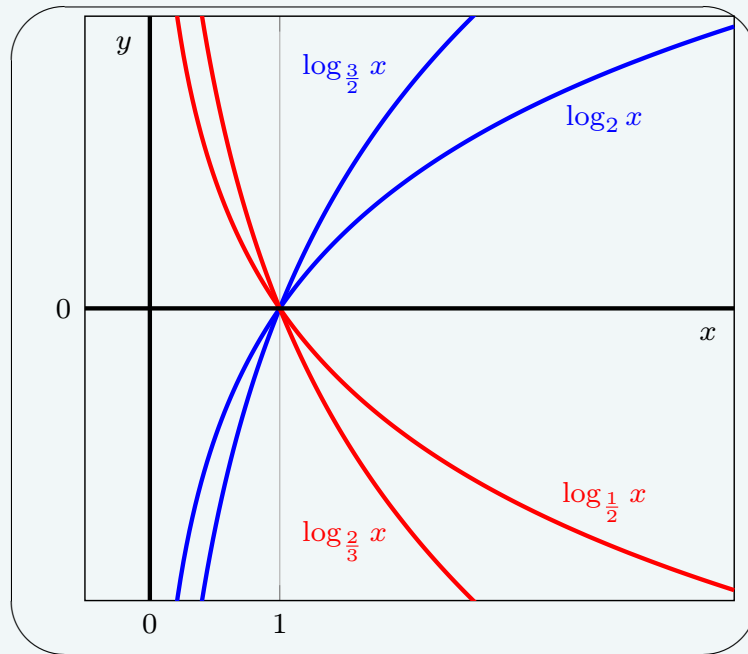
La funzione logaritmica in base e si scrive anche $\log x$ o $\ln x$ mentre quella in base 2 si scrive anche $\lg x$.

Esempio 5.1: grafici di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni esponenziali:



Funzioni logaritmiche:



Funzioni trigonometriche

6.1 Funzioni trigonometriche

Definizione 6.1: funzione seno e funzione coseno

Le funzioni trigonometriche:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \sin x \quad (6.1)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \cos x \quad (6.2)$$

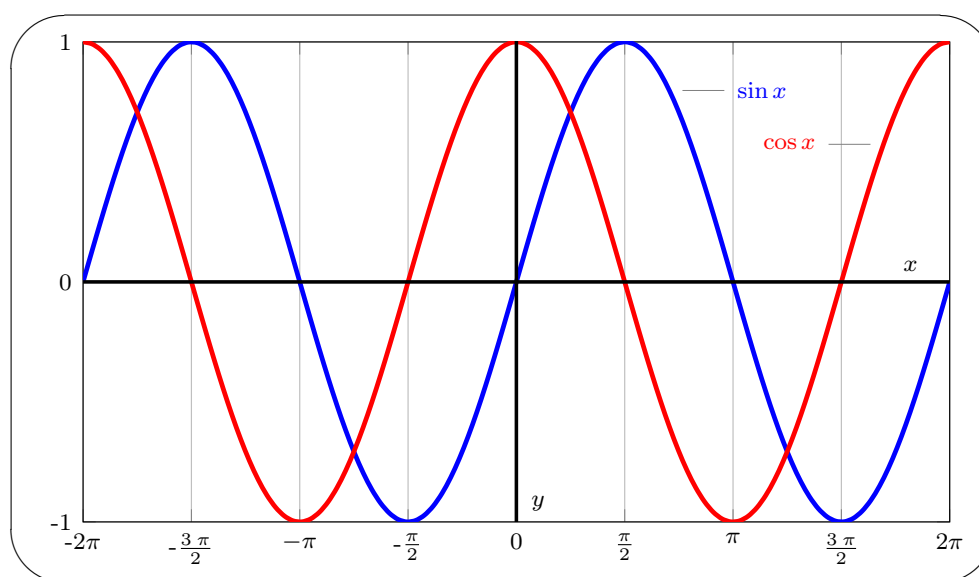
si chiamano **seno** e **coseno**.

- Il seno è una funzione **dispari** mentre il coseno è una funzione **pari**. Abbiamo quindi:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Il seno e il coseno sono funzioni periodiche di periodo:

$$T = 2\pi \quad \text{e abbiamo la relazione fondamentale} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Abbiamo

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Per la positività e monotonicità della funzione seno abbiamo:

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} \sin x > 0 & \text{se } x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 & \text{se } x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{se } x \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è crescente} \\ \text{se } x \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

- Per la positività e monotonicità della funzione coseno abbiamo:

$$\cos x = 0 \iff x = k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0 & \text{se } x \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cos x < 0 & \text{se } x \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

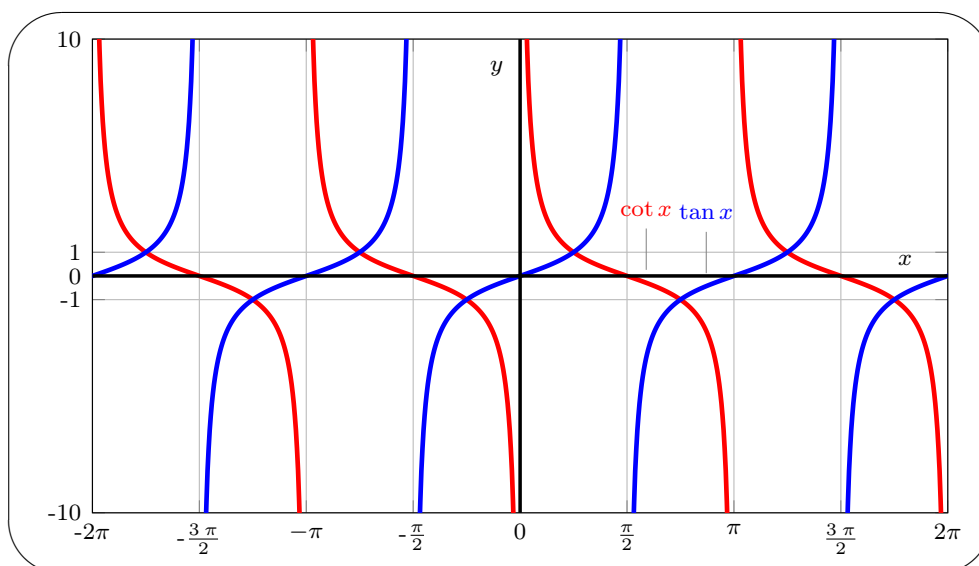
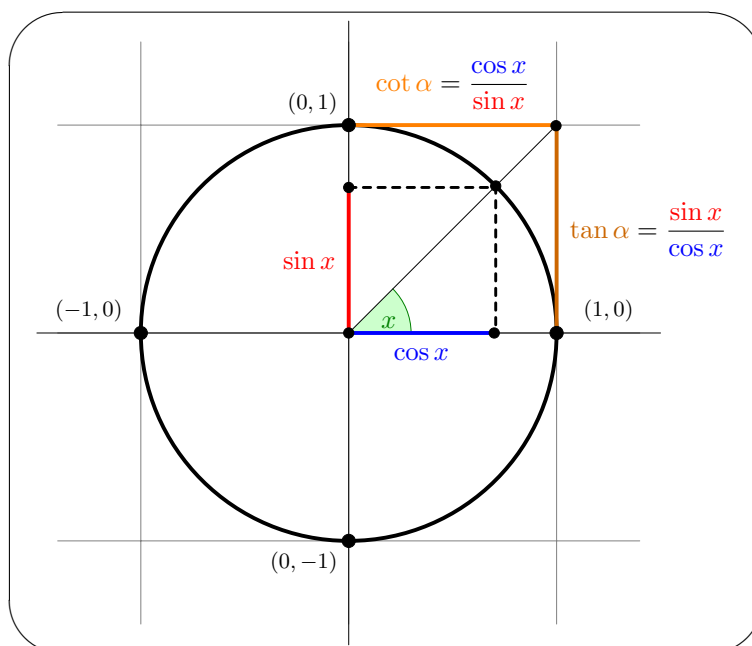
$$\begin{cases} \text{se } x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è crescente} \\ \text{se } x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z} & f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

Le funzioni trigonometriche:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (6.3)$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (6.4)$$

si chiamano **tangente** e **cotangente** e sono entrambe dispari e periodiche di periodo $T = \pi$.

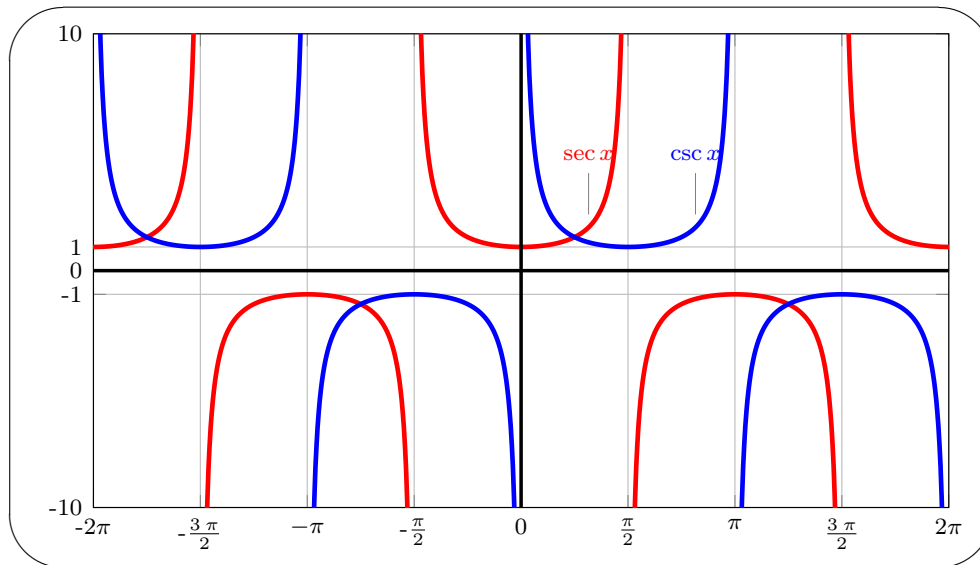


Le funzioni trigonometriche:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi - \frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (6.5)$$

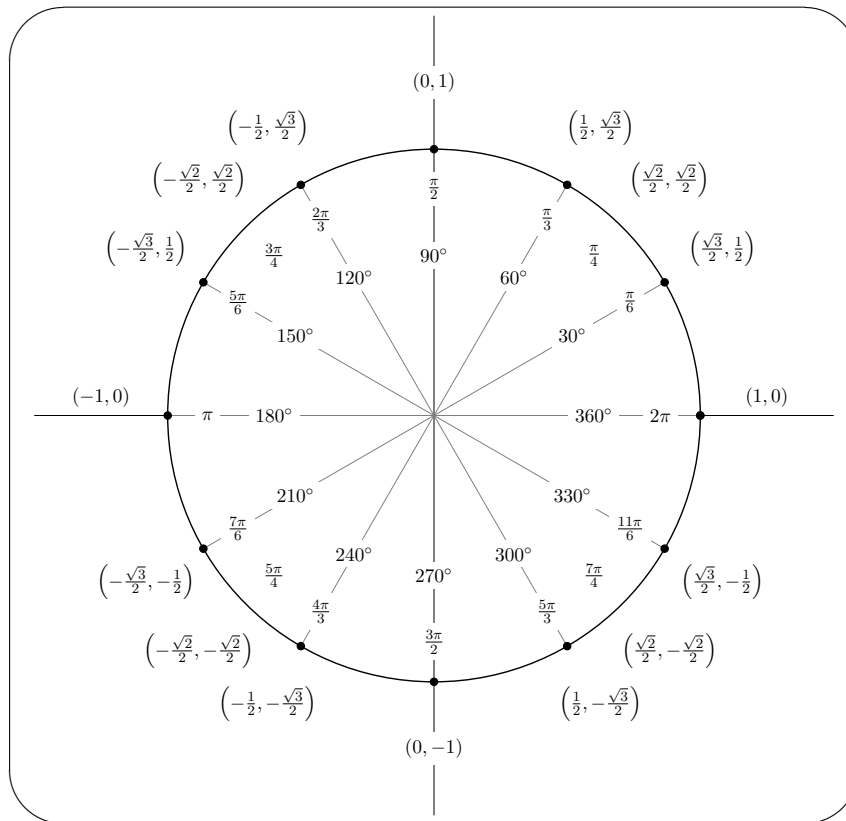
$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (6.6)$$

si chiamano **secante** e **cosecante** e sono periodiche di periodo $T = 2\pi$. La funzione secante è pari mentre la funzione cosecante è dispari.



6.2 Valori delle funzioni trigonometriche

	cos	sin	tan	cot	sec	csc
0	1	0	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$x = \frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$x = \frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$x = \frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$x = \frac{\pi}{2}$ (90°)	0	1	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
$x = \pi$ (180°)	-1	0	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$



	cos	sin	tan	cot
x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$\cot x$
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cot x$	$\tan x$
$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\cot x$
$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\tan x$	$-\cot x$

6.3 Principali formule trigonometriche

Interdipendenze fra le funzioni trigonometriche

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	-	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm\sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$	-	$\pm\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}}$	$\pm\sqrt{\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}}$	$\pm\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}$	-	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\sqrt{\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}}$	$\pm\sqrt{\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	-

Dove il simbolo $\pm$ significa che il segno dipende dal quadrante in cui si trova x

Addizione e sottrazione

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1 \quad (6.7a)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2 \quad (6.7b)$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2} \quad (6.8a)$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \quad (6.8b)$$

Duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (6.9a)$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned} \quad (6.9b)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (6.10a)$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} \quad (6.10b)$$

Triplikazione

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (6.11a)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad (6.11b)$$

Bisezione

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad (6.12a)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (6.12b)$$

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \\
 &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\
 &= \frac{1 - \cos x}{\sin x}
 \end{aligned} \tag{6.13a}$$

$$\begin{aligned}
 \cot \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \\
 &= \frac{\sin x}{1 - \cos x} \\
 &= \frac{1 + \cos x}{\sin x}
 \end{aligned} \tag{6.14a}$$

Formule parametriche

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \tag{6.15a}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \tag{6.15b}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} \tag{6.16a}$$

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{6.16b}$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} \tag{6.16c}$$

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \tag{6.16d}$$

Formule di Werner

$$\sin x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2} \left(\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2) \right) \tag{6.17a}$$

$$\sin x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2} \left(\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2) \right) \tag{6.17b}$$

$$\cos x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2} \left(\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2) \right) \tag{6.17c}$$

Formule aggiuntive

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (6.18a)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (6.18b)$$

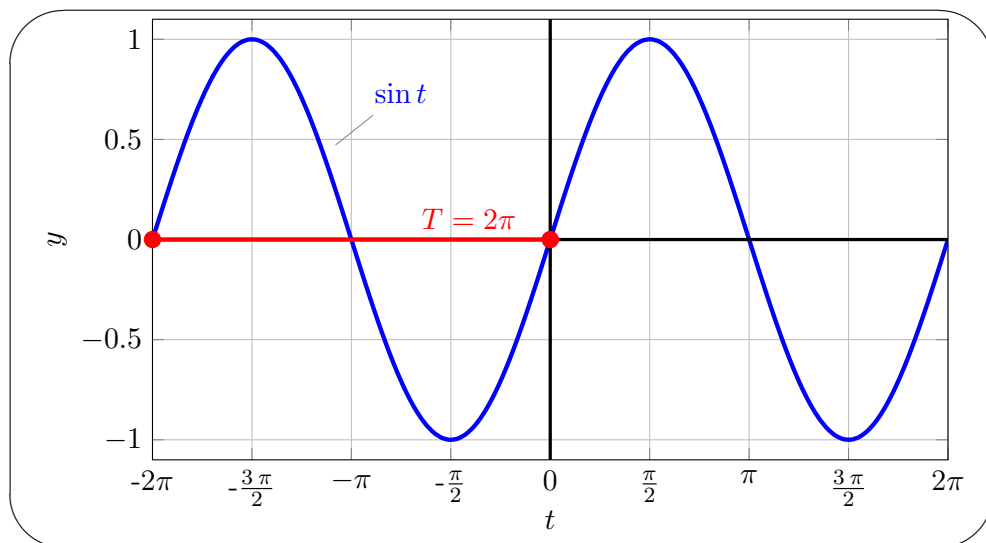
$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} \quad (6.18c)$$

6.4 Un'applicazione: i fenomeni vibratori

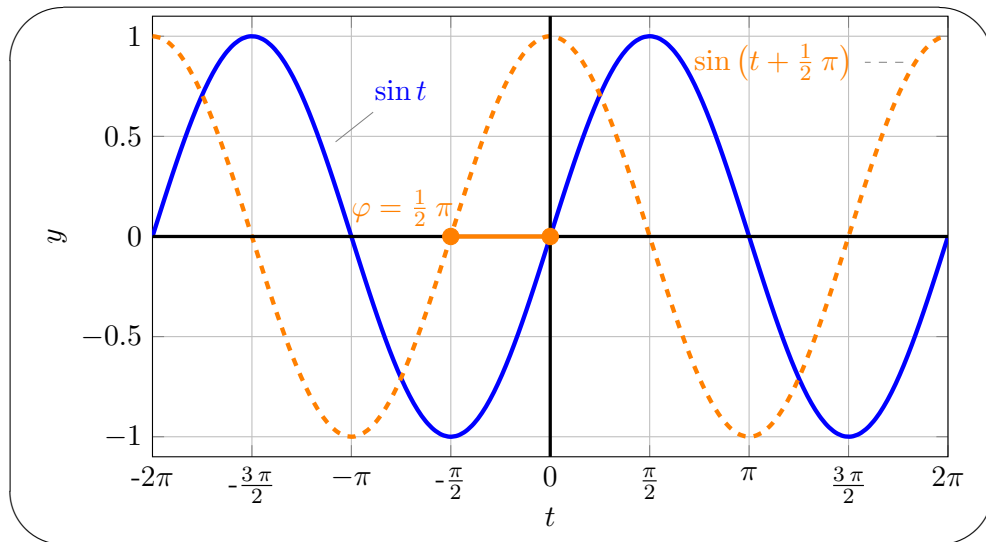
Le funzioni seno e coseno sono periodiche: per questo sono lo strumento naturale per descrivere i fenomeni che si ripetono nel tempo. In questa sezione le applichiamo ai **fenomeni vibratori**.

6.4.1 Fenomeni vibratori

- Abbiamo visto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di **periodo** 2π . Useremo la variabile t per indicare il tempo.



- Ricordiamo che $\sin(t + \varphi)$ corrisponde a una **transizione di fase** φ (traslazione orizzontale).



Le funzioni:

$$t \mapsto a \sin(\omega t), \quad t \mapsto b \cos(\omega t) \quad (6.19)$$

dove a , b e ω sono numeri reali positivi, sono chiamate **vibrazioni elementari**. Sono funzioni periodiche di

$$\text{periodo } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Esempio 6.1: periodo

Per esempio considerando $t' = t + \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\sin \left[\omega \underbrace{\left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right)}_{t'} \right] = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin(\omega t)$$

- Chiaramente abbiamo:

$$|a \sin(\omega t)| \leq a \quad \text{e} \quad |b \cos(\omega t)| \leq b$$

Le funzioni (6.19) descrivono vibrazioni elementari caratterizzate da

ampiezza a e b (rispettivamente)

$$\text{pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

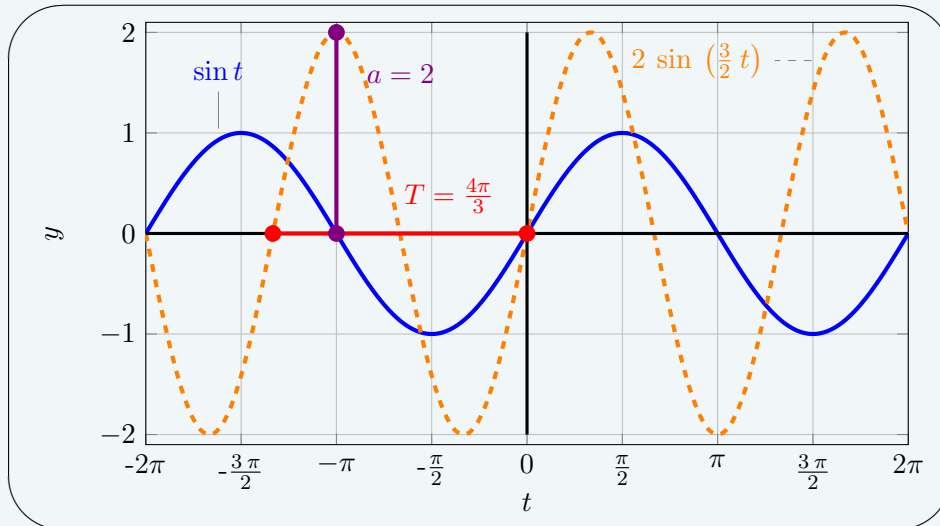
detta anche *velocità angolare*, che indica quanti periodi ci sono in un intervallo di 2π . Inoltre sono caratterizzate dalla

$$\text{frequenza } \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

che indica quante volte la funzione si ripete in un intervallo di lunghezza 1

Esempio 6.2: di ampiezza, pulsazione e frequenza

$$t \mapsto 2 \sin \left(\frac{3}{2} t \right) \quad a = 2, \quad \omega = \frac{3}{2}, \quad T = \frac{4\pi}{3}$$



La pulsazione $\omega = \frac{3}{2}$ significa che ci sono 1.5 periodi nell'intervallo 2π . La frequenza ν è $\frac{3}{4\pi}$.

- La funzione

$$h(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad (6.20)$$

descrive la **sovrapposizione** delle due vibrazioni elementari di **uguale pulsazione** ω . Quest'ultima è ancora una vibrazione elementare **sfasata** rispetto alle precedenti.

- Infatti, posto

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si può scrivere

$$h(t) = A \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\alpha} \sin(\omega t) + A \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\beta} \cos(\omega t) \quad (6.21)$$

- Osserviamo ora che i numeri

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

soddisfano le condizioni

$$-1 \leq \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \beta \leq 1 \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

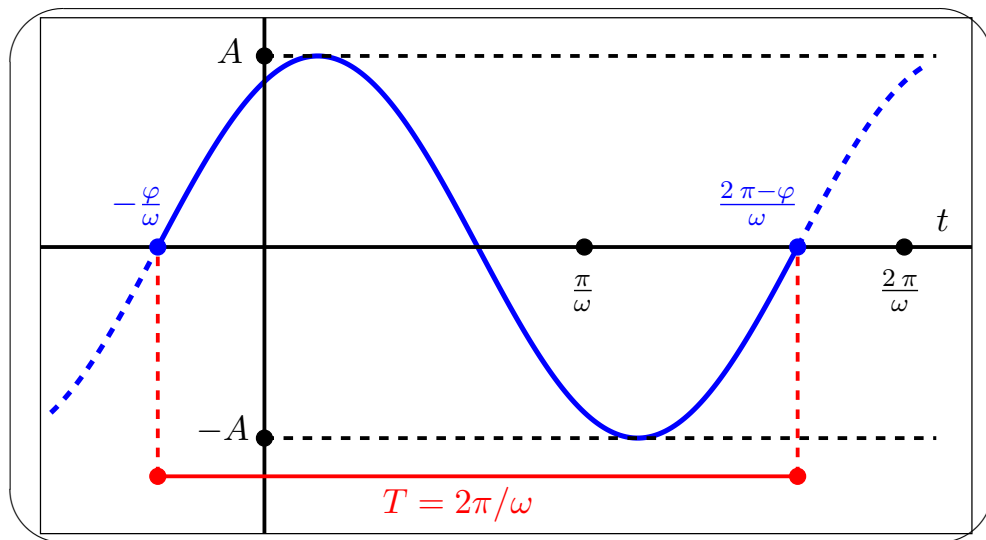
Esiste quindi un **unico angolo** φ tale che

$$\cos \varphi = \alpha \quad \sin \varphi = \beta$$

cosicché la (6.21) si può riscrivere nella forma seguente

$$\begin{aligned} h(t) &= A \cos \varphi \sin(\omega t) + A \sin \varphi \cos(\omega t) \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Dunque $h(t)$ rappresenta una vibrazione elementare di ampiezza A , pulsazione ω , sfasata di un angolo φ .



In sintesi:

$$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases}$$

- Sotto condizioni abbastanza generali; un fenomeno naturale periodico si potrà scrivere come sovrapposizione di un numero finito o infinito di vibrazioni elementari di frequenza diversa (**serie di Fourier**).

6.4.2 Effetti di smorzamento o di amplificazione

- Moltiplicando una vibrazione elementare per **potenze** o **esponenziali** si possono modellizzare effetti di **smorzamento** o di **amplificazione**.

Primo esempio

- Per esempio, consideriamo la funzione

$$h(t) = t \sin(\omega t)$$

modellizza una **vibrazione amplificata**.

- Essendo $-1 \leq \sin(\omega t) \leq 1$ si ha

$$-t \leq t \sin(\omega t) \leq t$$

e quindi il grafico di $h(t)$ si trova tra i grafici delle rette di equazione $y = -t$, $y = t$.

- Nei punti in cui

$$\sin(\omega t) = 1$$

cioè

$$t = \frac{\pi}{2\omega} + k \frac{2\pi}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

il grafico di $h(t)$ tocca quello di $y = t$.

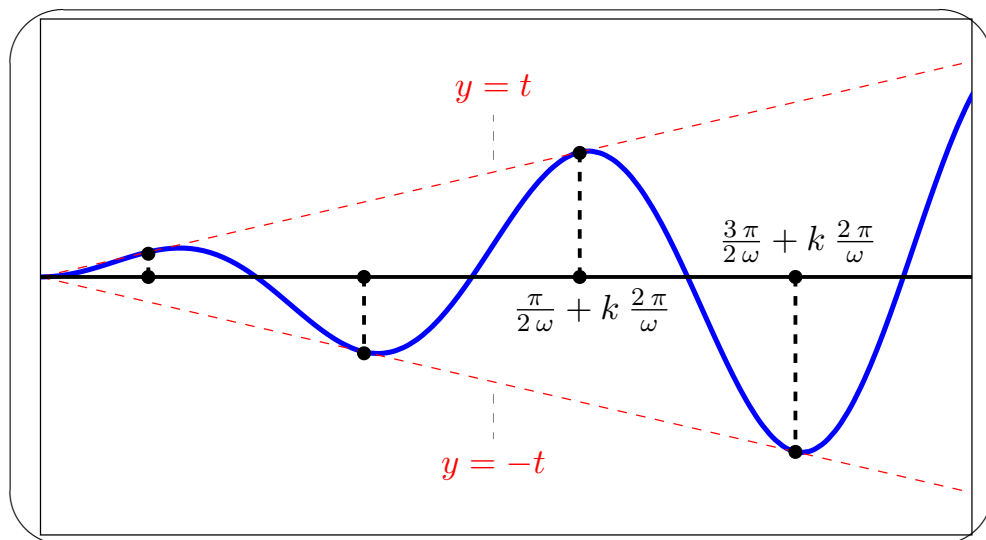
- Nei punti in cui

$$\sin(\omega t) = -1$$

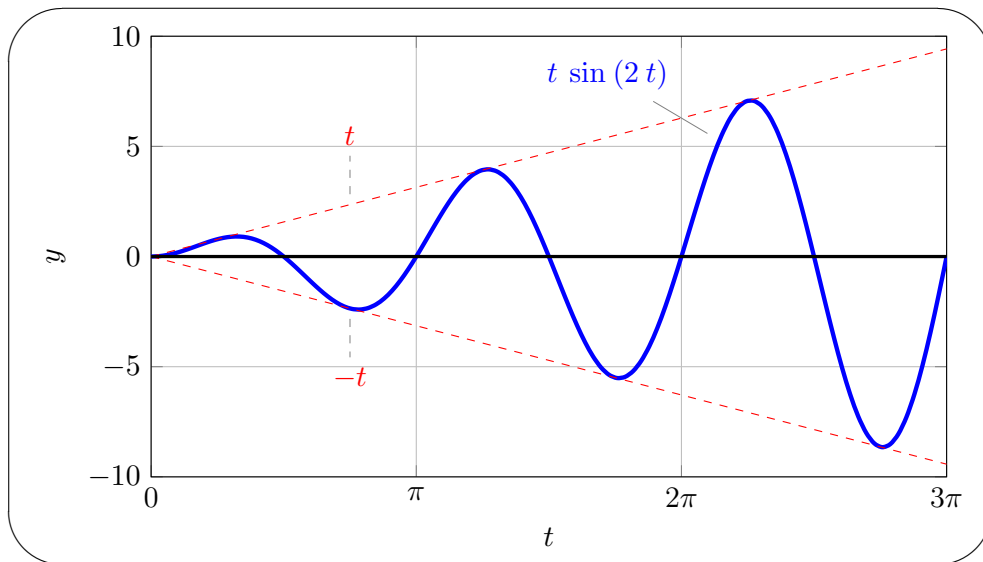
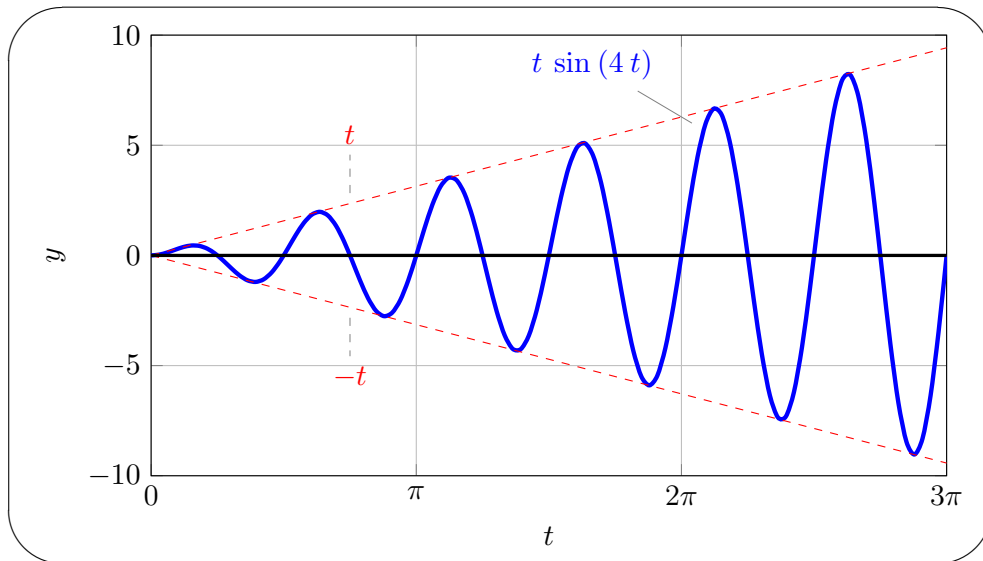
cioè

$$t = \frac{3\pi}{2\omega} + k \frac{2\pi}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

il grafico di $h(t)$ tocca quello di $y = -t$.



- Dal grafico si vede come la moltiplicazione per t abbia l'effetto di una moltiplicazione della vibrazione, all'aumentare di t .



Secondo esempio

- Per esempio, consideriamo la funzione

$$k(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \quad (\alpha > 0)$$

modellizza una **vibrazione smorzata**.

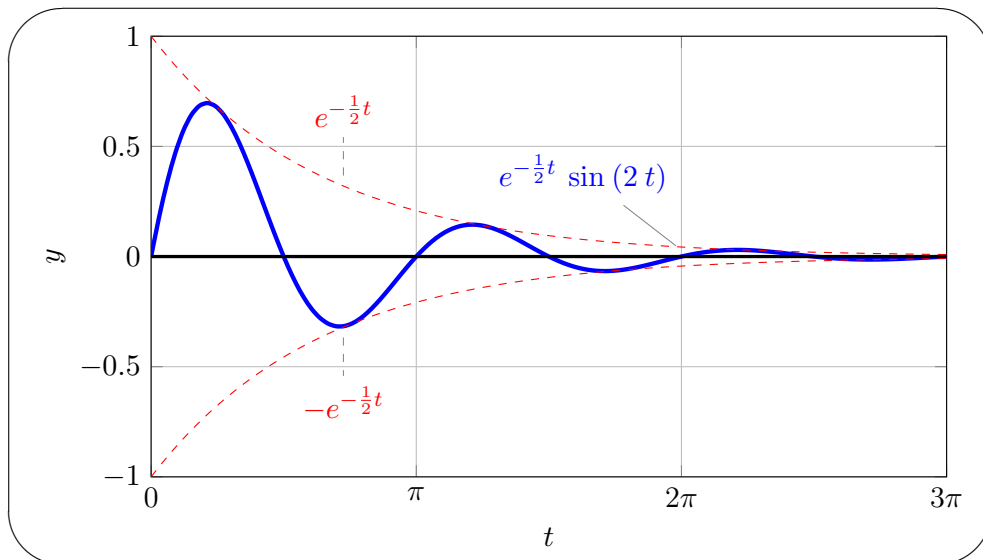
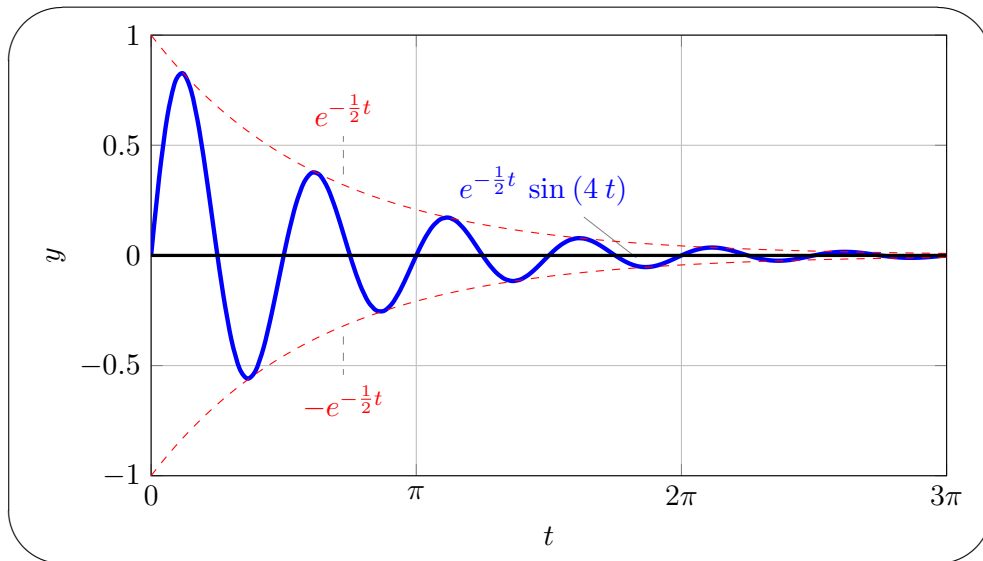
- Ricordando che

$$e^{-\alpha t} = \left(\frac{1}{e^\alpha}\right)^t$$

è un'esponenziale con base minore di 1, considerazioni analoghe a quelle svolte per la funzione $h(t)$, indicano che il grafico di k è compreso tra i grafici delle funzioni

$$y_1 = e^{-\alpha t} \quad \text{e} \quad y_2 = -e^{-\alpha t}$$

come in figura:



Funzioni parte intera e mantissa

7.1 Funzioni parte intera e mantissa

- Due funzioni che tipicamente si incontrano nella scrittura di *algoritmi* sono la funzione parte intera e la funzione mantissa (o parte decimale).

Definizione 7.1: di funzione parte intera

La *funzione parte intera* è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto [x] \quad (\text{oppure } x \mapsto \lfloor x \rfloor) \quad (7.1)$$

Definizione 7.2: di funzione parte intera superiore

La *funzione parte intera superiore* è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil \quad (7.2)$$

Definizione 7.3: di funzione mantissa

La *funzione mantissa* è:

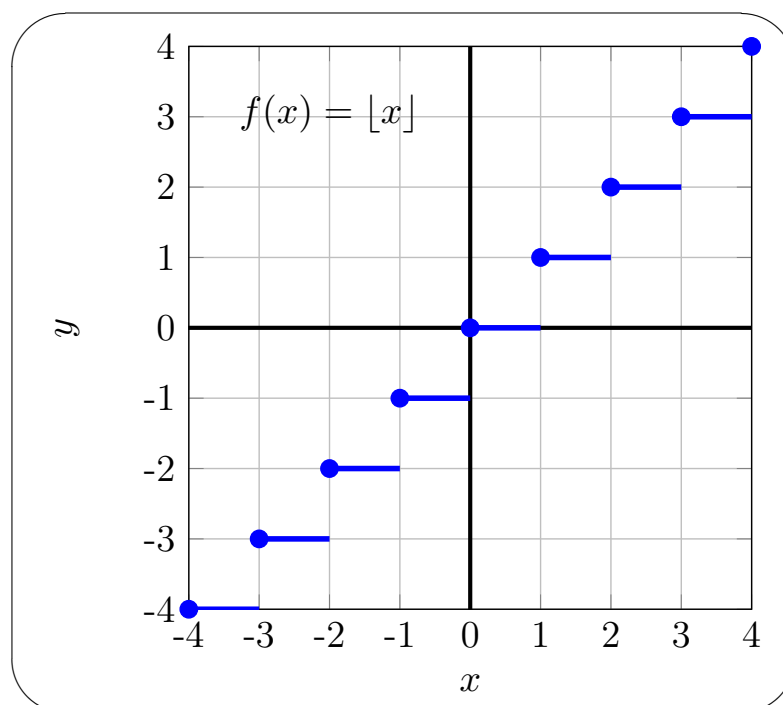
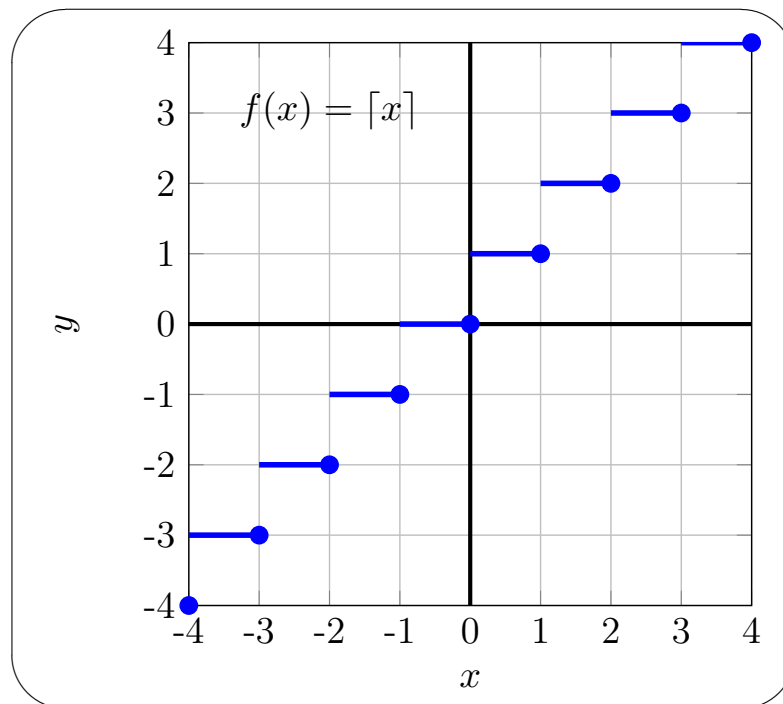
$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1), x \mapsto (x) \quad (7.3)$$

- La funzione parte intera $f(x) = [x]$ e la funzione parte intera superiore $f(x) = \lceil x \rceil$ sono **non decrescenti** in $\mathbb{R}$, ma **non** sono crescenti.
 - Sono non decrescenti: siano $x_1 < x_2$. Allora $[x_1] \leq x_1 < x_2$ e, poiché $[x_1]$ è un intero minore o uguale a x_2 , mentre $[x_2]$ è il *più grande* intero minore o uguale a x_2 (si veda il capitolo “[Radicali, potenze, logaritmi e aritmetica modulare](#)” della Parte 2), si ha $[x_1] \leq [x_2]$. Analogamente $\lceil x_2 \rceil \geq x_2 > x_1$ e, poiché $\lceil x_1 \rceil$ è il *più piccolo* intero maggiore o uguale a x_1 , si ha $\lceil x_1 \rceil \leq \lceil x_2 \rceil$.
 - Non sono crescenti: entrambe sono *costanti* su ogni intervallo compreso fra due interi consecutivi, per esempio

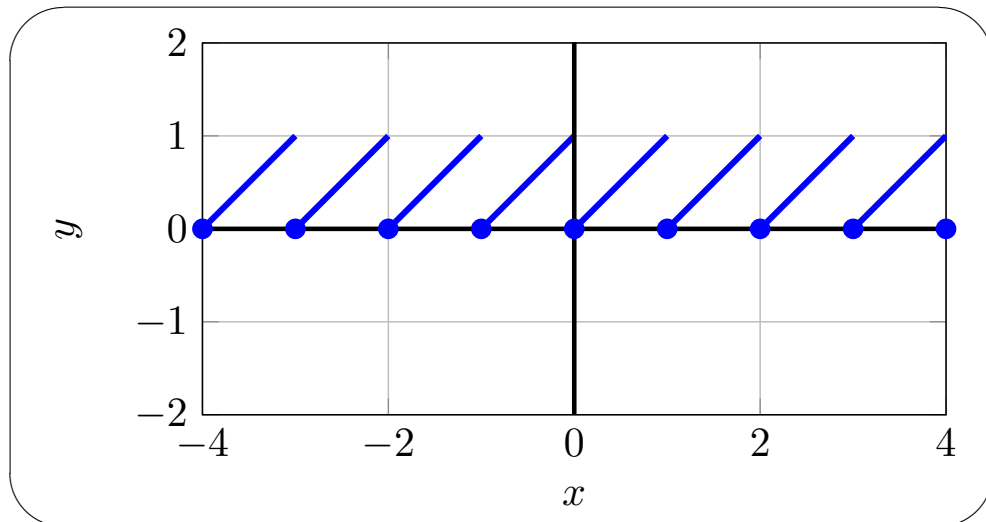
$$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0 \quad \text{e} \quad \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1,$$

quindi esistono $x_1 < x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$.

- Grafici delle funzioni $f(x) = \lceil x \rceil$ e $f(x) = \lfloor x \rfloor$ nell'intervallo $[-4, 4]$.



- Si noti che la mantissa è una funzione periodica di periodo 1:



7.2 Funzioni definite a tratti

- A partire dalle funzioni elementari se ne possono costruire di nuove usando **definizioni analitiche diverse su intervalli diversi**.

Definizione 7.4: di funzione definita a tratti

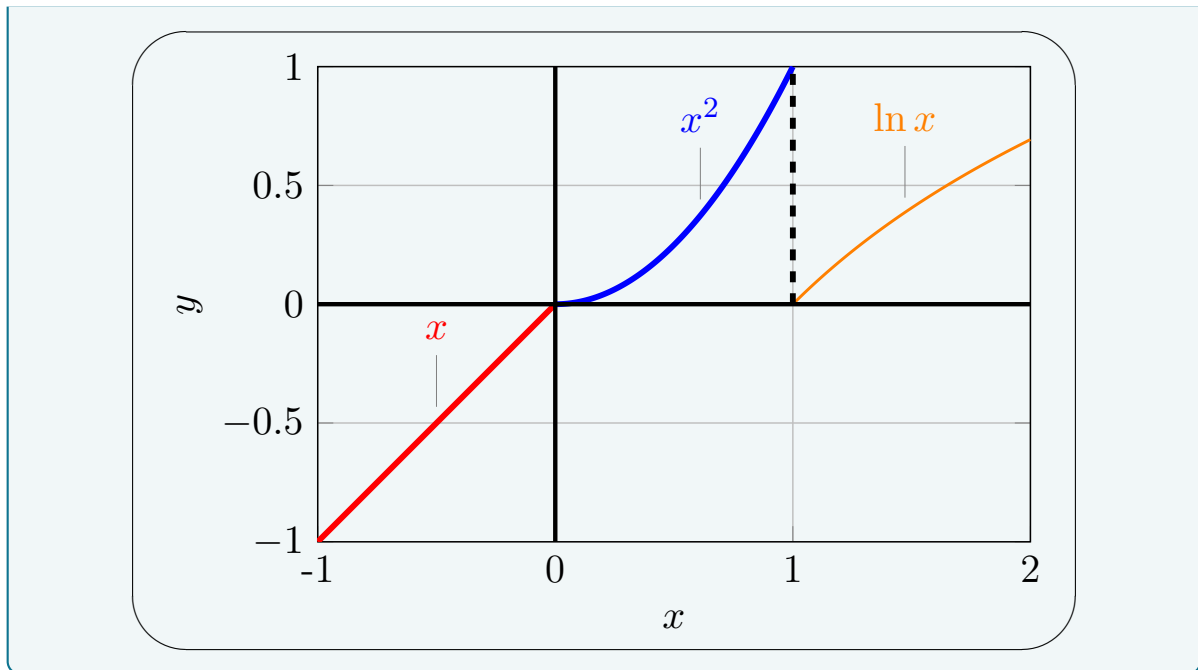
Una funzione f il cui valore $f(x)$ è calcolato mediante “istruzioni” diverse a seconda dell’intervallo in cui cade la x si chiama **funzione definita a tratti**.

Esempio 7.1: Funzioni definite a tratti

Consideriamo ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{if } x > 1, \\ x^2 & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

il suo grafico è:



- Dal punto di vista *logico / algoritmico*, si può dire che una funzione di questo tipo ha la particolarità di essere costruita utilizzando non solo le funzioni matematiche ma anche la **funzione logica** “se ... allora”.

7.3 Funzione valore assoluto

- Nel capitolo “**Fattoriali, coefficienti binomiali e disuguaglianza triangolare**” della Parte 2 il **valore assoluto** di un numero reale a è stato definito da

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Associando a ogni $x \in \mathbb{R}$ il numero $|x|$ si ottiene una funzione reale di variabile reale, che è l'esempio più importante di *funzione definita a tratti*.

Definizione 7.5: di funzione valore assoluto

La **funzione valore assoluto** è:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| \quad (7.4)$$

- **Segno.** La funzione valore assoluto è *non negativa* in $\mathbb{R}$ ed è *positiva* in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |x| = 0 \iff x = 0.$$

Infatti, se $x \geq 0$ allora $|x| = x \geq 0$, e se $x < 0$ allora $|x| = -x > 0$; in entrambi i casi $|x| = 0$ obbliga $x = 0$.

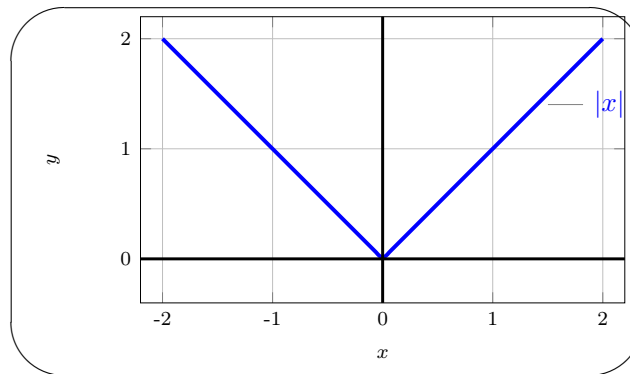
- **Monotonia.** La funzione valore assoluto è *decrecente* in $(-\infty, 0]$ ed è *crescente* in $[0, +\infty)$, ma **non** è monotona in $\mathbb{R}$.

- Se $x_1 < x_2 \leq 0$, allora $|x_1| = -x_1 > -x_2 = |x_2|$.
- Se $0 \leq x_1 < x_2$, allora $|x_1| = x_1 < x_2 = |x_2|$.
- Non è monotona in $\mathbb{R}$ perché $f(-1) = 1 > f(0) = 0$ (quindi non è non decrescente in $\mathbb{R}$) e $f(0) = 0 < f(1) = 1$ (quindi non è non crescente in $\mathbb{R}$).
- **Limitatezza e immagine.** La funzione è *limitata inferiormente* in $\mathbb{R}$ (il numero 0 è un minorante dei suoi valori), ma **non** è limitata superiormente: per ogni $M \in \mathbb{R}$ con $M > 0$ si ha $f(M+1) = M+1 > M$. La sua immagine è

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty),$$

perché $|x| \geq 0$ per ogni x e, viceversa, ogni $y \geq 0$ è l'immagine di y stesso: $|y| = y$.

- **Simmetria.** La funzione valore assoluto è *pari*, dato che $|-x| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
- Il grafico è formato dalle due semirette $y = -x$ per $x \leq 0$ e $y = x$ per $x \geq 0$:



Funzioni iperboliche

8.1 Funzioni iperboliche

Definizione 8.1: funzione seno iperbolico e funzione coseno iperbolico

Le funzioni iperboliche:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (8.1)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (8.2)$$

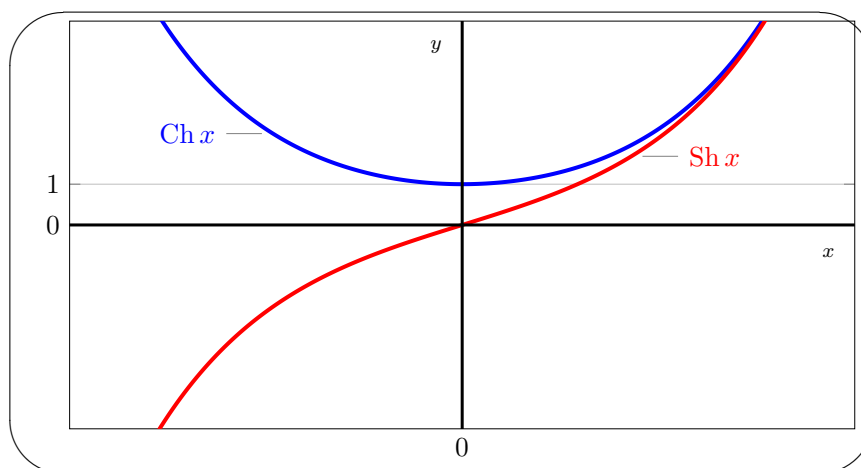
si chiamano **seno iperbolico** e **coseno iperbolico**.

- Il seno iperbolico è una funzione **dispari** mentre il coseno iperbolico è una funzione **pari**. Abbiamo quindi:

$$\text{Sh}(-x) = -\text{Sh } x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Ch}(-x) = \text{Ch } x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Abbiamo le relazioni fondamentali:

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Sh } x \leq \frac{e^x}{2} \leq \text{Ch } x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.3)$$



- Per la positività e monotonicità della funzione seno iperbolico abbiamo:

$$\operatorname{Sh} x = 0 \iff x = 0 \quad \begin{cases} \operatorname{Sh} x > 0 & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{Sh} x < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f \text{ è crescente} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Per la positività e monotonicità della funzione coseno iperbolico abbiamo:

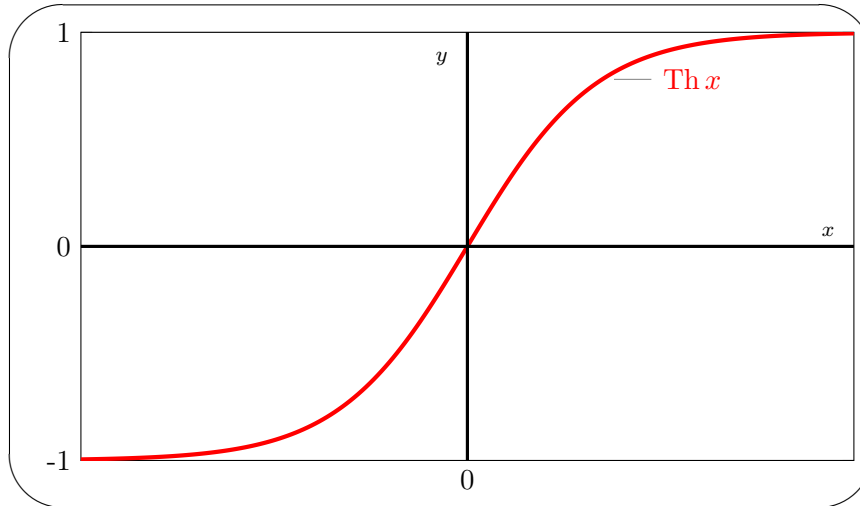
$$\operatorname{Ch} x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \text{se } x < 0 & f \text{ è decrescente} \\ \text{se } x > 0 & f \text{ è crescente} \end{cases}$$

La funzione iperbolica:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \operatorname{Th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (8.4)$$

si chiama **tangente iperbolica** ed è una funzione dispari.



8.2 Principali formule iperboliche

Addizione

$$\operatorname{Sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{Sh} x_1 \operatorname{Ch} x_2 + \operatorname{Sh} x_2 \operatorname{Ch} x_1 \quad (8.5a)$$

$$\operatorname{Ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{Ch} x_1 \operatorname{Ch} x_2 + \operatorname{Sh} x_1 \operatorname{Sh} x_2 \quad (8.5b)$$

$$\operatorname{Th}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{Th} x_1 + \operatorname{Th} x_2}{1 + \operatorname{Th} x_1 \operatorname{Th} x_2} \quad (8.5c)$$

Duplicazione

$$\operatorname{Sh}(2x) = 2 \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x \quad (8.6a)$$

$$\operatorname{Ch}(2x) = \operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x \quad (8.6b)$$

Operazioni sui grafici

9.1 Operazioni sui grafici

- Conoscendo il grafico di una funzione $y = f(x)$ mediante semplici trasformazioni geometriche è possibile disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$y_1 = f(x) + a, \quad a \in \mathbb{R} \quad (9.1a)$$

$$y_2 = f(x + a), \quad a \in \mathbb{R} \quad (9.1b)$$

$$y_3 = k f(x), \quad k \in \mathbb{R} \quad (9.1c)$$

$$y_4 = f(kx), \quad k \in \mathbb{R} \quad (9.1d)$$

$$y_5 = |f(x)| \quad (9.1e)$$

$$y_6 = f(|x|) \quad (9.1f)$$

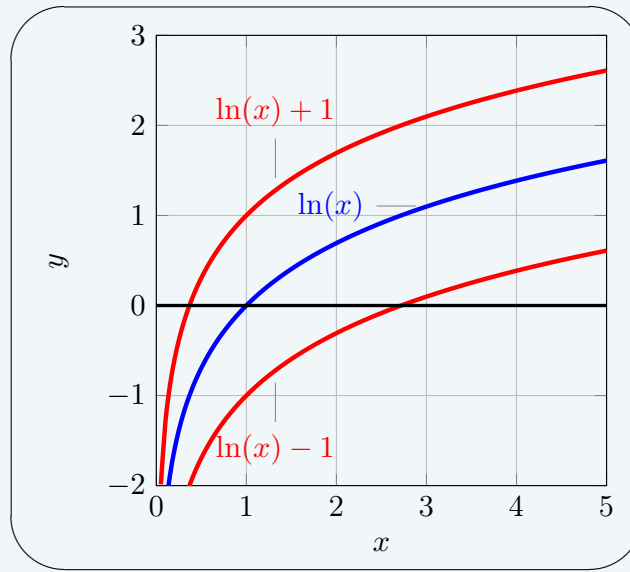
- Pertanto, a partire dalle funzioni elementari, è possibile costruire, mediante queste operazioni, una grande varietà di nuove funzioni. Queste operazioni creano **traslazioni**, **dilatazioni** e **riflessioni** della funzione originale.

9.1.1 Operazioni relative a $y_1 = f(x) + a$

Esempio 9.1: Operazioni sui grafici relative a $y_1 = f(x) + a$

Consideriamo $y = \ln x$. Allora

$$y_1 = \ln(x) + a \quad (x > 0).$$



- Il grafico di y_1 si ottiene da quello di y con una **traslazione** di a unità **verso l'alto** se $a > 0$, **verso il basso** se $a < 0$.

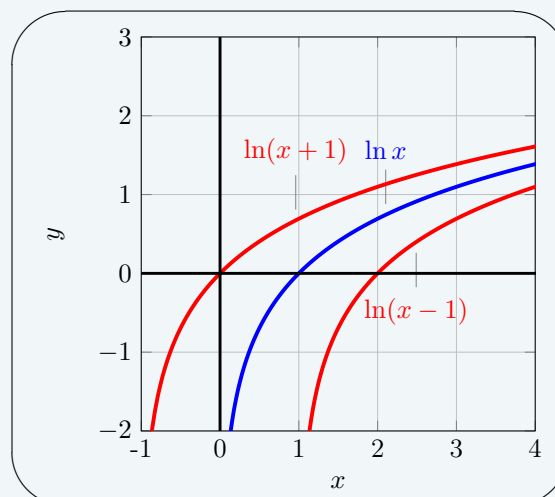
9.1.2 Operazioni relative a $y_2 = f(x + a)$

Esempio 9.2: Operazioni sui grafici relative a $y_2 = f(x + a)$

Consideriamo ancora $y = \ln x$. Allora

$$y_2 = \ln(x + a).$$

Essendo $\ln x$ definito per $x > 0$, $\ln(x + a)$ sarà definito per $x + a > 0$ e cioè per $x > -a$. Poiché $\ln x = 0$ se $x = 1$, si ha $\ln(x + a) = 0$ per $x + a = 1$ e cioè $x = 1 - a$.



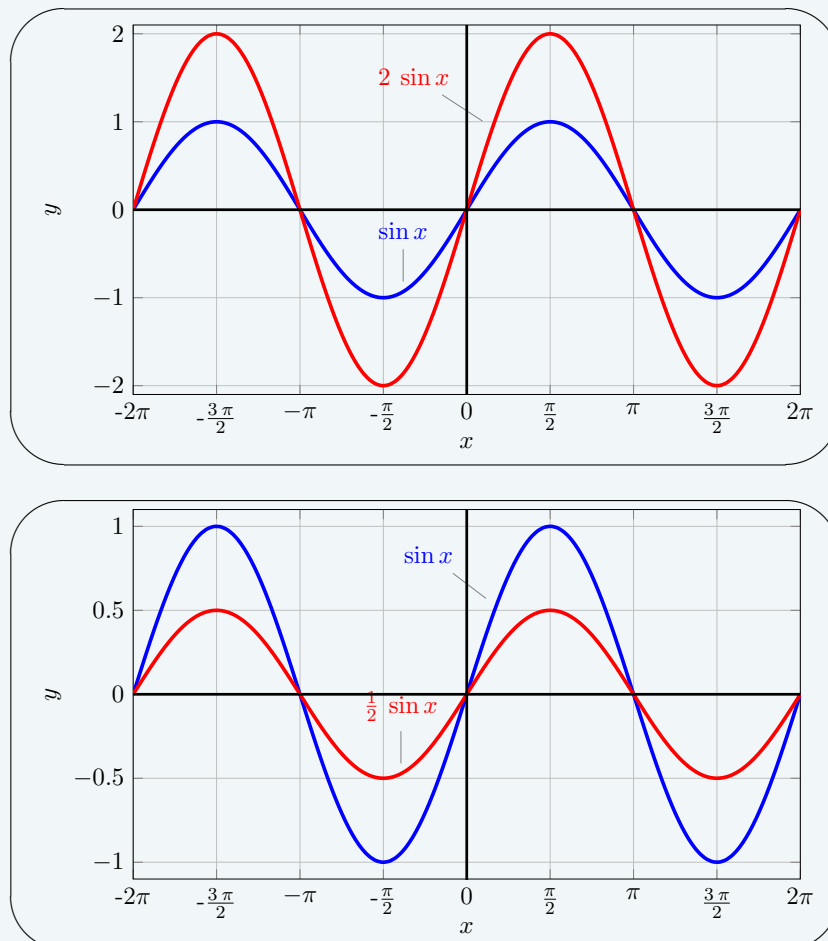
- Il grafico di y_2 si ottiene da quello di y con una **traslazione** di a unità a **sinistra** se $a > 0$, a **destra** se $a < 0$.

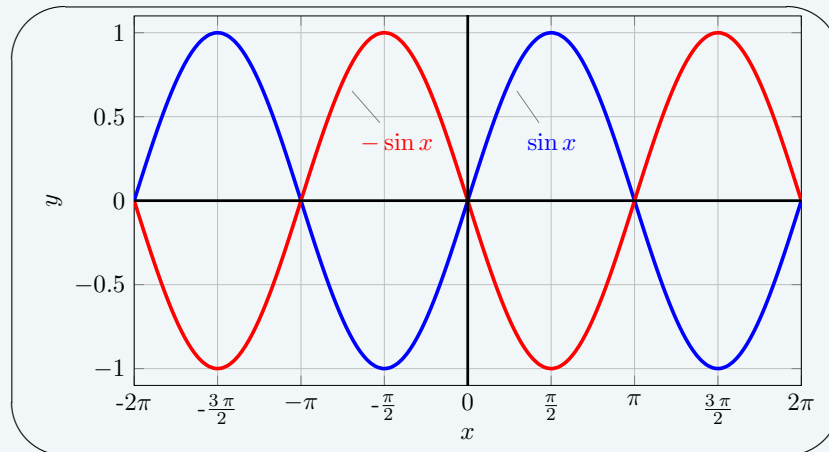
9.1.3 Operazioni relative a $y_3 = k f(x)$

- Il grafico di $y_3 = k f(x)$ si ottiene da quello di f moltiplicando per k tutte le ordinate $f(x)$.
- In particolare se $k = -1$ le ordinate sono semplicemente cambiate di segno, cosicché il grafico di y_3 è simmetrico, rispetto x , a quello di f .
- Osserviamo che se $k > 1$, il grafico si “**stira**” nella **direzione verticale**, dilatando verso l’**alto** le ordinate **positive** e verso il **basso** quelle **negative**.
- Al contrario, se $0 < k < 1$ il grafico si “**contrae**”, sempre in direzione verticale.
- Perciò l’operazione di moltiplicazione di $f(x)$ per k ha il significato geometrico di **dilatazione** (se $|k| > 1$) o **contrazione** (se $|k| < 1$) sull’asse delle y , eventualmente accompagnata da una **riflessione rispetto all’asse x** , se $k < 0$.

Esempio 9.3: Operazioni sui grafici relative a $y_3 = k f(x)$

Consideriamo $y = \sin x$, allora $y_3 = k \sin(x)$.



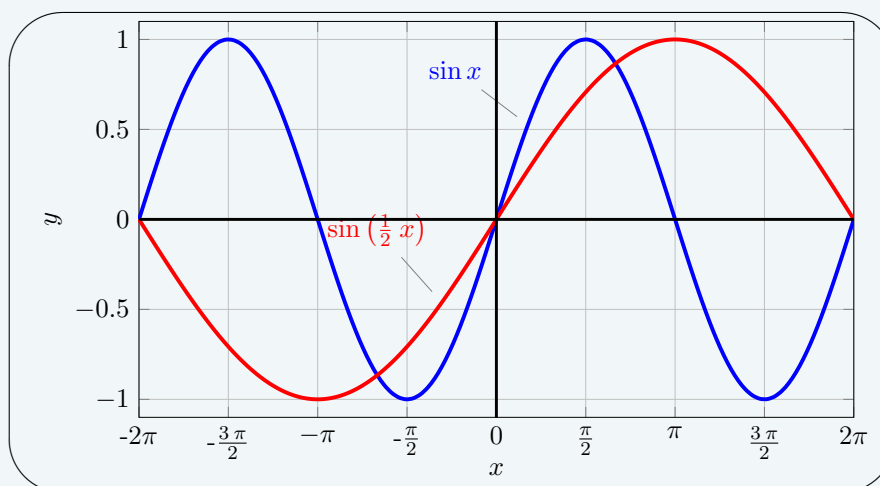


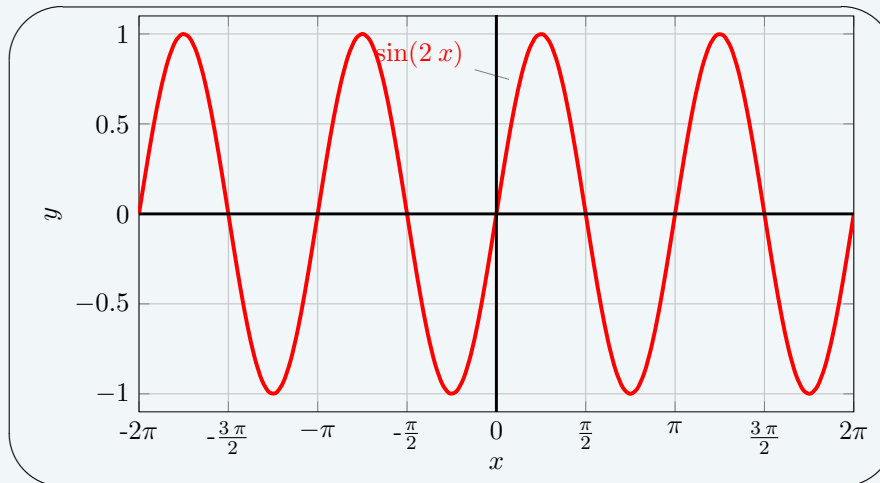
9.1.4 Operazioni relative a $y_4 = f(kx)$

- Il grafico di $y_4 = f(kx)$ si ottiene da quello di $f(x)$ con un **cambiamento di scala** sull'asse delle x .
- Se $k > 1$, kx cresce più rapidamente di x e perciò il grafico di y_4 sarà simile a quello di f ma con oscillazioni più rapide, ovvero sarà “**compresso**” in **direzione orizzontale**, di un fattore $\frac{1}{k}$.
- Analogamente se $0 < k < 1$ il grafico apparirà “**dilatato**” in **direzione orizzontale**, con oscillazioni più dolci.
- Se $k < 0$, oltre ad una compressione (se $|k| > 1$) o dilatazione (se $|k| < 1$) sull'asse delle x ci sarà una **riflessione rispetto all'asse delle y** .

Esempio 9.4: Operazioni sui grafici relative a $y_4 = f(kx)$

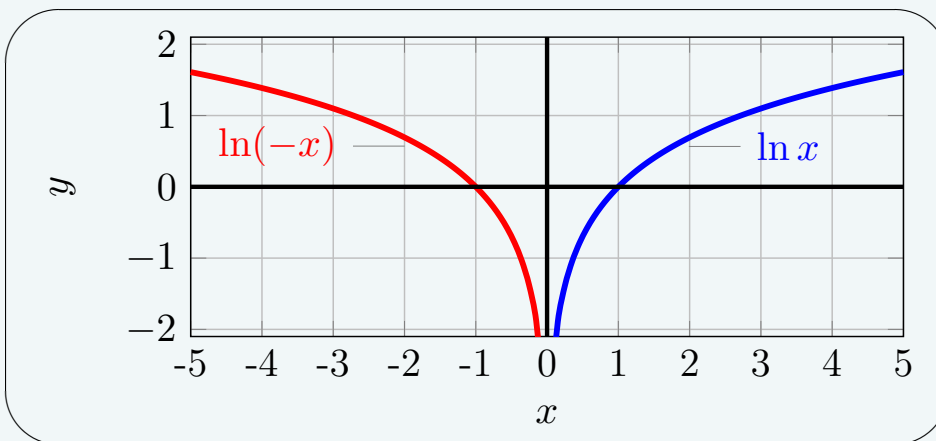
Consideriamo $y = \sin x$, allora $y_4 = \sin(kx)$. Con $k = \frac{1}{2}$ e $k = 2$ abbiamo:





Esempio 9.5: Operazioni sui grafici relative a $y_4 = f(kx)$

Consideriamo $y = \ln x$, allora $y_4 = \ln(kx)$. Con $k = -1$ abbiamo:



9.1.5 Operazioni relative a $y_5 = |f(x)|$

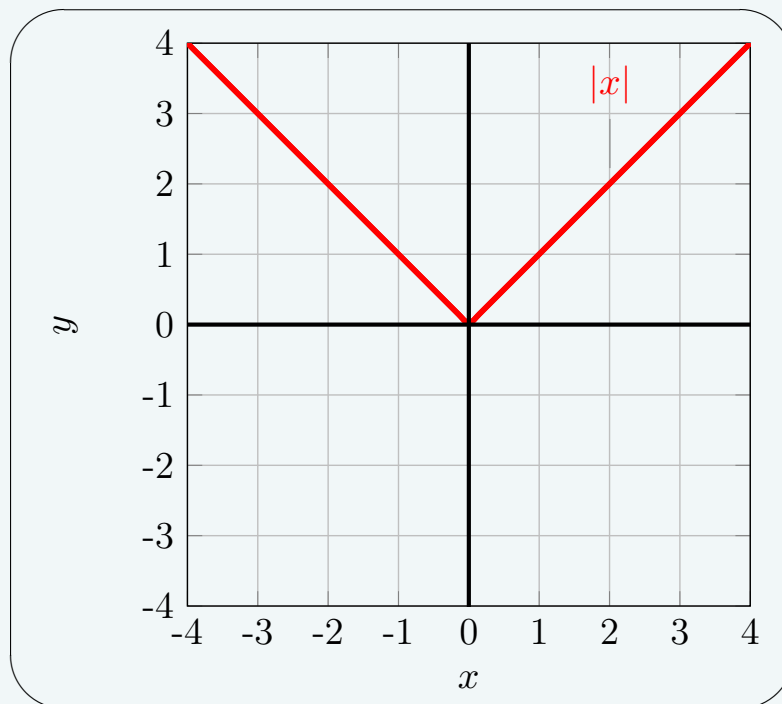
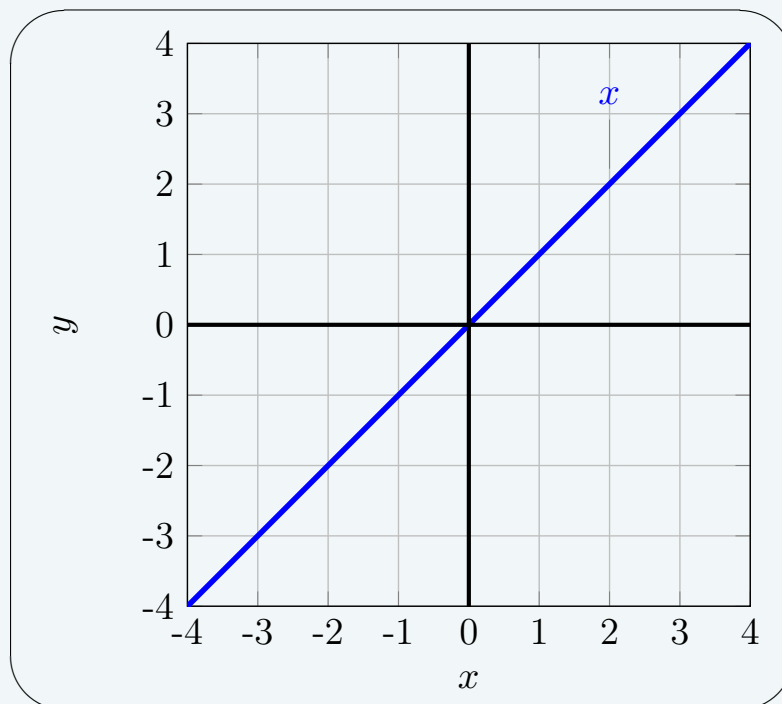
Valore assoluto di $f(x)$:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{if } f(x) < 0 \end{cases}$$

- Nel passare dal grafico $y = f(x)$ a $y_5 = |f(x)|$ i punti a **ordinata non negativa rimangono inalterati** mentre quelli a **ordinata negativa vengono trasformati nei loro simmetrici rispetto all'asse x** .
- Il grafico $y_5 = |f(x)|$ si ottiene da quello di f “ribaltando” simmetricamente rispetto all'asse delle ascisse la parte del grafico di f che si trova nel semipiano inferiore e lasciando inalterato il resto.

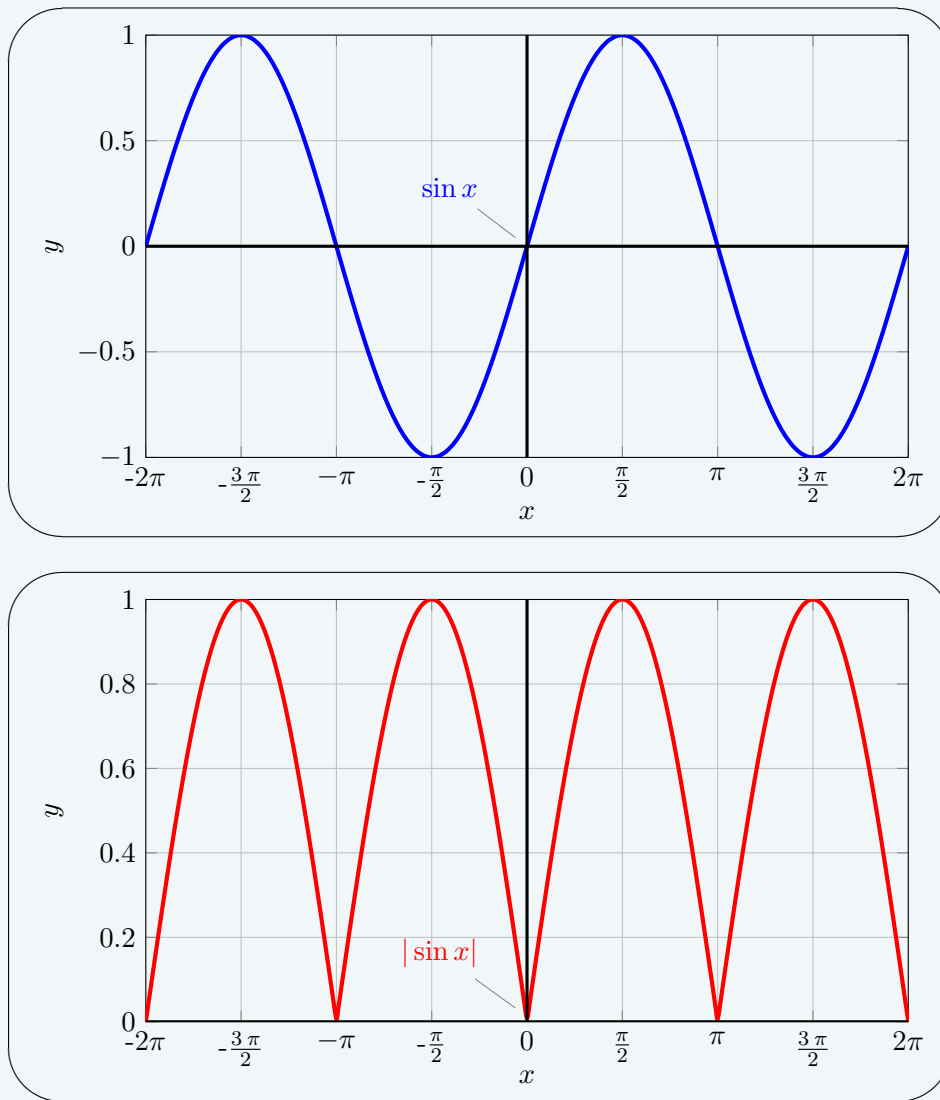
Esempio 9.6: Operazioni sui grafici relative a $y_5 = |f(x)|$

Consideriamo $y = x$ allora $y_5 = |x|$



Esempio 9.7: Operazioni sui grafici relative a $y_5 = |f(x)|$

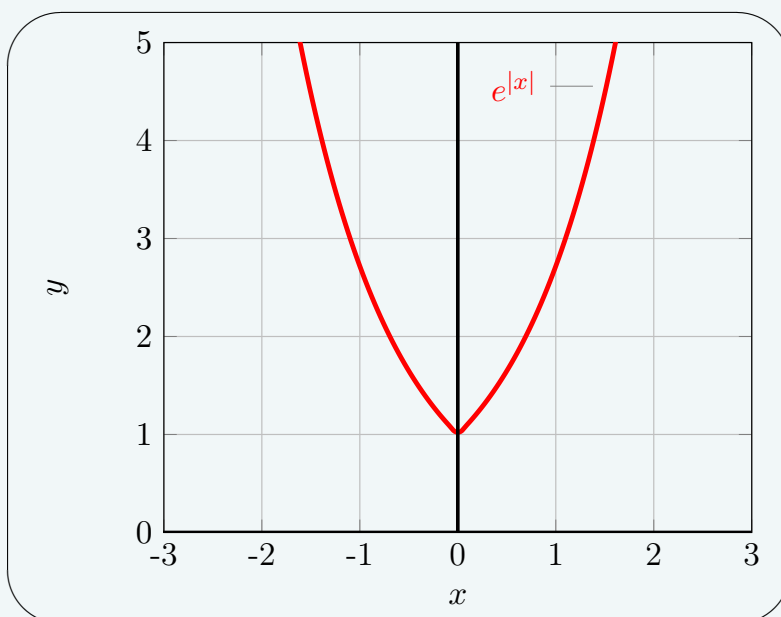
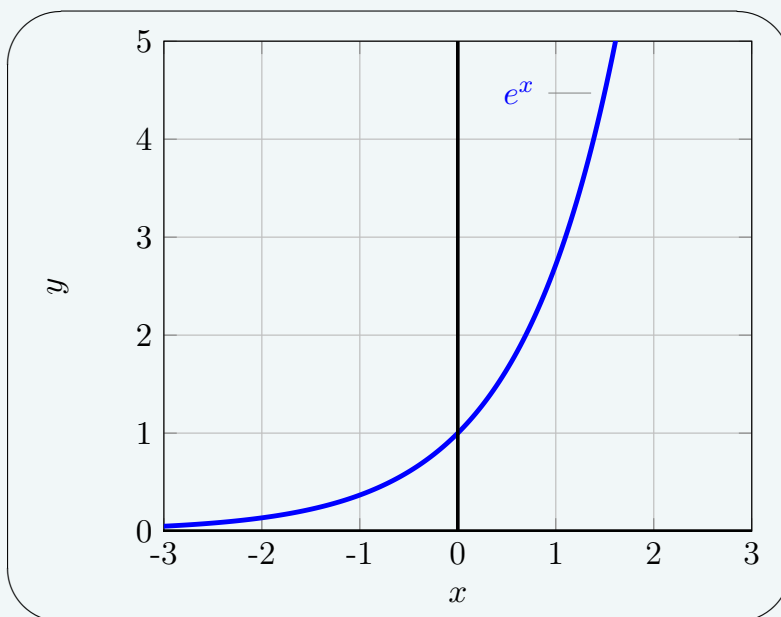
Consideriamo $y = \sin x$ allora $y_5 = |\sin x|$

**9.1.6 Operazioni relative a $y_6 = f(|x|)$**

- Infine, per tracciare il grafico $y_6 = f(|x|)$, osserviamo che: $|x| = x$ per $x \geq 0$, e quindi nel semipiano destro i due grafici coincidono
- Abbiamo $|-x| = |x|$, e quindi y_6 è una funzione pari, perciò simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.
- Di conseguenza il grafico $y_6 = f(|x|)$ verrà tracciato **lasciando inalterato il grafico di f nel semipiano destro e ribaltandolo simmetricamente rispetto all'asse delle ordinate**.

Esempio 9.8: Operazioni sui grafici relative a $y_6 = f(|x|)$

Consideriamo $y = e^x$ allora $y_6 = e^{|x|}$



Funzioni composte

10.1 Funzioni composte

Definizione 10.1: di funzione composta

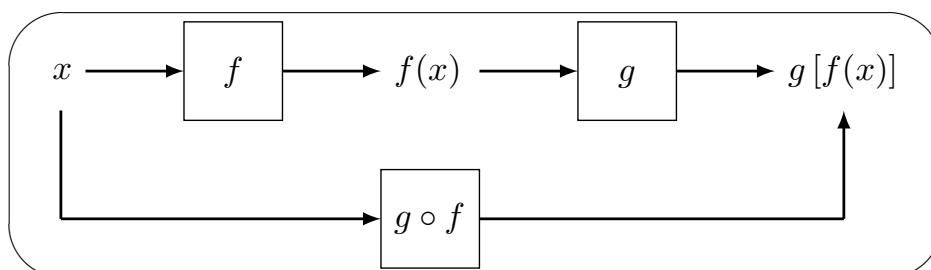
Date due funzioni:

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : F \rightarrow \mathbb{R},$$

se $f(E) \subseteq F$ (cioè se per ogni $x \in E$ si ha che $f(x) \in F$) si può definire la funzione $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ **composta** di f e g (nell'ordine), denotata col simbolo $g \circ f$, mediante la formula

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

- Lo schema di composizione è il seguente:

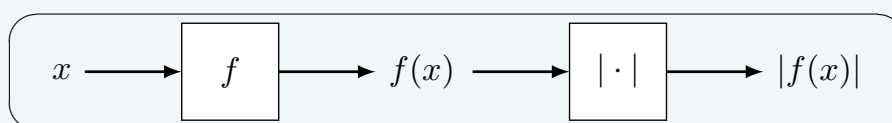


Esempio 10.1: di funzione composta

La funzione $x \mapsto |f(x)|$ è in realtà “composta” di due funzioni:

1. dato x , si calcola $f(x)$
2. calcolato $f(x)$, si calcola $|f(x)|$

Si tratta di operare in serie con due scatole nere, la prima corrispondente a f , la seconda al suo valore assoluto, secondo lo schema seguente:



- Può accadere che risultino ben definite sia la composizione $(g \circ f)$ che $(f \circ g)$ ma in generale

$$(f \circ g) \neq (g \circ f)$$

In altre parole **non vale la proprietà commutativa**.

Esempio 10.2: di composizione di funzioni

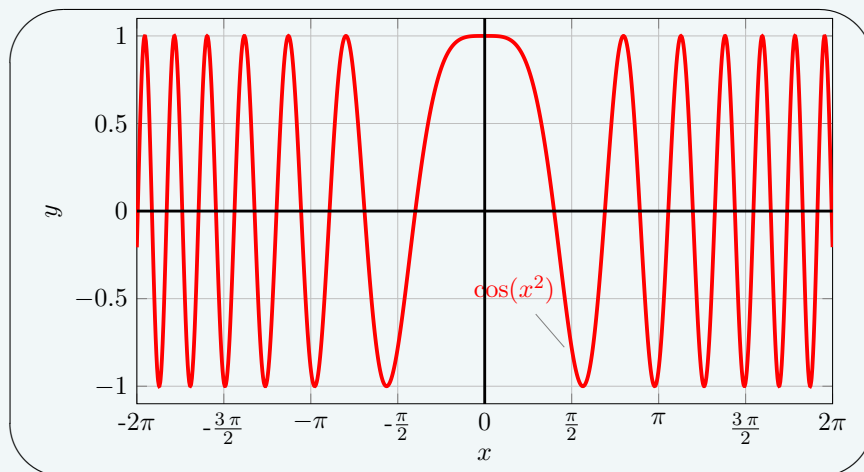
Consideriamo le funzioni:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: x \mapsto \cos x$$

ovvero $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$.

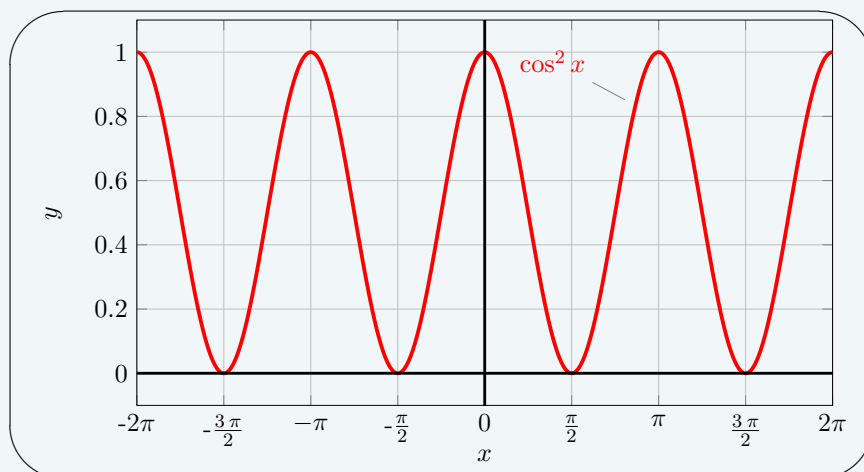
1. Poiché g è definita su tutto $\mathbb{R}$, $h = g \circ f$ è ben definita su $\mathbb{R}$ e vale la formula

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \cos(x^2)$$



2. Poiché f è definita su tutto $\mathbb{R}$, $k = f \circ g$ è ben definita su $\mathbb{R}$ e vale la formula

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = \cos^2 x$$



Esempio 10.3: di composizione di funzioni

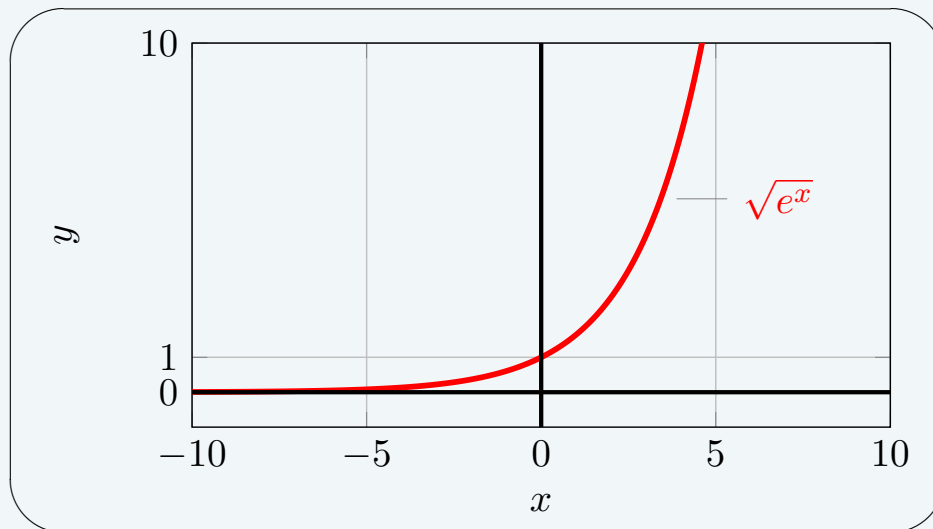
Consideriamo le funzioni:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: x \mapsto e^x \quad g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: x \mapsto \sqrt{x}$$

ovvero $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

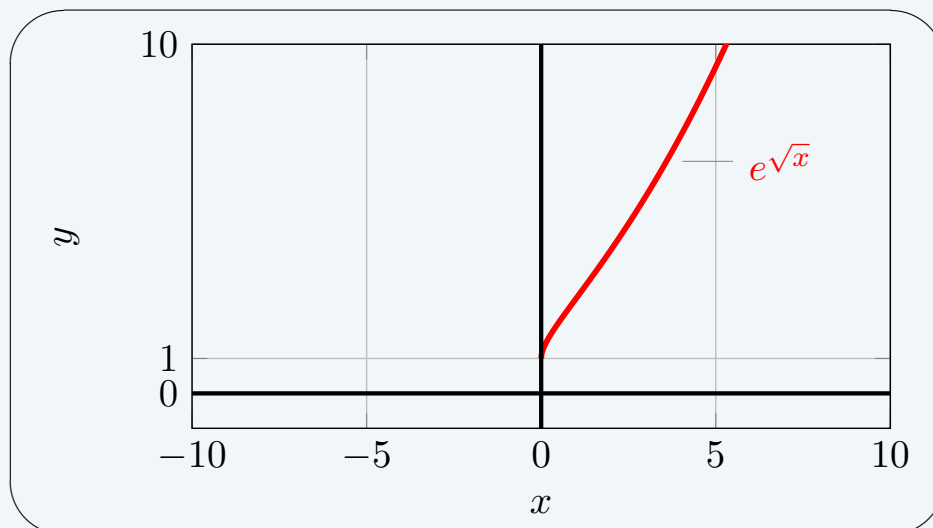
1. Poiché g è definita su $[0, +\infty)$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $h = g \circ f$ è ben definita su $\mathbb{R}$ e vale la formula

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{e^x}$$



2. Poiché g è definita solo su $[0, +\infty)$, $k = f \circ g$ è ben definita solo su $\mathbb{R}_+$ e vale la formula

$$k(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = e^{\sqrt{x}}$$



- L'operazione di composizione si può estendere a tre o più fattori. Si verifica che se la

composizione $(f \circ g) \circ r$ esiste, allora esiste anche $f \circ (g \circ r)$ e sono uguali

$$(f \circ g) \circ r = f \circ (g \circ r)$$

In altre parole **vale la proprietà associativa**.

- Se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f(D) \subseteq D$, allora si può comporre con sé stessa

$$f^2 = f \circ f \quad \text{ossia} \quad f^2(x) = f[f(x)]$$

f^2 viene detta **iterata seconda** di f . Analogamente, f^n si dice **funzione iterata n -esima** di f .

Funzioni inverse

11.1 Funzioni invertibili e funzioni inverse

- Data una funzione reale di variabile reale $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, per ogni ingresso x nel dominio D esiste un'unica uscita $y = f(x)$ nell'immagine del dominio $f(D)$.
- Se anche per ogni uscita $y = f(x) \in f(D)$ esiste un unico ingresso $x \in D$, allora f si dice **invertibile**, e realizza una **corrispondenza biunivoca** tra il dominio D di f e l'immagine del dominio $f(D)$.

Definizione 11.1: di funzione invertibile

Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è **invertibile** nel dominio D se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

$$\forall y \in f(D), \quad \exists! x \in D : y = f(x)$$

ovvero se f è **iniettiva**.

ATTENZIONE: la definizione di funzione invertibile data qui per funzioni reali di variabile reale è diversa dalla solita data per funzioni tra insiemi qualsiasi, che richiede anche la suriettività. In questo caso *basta l'iniettività* perché definiamo l'inversa sull'immagine di f e non su tutto il suo codominio.

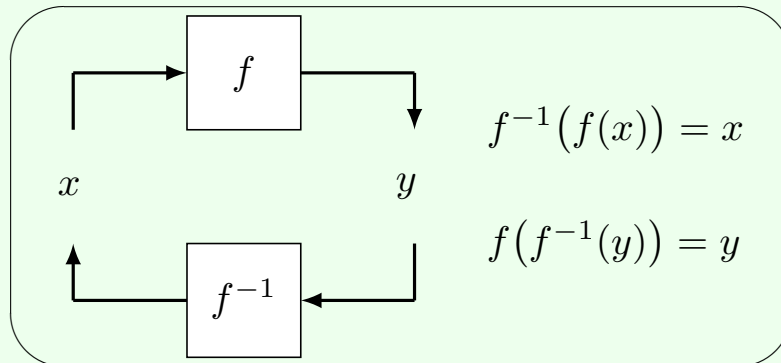
Definizione 11.2: di funzione inversa

Data una funzione invertibile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione che associa a ogni uscita $y \in f(D)$ l'unico ingresso $x \in D$ tale che $f(x) = y$ si chiama **funzione inversa** di f e si indica con il simbolo f^{-1} .

La coppia f e f^{-1} si indica:

$$f : \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases} \quad (11.1)$$

La scatola nera di f^{-1} lavora a ritroso rispetto a quella di f , secondo il seguente schema:



La condizione di invertibilità equivale a richiedere che il grafico di f sia intersecato al massimo in un punto da ogni retta parallela all'asse delle ascisse.

Esempio 11.1: grafico di funzione invertibile

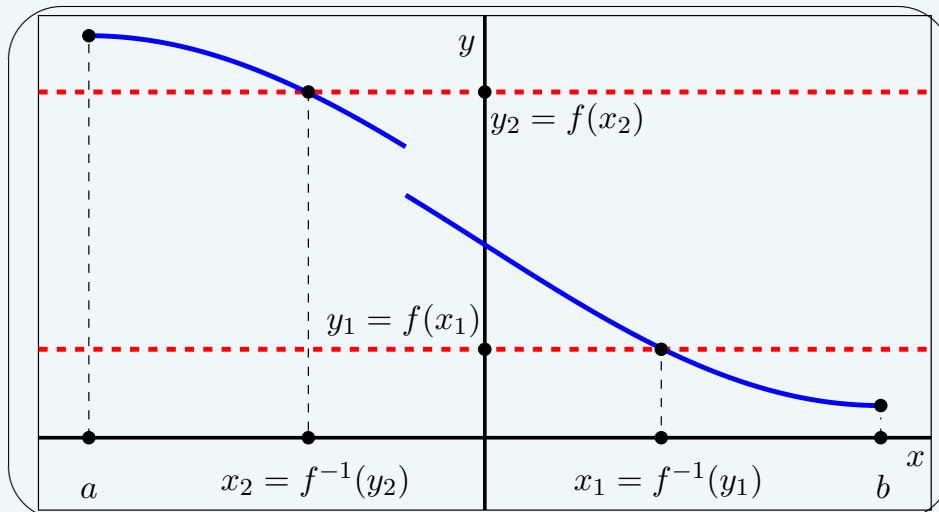


Grafico di funzione **invertibile** in $[a, b]$ in quanto ogni retta parallela all'asse delle ascisse o non interseca il grafico di f o lo interseca esattamente in un punto.

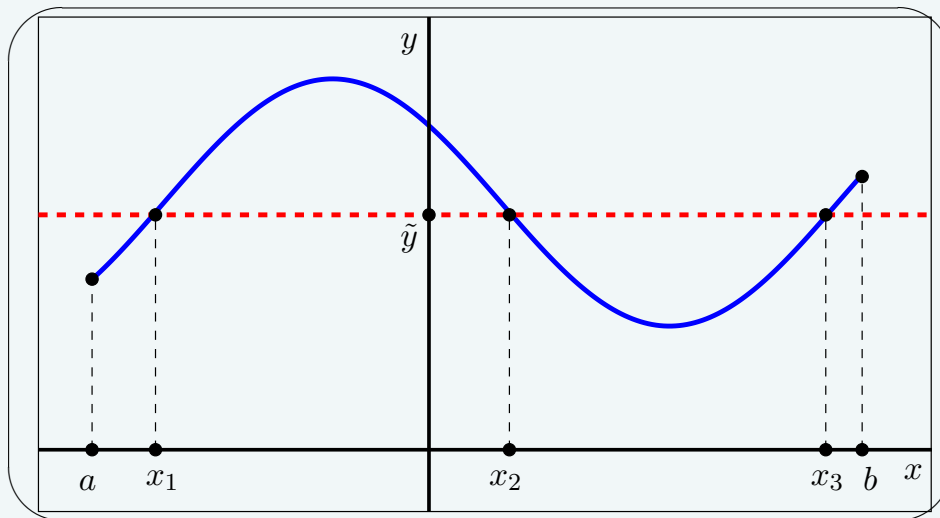
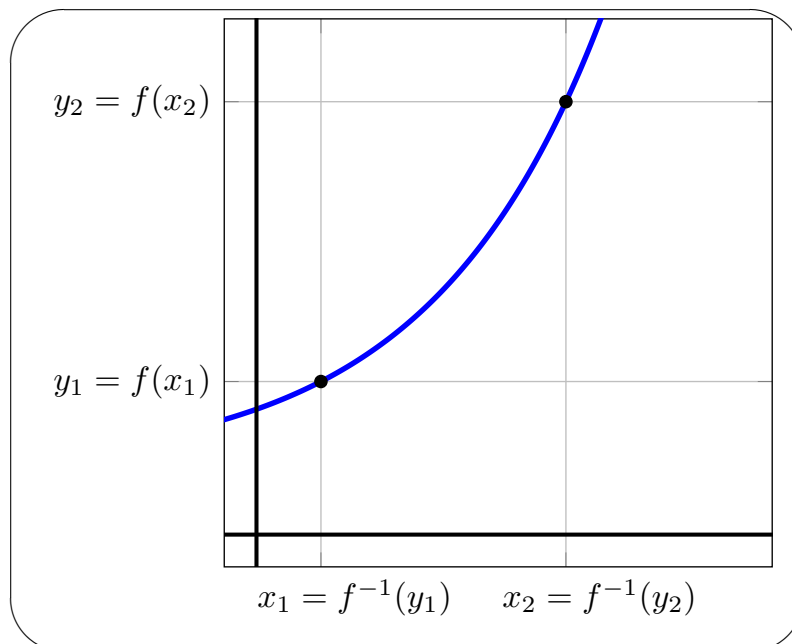
Esempio 11.2: grafico di funzione non invertibile

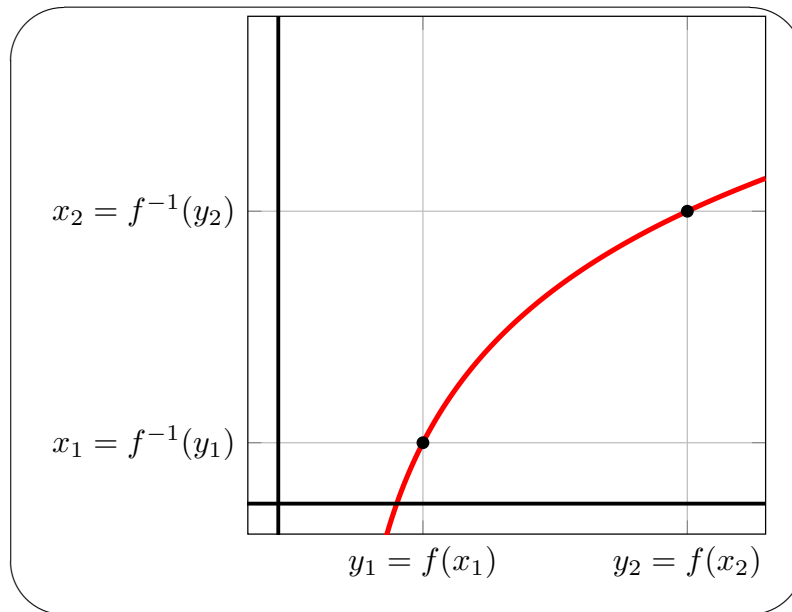
Grafico di funzione **non invertibile** in $[a, b]$ in quanto per il valore di $\tilde{y}$ indicato esistono più valori x (precisamente x_1 , x_2 e x_3) che hanno immagine $\tilde{y}$.

Teorema 11.3

Se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente (decrescente) in D allora è invertibile in D . Inoltre, la sua funzione inversa è strettamente crescente (decrescente).

Per il caso strettamente crescente, graficamente abbiamo:





Dimostrazione. Consideriamo il caso di una funzione strettamente crescente in D e due generici valori $x_1, x_2 \in D$ (il caso strettamente decrescente è analogo).

Se $x_1 \neq x_2$, allora o $x_1 < x_2$, oppure $x_1 > x_2$. Dato che f è strettamente crescente abbiamo:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ allora } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{se } x_1 > x_2, \text{ allora } f(x_1) > f(x_2)$$

In entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$, perciò f è invertibile.

Consideriamo la funzione inversa f^{-1} , ovvero $x = f^{-1}(y)$, e proviamo che sia strettamente crescente. Consideriamo due generici valori $y_1, y_2 \in f(D)$, con $y_1 < y_2$.

Se fosse $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$, poiché f è strettamente crescente avremmo $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, ovvero $y_1 \geq y_2$. Questo caso non può accadere visto che contraddice $y_1 < y_2$ (**assurdo**).

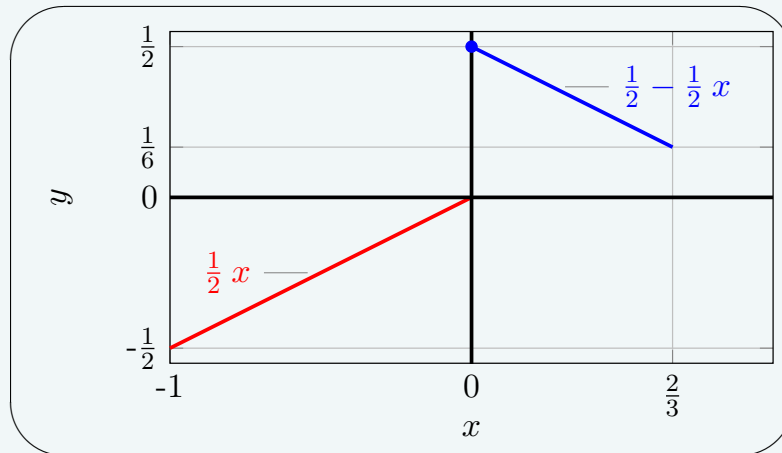
Di conseguenza abbiamo $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$, ovvero $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, e quindi f^{-1} è strettamente crescente. □

Una funzione può però essere invertibile anche senza essere strettamente crescente o decrescente.

Esempio 11.3: funzione invertibile ma non strettamente crescente né decrescente

Ad esempio la seguente funzione definita a tratti è invertibile:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq 2/3 \end{cases}$$



- Due classi di funzioni che sicuramente non risultano invertibili sono:

1. le funzioni simmetriche pari, dato che:

$$f(-x) = f(x)$$

2. le funzioni periodiche, dato che:

$$f(x + T) = f(x)$$

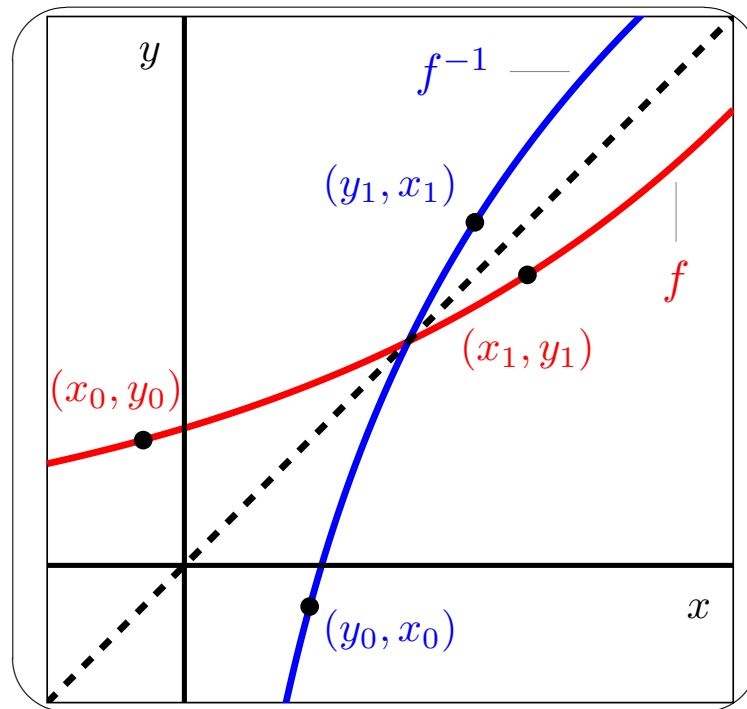
11.1.1 Grafico della funzione inversa

- Le relazioni tra una funzione invertibile f e la sua funzione inversa f^{-1} :

$$f : \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

indicano che se il punto (x_0, y_0) è sul grafico di f allora il punto (y_0, x_0) è sul grafico di f^{-1} .

- Essendo i punti (x_0, y_0) e (y_0, x_0) **simmetrici rispetto alla bisettrice** di equazione $y = x$, il grafico di f^{-1} si ricava da quello di f per simmetria rispetto alla bisettrice.



Se è nota l'espressione analitica di f , ed è invertibile, l'espressione analitica di f^{-1} si trova cercando di risolvere rispetto a x l'equazione:

$$f(x) = y \quad \text{ovvero trovare l'ingresso } x \text{ che produce l'uscita } y$$

Attenzione che non è sempre possibile trovarla anche nei casi in cui la funzione inversa esiste!

Dati $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, abbiamo :

$$f : \begin{cases} y = a x + b \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{y-b}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esempio 11.4: funzione inversa di una funzione affine

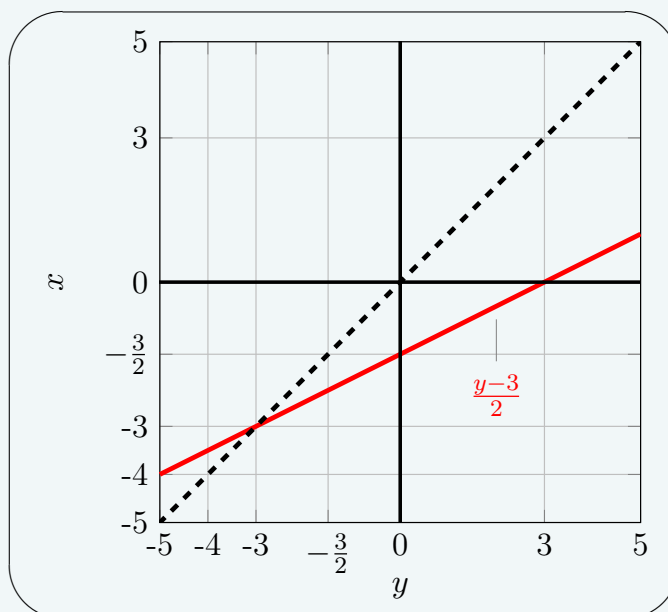
La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ è strettamente crescente quindi invertibile su $\mathbb{R}$ e l'equazione

$$2x + 3 = y \quad \text{risolta rispetto a } x, \quad \text{ovvero } x = \frac{y-3}{2}$$

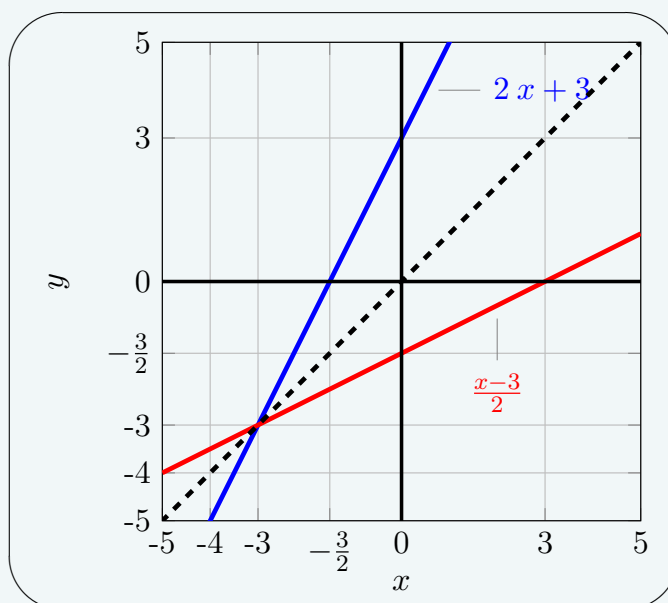
dà per f^{-1} l'espressione analitica:

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

ovvero la funzione: $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y-3}{2}$.



I grafici $y = 2x + 3$ e $y = \frac{x-3}{2}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$



Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Esempio 11.5: funzione inversa di $f(x) = x^2$

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty)$ quindi invertibile, l'equazione

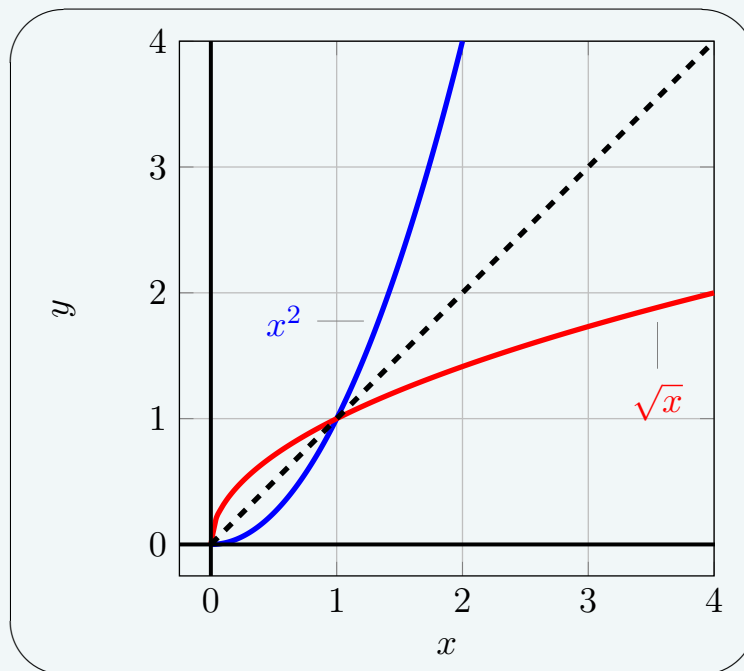
$$x^2 = y \text{ risolta rispetto a } x, \text{ ovvero } x = \sqrt{y}$$

dà per f^{-1} l'espressione analitica

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

ovvero la funzione: $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt{y}$.

I grafici $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$



Dato $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$, abbiamo :

$$f : \begin{cases} y = a^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \log_a y \\ y > 0 \end{cases}$$

Esempio 11.6: funzione inversa di $f(x) = e^x$

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi invertibile, l'equazione

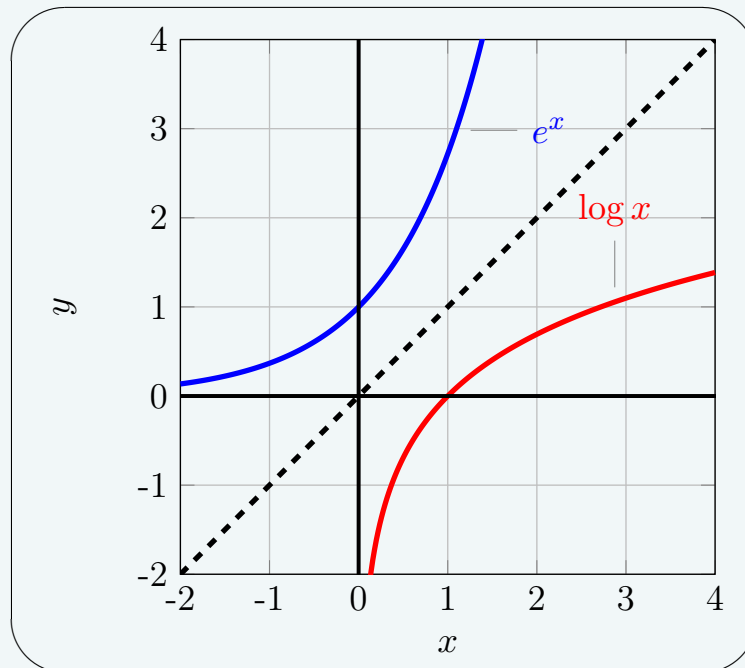
$$e^x = y \text{ risolta rispetto a } x, \text{ ovvero } x = \log y$$

dà per f^{-1} l'espressione analitica

$$f^{-1}(y) = \log y$$

ovvero la funzione: $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \log y$.

I grafici $y = e^x$ e $y = \log x$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$



- Consideriamo ora la funzione:

$$f(x) = x + e^x$$

Essendo somma di due funzioni strettamente crescenti in tutto $\mathbb{R}$, $f(x)$ è strettamente crescente e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ (vedere Teorema (11.3)). Tuttavia, cercheremmo inutilmente di risolvere rispetto a x l'equazione $x + e^x = y$. In altre parole, f^{-1} esiste, ma non si sa scrivere esplicitamente.

11.1.2 Le funzioni potenze inverse

Dato $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, abbiamo :

$$f : \begin{cases} y = x^\alpha \\ x > 0 \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = y^{\frac{1}{\alpha}} \\ y > 0 \end{cases}$$

Se $\alpha > 0$ abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = x^\alpha \\ x \geq 0 \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = y^{\frac{1}{\alpha}} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

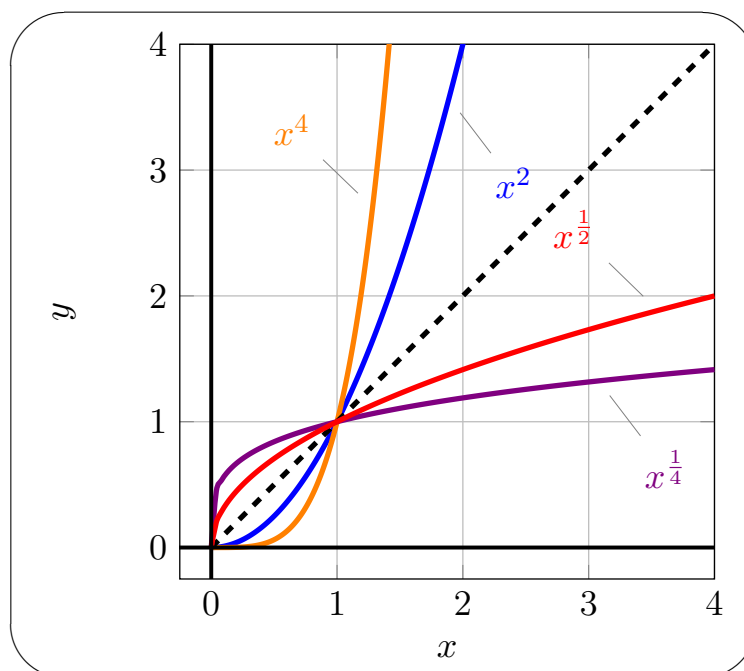
Se $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+$ dispari e coprimi, abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = x^{\frac{m}{n}} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = y^{\frac{n}{m}} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Le potenze pari:

$$x^{2n} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

non sono invertibili su tutta la retta, ma solo sulla semiretta $x \geq 0$.



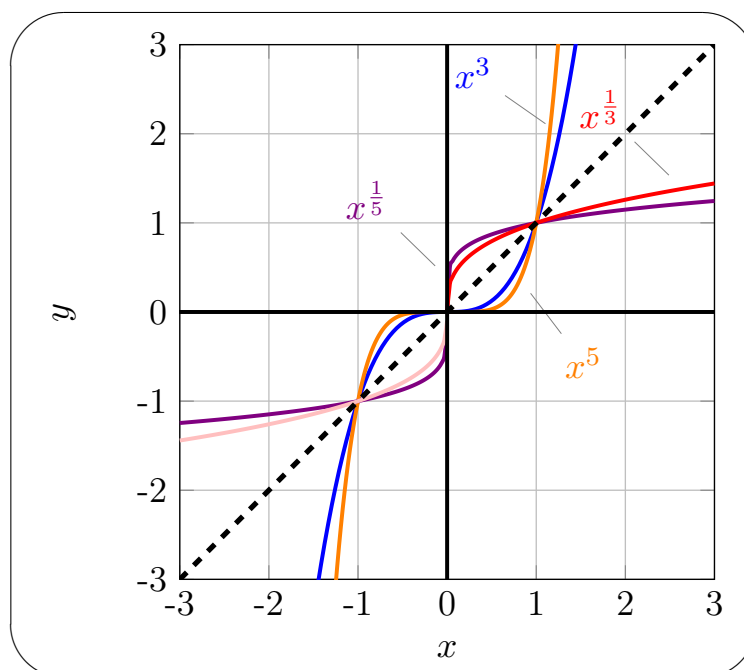
- Le potenze dispari:

$$x^{2n+1} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

e le potenze a esponente razionale

$$x^{\frac{m}{n}} \quad \text{con } n, m \text{ interi positivi e dispari}$$

essendo monotone strettamente crescenti sono invertibili da $-\infty$ a $+\infty$.



11.1.3 Le funzioni trigonometriche inverse

- Essendo periodiche, le funzioni trigonometriche non possono essere invertibili. Infatti, per esempio, l'equazione

$$y = \sin x$$

ha infinite soluzioni se $-1 \leq y \leq 1$ (l'uscita y corrisponde a infiniti ingressi) oppure non ha soluzioni reali se $|y| > 1$.

- Per parlare di funzioni inverse di seno, coseno e tangente occorrerà restringersi a intervalli nei quali queste funzioni siano strettamente monotone e perciò invertibili.
- Un intervallo nel quale la funzione seno è invertibile è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Definizione 11.4: di arcoseno

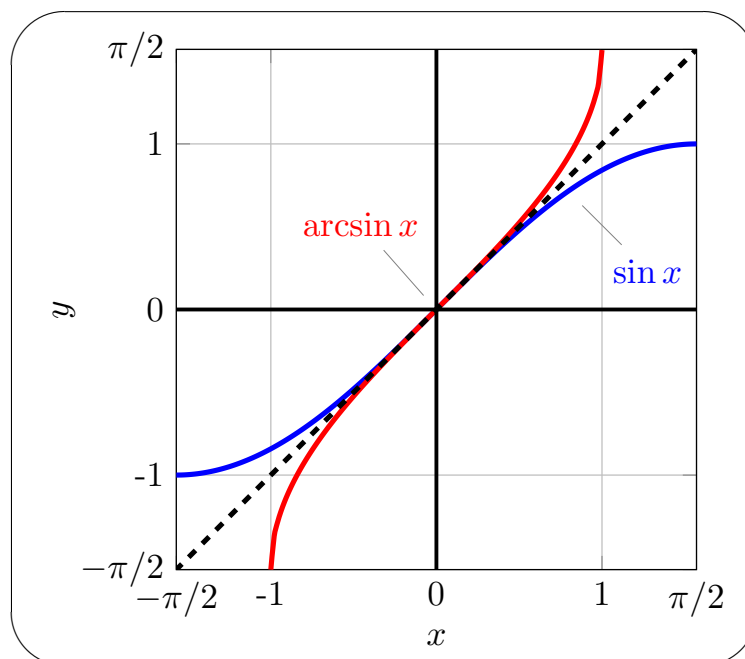
La funzione inversa del seno nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è l'**arcoseno**:

$$f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad f : y \mapsto \arcsin y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \arcsin y \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \quad (11.2)$$

- Il grafico dell'arcoseno si ottiene dall'arco di senoide del seno ristretto all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$,



- Un intervallo nel quale la funzione coseno è invertibile è $[0, \pi]$.

Definizione 11.5: di arcocoseno

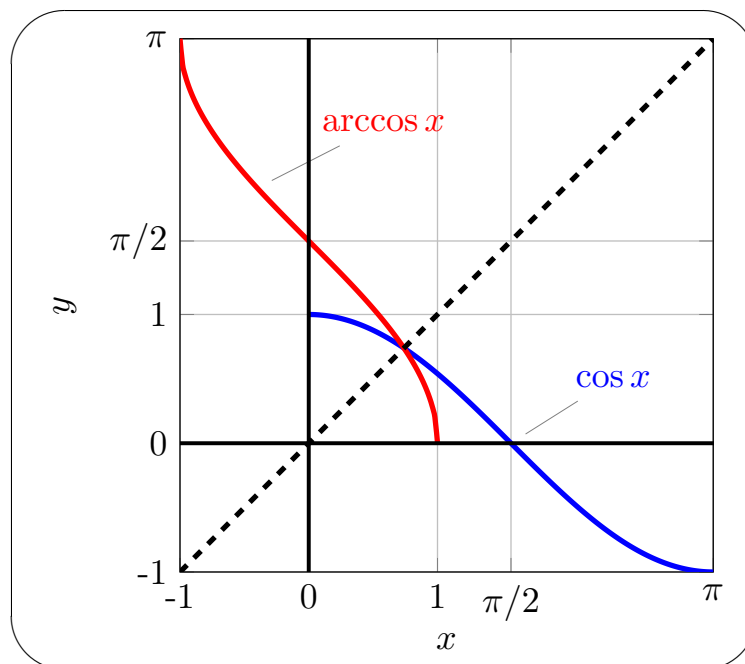
La funzione inversa del coseno nell'intervallo $[0, \pi]$ è l'**arcocoseno**:

$$f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad f : y \mapsto \arccos y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \arccos y \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \quad (11.3)$$

- Il grafico dell'arcocoseno si ottiene dall'arco di senoide del coseno ristretto all'intervallo $[0, \pi]$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$,



- Osserviamo che nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la tangente è strettamente monotona e quindi invertibile. La funzione inversa si chiama arcotangente ($\arctan$), ed è definita in $\mathbb{R}$.

Definizione 11.6: di arcotangente

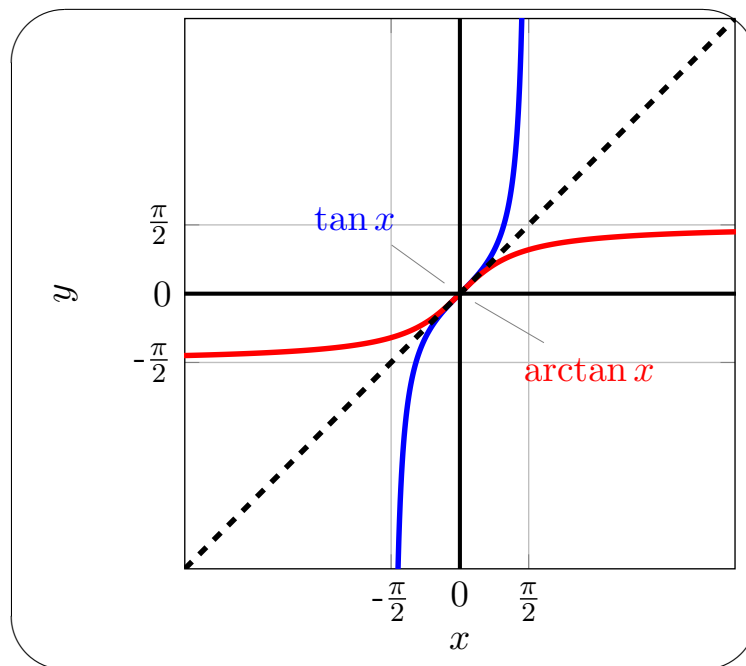
La funzione inversa della tangente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è l'**arcotangente**:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f : y \mapsto \arctan y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \tan x \\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \arctan y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (11.4)$$

- Il grafico dell'arcotangente si ottiene da quello della tangente ristretto all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$,



- Per mezzo delle funzioni trigonometriche inverse, possiamo esprimere le soluzioni di un' **equazione o disequazione trigonometrica**, quando questa coinvolge angoli non notevoli.

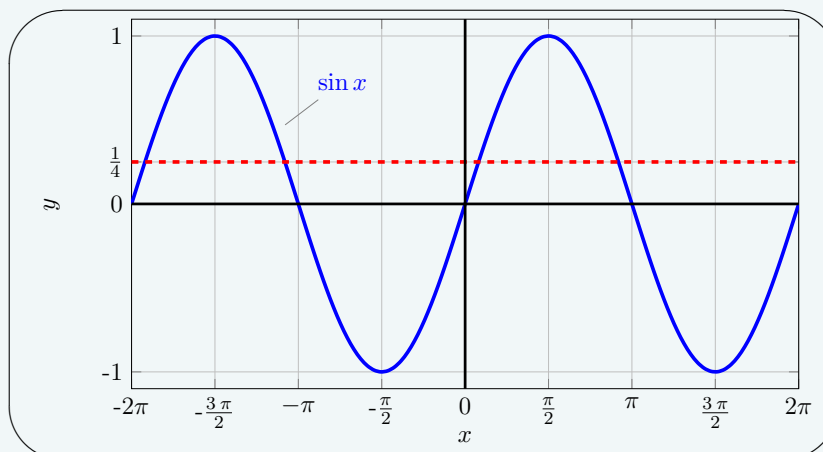
Esempio 11.7: Equazioni/disequazioni trigonometriche

- Le soluzioni di:

$$\sin x = \frac{1}{4}$$

sono:

$$(i) \quad x = \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi; \quad (ii) \quad x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

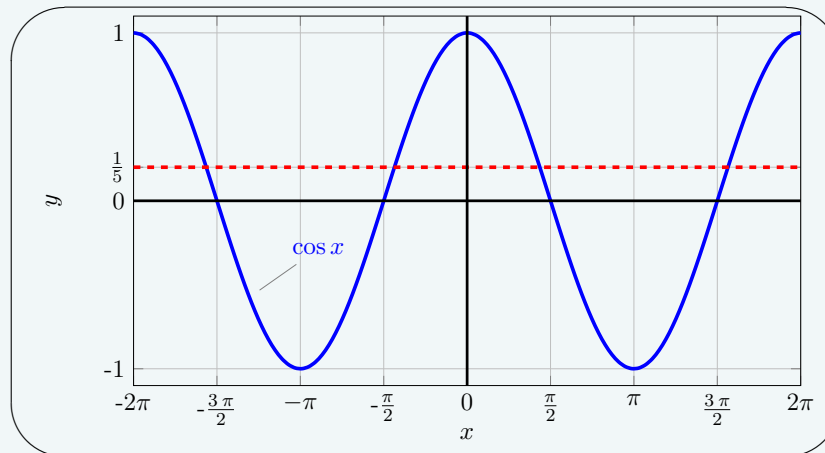


- Le soluzioni di:

$$\cos x < \frac{1}{5}$$

sono:

$$\arccos \frac{1}{5} + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos \frac{1}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



- Le soluzioni di:

$$\tan x \geq 3$$

sono:

$$\arctan 3 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

11.1.4 Le funzioni iperboliche inverse

- Consideriamo la funzione **seno iperbolico**:

$$y = \operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

È definita e strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, perciò è invertibile.

- Per risolvere l'equazione rispetto alla x , moltiplicando ambo i membri per e^x otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= e^x y - e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= 2e^x y - (e^x e^x - \underbrace{e^x e^{-x}}_{=e^{x-x}=e^0}) \\ &= 2y e^x - e^{2x} + 1 \\ &= e^{2x} - 2y e^x - 1 \end{aligned}$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita e^x . Ponendo $t = e^x$ otteniamo

$$0 = t^2 - 2y t - 1$$

Ricaviamo:

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{e risostituendo} \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

poiché $e^x > 0$, la soluzione col segno meno va scartata. Rimane dunque:

$$e^x = \underbrace{y + \sqrt{y^2 + 1}}_{>0, \forall y \in \mathbb{R}} \quad \text{e quindi} \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

- Questa è l'espressione analitica della funzione inversa di $\text{Sh } x$, che prende il nome di **settore seno iperbolico**, e si indica anche con SettSh . È definita per ogni y reale.

Definizione 11.7: di settore seno iperbolico

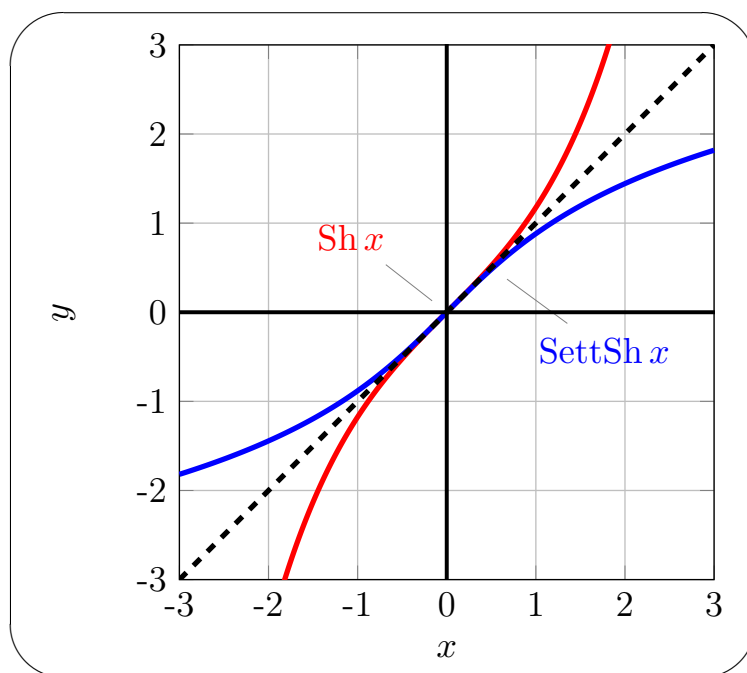
La funzione inversa del seno iperbolico è il **settore seno iperbolico**:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : y \mapsto \text{SettSh } y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \text{Sh } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \text{SettSh } y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (11.5)$$

- Il grafico del settore seno iperbolico si ottiene da quello del seno iperbolico su $\mathbb{R}$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$



- Consideriamo la funzione **coseno iperbolico**:

$$y = \text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

È definita in tutto $\mathbb{R}$, strettamente crescente per $x \geq 0$, decrescente per $x \leq 0$. Perciò non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

- La sua restrizione a $x \geq 0$ però lo è. Vogliamo determinare l'espressione analitica della funzione inversa di questa restrizione.
- Procedendo come prima, otteniamo:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

- Questa volta entrambi i numeri $y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ sono positivi; ricordiamo però che stiamo ragionando solo per $x \geq 0$, che equivale a scegliere il segno più. Pertanto:

$$x = \log \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$$

Questa è l'espressione analitica della funzione inversa di $\text{Ch } x$, che prende il nome di settore coseno iperbolico, e si indica anche con SettCh . Si noti che è definita per $y \geq 1$.

Definizione 11.8: di settore coseno iperbolico

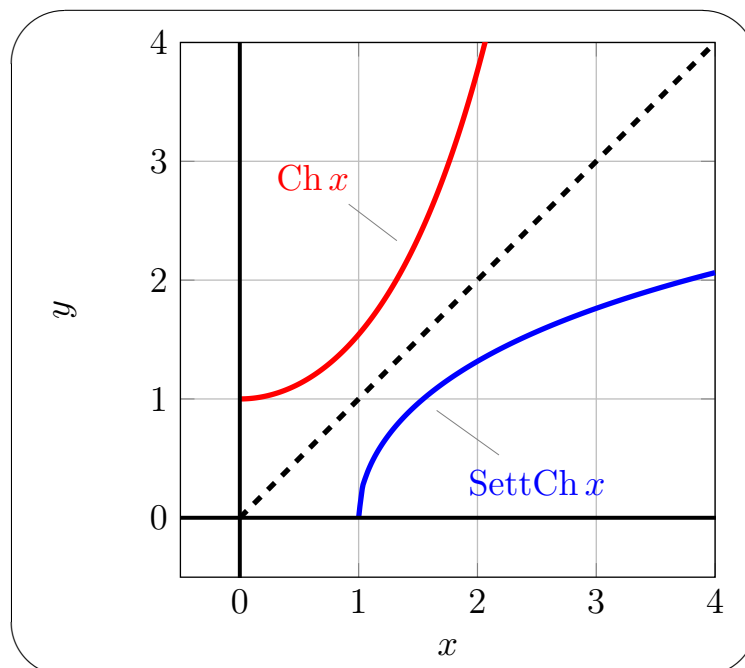
La funzione inversa del coseno iperbolico nell'intervallo $[0, +\infty)$ è il **settore coseno iperbolico**:

$$f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f : y \mapsto \text{SettCh } y$$

Abbiamo:

$$f : \begin{cases} y = \text{Ch } x \\ x \in [0, +\infty) \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x = \text{SettCh } y \\ y \in [1, +\infty) \end{cases}$$

- Il grafico del settore coseno iperbolico si ottiene da quello del coseno iperbolico su $[0, +\infty)$ (strettamente monotono), per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$.



Esempio 11.8: Equazioni iperboliche

- L'equazione:

$$\operatorname{Sh} x = 2$$

ha l'unica soluzione:

$$x = \operatorname{SettSh} 2 = \log(2 + \sqrt{5})$$

- L'equazione:

$$\operatorname{Ch} x = 3$$

ha due soluzioni:

$$x = \pm \operatorname{SettCh} 3 = \pm \log(3 + 2\sqrt{2})$$

