



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi

Matematica 1

Volume 2 — Numeri e insiemi

Il secondo volume: gli insiemi e i numeri su cui si costruisce l'analisi. Insiemi, insiemi numerici e intervalli, campi ordinati, estremo superiore e assioma di continuità, radicali, potenze e logaritmi, sommatorie e progressioni, fattoriali e coefficienti binomiali, successione di Fibonacci, insiemi infiniti, numeri complessi. Definizioni, teoremi con dimostrazione, esempi svolti; gli esercizi della parte, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 2.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Insiemi	3
1.1	Introduzione informale alla teoria degli insiemi	3
1.2	Insiemi numerici	7
1.3	Relazioni tra insiemi	11
1.4	Operazioni tra insiemi	16
1.5	Approfondimenti	33
2	Insiemi numerici e intervalli	37
2.1	I cinque principali insiemi numerici	37
2.2	Intervalli	40
3	Campi ordinati, estremo superiore/inferiore e assioma di continuità	42
3.1	Proprietà R_1 e R_2	42
3.2	Grandezze commensurabili	43
3.3	Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$	44
3.4	Relazioni di ordine totale	45
3.5	Proprietà R_3	46
3.6	Campi ordinati	47
3.7	Insiemi limitati, massimi e minimi	48
3.8	Maggioranti/minoranti e estremi superiori/inferiori	53
3.9	Definizione assiomatica dei numeri reali	55
3.10	Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$	57
4	Radicali, potenze, logaritmi e aritmetica modulare	59
4.1	Radicali, potenze, logaritmi	59
4.2	Aritmetica modulare	66
5	Sommatorie, progressioni geometriche e aritmetiche	71
5.1	Sommatorie	71
5.2	Progressioni geometriche	76
5.3	Progressioni aritmetiche	81
6	Fattoriali, coefficienti binomiali e disuguaglianza triangolare	86
6.1	Fattoriali	86
6.2	Coefficienti binomiali	87
6.3	Valore assoluto	91
7	Successione di Fibonacci	93
7.1	Successione di Fibonacci	93

8	Cardinalità degli insiemi infiniti	98
8.1	Potenza del numerabile	98
8.2	Potenza del continuo	101
9	Numeri complessi	104
9.1	Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo	104
9.2	Forma algebrica dei numeri complessi	106
9.3	Forma trigonometrica dei numeri complessi	112
9.4	Equazioni di secondo grado	120

Insiemi

1.1 Introduzione informale alla teoria degli insiemi

- La teoria degli insiemi si basa sui seguenti tre concetti chiave:

1. Insiemi

La nozione di insieme è generalmente assunta come **primitiva** (cioè non riducibile a concetti più elementari). Si usano come sinonimi di insieme le parole: *collezione*, *classe*, *aggregato*, *famiglia*.

Esempio 1.1: insiemi

Ad esempio abbiamo l'insieme dei punti di un piano, l'insieme degli studenti di una università o l'insieme delle stelle di una galassia.

2. Elementi

Un insieme è determinato dai suoi *elementi*, nel senso che un insieme è definito quando abbiamo un **criterio** con cui stabilire se un dato elemento è o non è elemento di questo insieme.

Esistono insiemi con un *numero finito di elementi* (ad esempio l'insieme degli studenti di una università) o con un *numero infinito di elementi* (ad esempio l'insieme dei punti del piano).

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole. Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole.

3. Appartenenza

Il concetto di *appartenenza* lega gli elementi agli insiemi. Quando un oggetto è un elemento di un insieme si afferma che quell'elemento *appartiene* all'insieme. Per indicare che un elemento x appartiene a un insieme A scriviamo:

$$x \in A$$

Per indicare che un elemento x *non* appartiene a un insieme A scriviamo:

$$x \notin A$$

1.1.1 Definizione informale di insiemi

1. Un primo modo di definire gli insiemi è la **definizione mediante tabulazione**

Un insieme può essere definito **mediante tabulazione** ossia elencando gli elementi che vi appartengono fra parentesi graffe. Questa tecnica presuppone che l'insieme abbia un numero finito di elementi.

Esempio 1.2: definizione mediante tabulazione

- La scrittura:

$$A = \{a, b, c\}$$

significa che l'insieme A ha come elementi le tre lettere a , b e c . Ad esempio abbiamo che a appartiene ad A ovvero $a \in A$, mentre $d \notin A$.

- L'insieme delle vocali dell'alfabeto latino si può definire per tabulazione:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- Nell'elencare gli elementi di un insieme ogni elemento si scrive **una sola volta**: un insieme non contiene lo stesso oggetto più di una volta.
- Gli elementi di un insieme **non sono ordinati**: $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 1, 2\}$ descrivono lo stesso insieme, perché l'ordine in cui elenchiamo gli elementi è irrilevante.

2. Un secondo modo di definire gli insiemi è la **definizione mediante proprietà**:

Un insieme può essere definito **mediante proprietà** come segue:

$$A = \{ x \in U : p(x) \text{ è vera} \}$$

dove $p(x)$ è la proprietà che l'elemento x dell'insieme U deve possedere per appartenere all'insieme A . Questa tecnica si può utilizzare per definire insiemi con un numero finito di elementi o anche infinito.

Esempio 1.3: definizione mediante proprietà

Consideriamo ad esempio l'insieme delle lettere dell'alfabeto latino:

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Utilizzando ad esempio la proprietà $p(x)$ definita come “ x è una vocale” possiamo definire il seguente insieme delle vocali:

$$A = \underbrace{\{x \in U : x \text{ è una vocale}\}}_{\{a, e, i, o, u\}}$$

Notiamo che per definire un insieme A mediante una proprietà abbiamo bisogno di un insieme U a cui appartengono tutti gli elementi dell'insieme A che si vuole definire. L'insieme U svolge il ruolo di **insieme universo**.

Definizione 1.1: di insieme universo

Un **insieme universo** (o semplicemente **universo**), indicato con U , è un insieme fissato in anticipo che contiene tutti gli oggetti presi in considerazione in un dato contesto: tutti gli insiemi di cui si parla in quel contesto hanno elementi che appartengono a U .

È importante che la proprietà $p(x)$ che si utilizza abbia senso per ogni x dell'insieme U (insieme universo), e quindi risulti vera o falsa (senza ambiguità di significato) per ogni particolare $x \in U$; l'insieme A consisterà allora di tutti e soli quegli x appartenenti ad U per cui la proprietà $p(x)$ è vera.

Fissare un unico insieme universo per tutto il discorso è comodo, ma non è necessario. Si può partire da un **qualsiasi insieme già noto** B , che può cambiare da una definizione all'altra:

Dato un insieme B già noto, la scrittura

$$A = \{ x \in B : p(x) \}$$

definisce l'insieme A formato da tutti e soli gli elementi di B per cui la proprietà $p(x)$ è vera (di solito “è vera” non si scrive). L'insieme universo è il caso particolare in cui $B = U$ è lo stesso per tutte le definizioni di un dato contesto.

- Questa è la forma che si usa ovunque in matematica. La proprietà può essere scritta a parole o con una formula, e può essere formata da più condizioni, separate da virgole o da “e”.
- Quando l'insieme di partenza è chiaro dal contesto, spesso lo si sottintende e si scrive semplicemente $\{ x : p(x) \}$. Ad esempio, in un discorso sui numeri reali, $\{ x : x > 0 \}$ indica l'insieme dei numeri reali positivi. L'insieme di partenza resta comunque fissato: è solo omesso nella scrittura.

Esempio 1.4: proprietà con insiemi di partenza diversi

- Partendo da $B = \{a, b, c, d, e\}$ e dalla stessa proprietà “ x è una vocale” otteniamo un insieme diverso da quello dell'esempio precedente:

$$\{x \in B : x \text{ è una vocale}\} = \{a, e\}$$

- Partendo da $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ possiamo definire:

$$\{x \in C : x \text{ è pari}\} = \{2, 4, 6\}$$

- Le condizioni possono essere più di una:

$$\{x \in C : x \text{ è pari, } x > 2\} = \{4, 6\}$$

In tutti i casi l'insieme di partenza è scelto di volta in volta e non è l'universo di tutto il discorso.

3. Un terzo modo di definire gli insiemi è la **definizione mediante costruzione**: invece di scegliere gli elementi fra quelli di un insieme che li contiene già, li **costruiamo** a partire dagli elementi di un insieme già noto.

Dato un insieme B già noto, un insieme può essere definito **mediante costruzione** come segue:

$$A = \{ \text{espressione costruita a partire da } x : x \in B \}$$

ossia A è formato da tutti gli oggetti che si ottengono applicando la stessa regola a ciascun elemento x di B . Non serve conoscere in anticipo un insieme che contenga gli elementi di A .

Esempio 1.5: definizione mediante costruzione

- L'insieme dei quadrati degli elementi di $\{1, 2, 3\}$:

$$\{ x^2 : x \in \{1, 2, 3\} \} = \{1, 4, 9\}$$

- L'insieme dei doppi degli elementi di $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$\{ 2x : x \in \{1, 2, 3, 4\} \} = \{2, 4, 6, 8\}$$

Se la regola produce lo stesso oggetto da elementi diversi, l'oggetto si conta una sola volta: ad esempio $\{ x^2 : x \in \{-1, 0, 1\} \} = \{0, 1\}$.

Occorre fare attenzione alla definizione degli insiemi in quanto possono emergere contraddizioni. Esiste una definizione formale del concetto di insieme sviluppata per evitare contraddizioni ma che esula dal programma del corso.

- In tutti i modi visti si parte sempre da un insieme già noto. La scrittura $\{ x : p(x) \}$ intesa come “tutti gli oggetti per cui $p(x)$ è vera”, senza alcun insieme di partenza (nemmeno sottinteso), in generale **non** definisce un insieme.
- Ad esempio, con la proprietà $p(x)$ definita come “ $x \notin x$ ” otterremmo l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi, che però non è un insieme nella definizione formale degli insiemi. Ammettere questo insieme genererebbe la contraddizione: “l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso” (**Paradosso di Russell**, discusso negli approfondimenti alla fine del capitolo).

1.2 Insiemi numerici

Definizione 1.2: sistema numerico

Un **sistema numerico posizionale** è un modo per codificare i numeri usando una **sequenza di cifre**, dove ciascuna cifra contribuisce in modo diverso al numero a seconda della sua posizione. Il numero di cifre distinte è la **base** del sistema.

L'**espansione decimale** di un numero è una rappresentazione numerica in base 10 ed esprime un numero come una somma di potenze di 10, e può essere finita o infinita a seconda del tipo di numero.

- Definizione informale dei principali insiemi numerici :

- Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei **numeri naturali** ovvero l'insieme dei numeri che si possono scrivere come **espansioni decimali senza virgola e senza segni**. Useremo la scrittura informale:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Adottiamo la convenzione che lo **zero è un numero naturale**, ovvero $0 \in \mathbb{N}$ (altri testi escludono lo zero da $\mathbb{N}$: è solo una convenzione, ma va dichiarata una volta per tutte). Indichiamo con $\mathbb{N}_{>0}$ l'insieme dei **numeri naturali positivi**:

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Definizione 1.3: di numero pari

Un numero naturale n si dice **pari** se esiste un numero naturale m tale che:

$$n = 2m$$

Definizione 1.4: di numero dispari

Un numero naturale n si dice **dispari** se esiste un numero naturale m tale che:

$$n = 2m + 1$$

Esempio 1.6: numeri pari e dispari

- 0 è pari, perché $0 = 2 \cdot 0$, e 6 è pari, perché $6 = 2 \cdot 3$.
- 1 è dispari, perché $1 = 2 \cdot 0 + 1$, e 7 è dispari, perché $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Le stesse due definizioni si usano per i numeri interi, chiedendo che m sia un numero intero: ad esempio $-4 = 2 \cdot (-2)$ è pari e $-3 = 2 \cdot (-2) + 1$ è dispari.

L'**assioma del buon ordinamento** afferma che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ possiede il minimo.

- È una proprietà che si **assume come assioma** e che caratterizza $\mathbb{N}$: negli altri insiemi numerici non vale, perché $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono essi stessi sottoinsiemi non vuoti privi di minimo.
- È l'assioma che giustifica il **principio di induzione**, di cui ci occuperemo più avanti, e garantisce l'esistenza di un elemento più piccolo ogni volta che una proprietà è soddisfatta da almeno un numero naturale.

Osservazione 1.5

Ogni numero naturale è pari oppure dispari, e nessun numero naturale è contemporaneamente pari e dispari.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due affermazioni.

Ogni numero naturale è pari oppure dispari. Consideriamo l'insieme

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ non è pari e non è dispari} \}$$

e supponiamo per assurdo che S non sia vuoto. Per l'assioma del buon ordinamento S possiede il minimo, che indichiamo con n_0 . Abbiamo che:

- $n_0 \neq 0$, perché $0 = 2 \cdot 0$ è pari;
- $n_0 \neq 1$, perché $1 = 2 \cdot 0 + 1$ è dispari.

Quindi $n_0 \geq 2$ e perciò $n_0 - 2 \in \mathbb{N}$. Poiché $n_0 - 2 < n_0$ e n_0 è il minimo di S , il numero $n_0 - 2$ non appartiene a S , ovvero è pari oppure dispari:

- se $n_0 - 2 = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, allora $n_0 = 2m + 2 = 2(m + 1)$ e quindi n_0 è pari;
- se $n_0 - 2 = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{N}$, allora $n_0 = 2m + 3 = 2(m + 1) + 1$ e quindi n_0 è dispari.

In entrambi i casi $n_0 \notin S$, contro il fatto che n_0 è il minimo di S . Dunque S è vuoto.

Nessun numero naturale è contemporaneamente pari e dispari. Se un numero naturale n fosse pari e dispari, esisterebbero $m, k \in \mathbb{N}$ con

$$n = 2m \quad \text{e} \quad n = 2k + 1 \quad \implies \quad 2(m - k) = 1$$

Ma $m - k$ è un numero intero: se $m \leq k$ il primo membro è minore o uguale a 0, mentre se $m \geq k + 1$ il primo membro è maggiore o uguale a 2. In nessun caso il primo membro può valere 1, e quindi un tale n non esiste. $\square$

- Indichiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei **numeri interi** ovvero l'insieme dei numeri che si possono scrivere come **espansioni decimali senza virgola e con segno**. Useremo la scrittura informale:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$$

3. Indichiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei **numeri razionali** ovvero l'insieme dei numeri che si possono scrivere come **espansioni decimali finite o infinite periodiche**. In altre parole, è l'insieme dei numeri che si possono scrivere come una frazione $\frac{p}{q}$ dove p è un numero intero e q è un numero naturale diverso da zero.

Esempio 1.7: numeri razionali

- Ad esempio con $p = 2$ e $q = 5$ abbiamo la frazione $\frac{2}{5}$ la cui espansione decimale è $0,4$.
- Ad esempio con $p = 4$ e $q = 10$ abbiamo la frazione $\frac{4}{10}$ la cui espansione decimale è di nuovo $0,4$. Notiamo che un numero razionale può essere scritto con più di una frazione.
- Ad esempio con $p = 13$ e $q = 30$ abbiamo la frazione $\frac{13}{30}$ la cui espansione decimale è $0,4\bar{3} = 0,43333\dots$

Possiamo tuttavia rappresentare ogni numero razionale diverso da 0 mediante una sola frazione $\frac{p}{q}$ scegliendo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ coprimi (ovvero primi tra loro, cioè p e q non sono divisibili per uno stesso intero maggiore di 1).

Osservazione 1.6

$$0,\bar{9} = 1$$

Dimostrazione. Esistono differenti dimostrazioni di questa osservazione basate su differenti tecniche matematiche.

- (a) Una semplice prova deriva direttamente dalla definizione di 1 diviso 3, abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,\bar{3} \\ \frac{1}{3} \cdot 3 &= 0,\bar{3} \cdot 3 \\ 1 &= 0,\bar{9}\end{aligned}$$

- (b) Usando argomenti algebrici possiamo scrivere:

$$\begin{array}{ll}x = 0,999\dots & \\10x = 9,999\dots & \text{moltiplicando per 10} \\10x = 9 + 0,999\dots & \text{dividendo la parte intera da quella frazionaria} \\10x = 9 + x & \text{per definizione di } x \\9x = 9 & \text{sottraendo } x \\x = 1 & \text{dividendo per 9}\end{array}$$

(c) Una prova per assurdo è la seguente:

$$\begin{aligned}
 0,\bar{9} &\neq 1 \\
 0,\bar{9} \cdot 9 &\neq 1 \cdot 9 \\
 0,\bar{9} \cdot 9 + 0,\bar{9} &\neq 1 \cdot 9 + 0,\bar{9} \\
 0,\bar{9} \cdot 9 + 0,\bar{9} &\neq 9,\bar{9} \\
 0,\bar{9} \cdot (9 + 1) &\neq 9,\bar{9} \\
 0,\bar{9} \cdot (10) &\neq 9,\bar{9} \\
 9,\bar{9} &\neq 9,\bar{9} \quad \text{assurdo!}
 \end{aligned}$$

□

4. Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei **numeri reali** ovvero l'insieme dei numeri che si identificano con espansioni decimali finite o infinite, periodiche o non periodiche.

Esempio 1.8: numeri reali

- Consideriamo ad esempio il numero

$$0,10110111011110\dots$$

ottenuto mettendo dopo la virgola una cifra uguale a 1, poi 0, poi due cifre uguali a 1, poi 0, poi tre cifre uguali a 1 ... e così via. L'allineamento delle cifre dopo la virgola non è né finito né periodico: questo numero perciò è reale ma non razionale.

- Altri esempi di numeri reali ma non razionali sono $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ oppure π e il numero di Nepero e che hanno espansioni decimali infinite non periodiche e dunque sono numeri reali ma non razionali.

Esempio 1.9: insiemi numerici definiti per tabulazione e mediante proprietà

- L'insieme dei primi cinque numeri primi si può definire per tabulazione:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

Ad esempio $2 \in P$, mentre $4 \notin P$.

- L'insieme dei **numeri pari** si può definire mediante una proprietà, con universo $\mathbb{Z}$:

$$E = \{x \in \mathbb{Z} : \text{esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = 2k\}$$

Ad esempio $-4 \in E$, perché $-4 = 2 \cdot (-2)$, mentre $3 \notin E$, perché $3 = 2k$ darebbe $k = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

- L'insieme dei **numeri reali positivi** si può definire mediante una proprietà, con universo $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

È un insieme con un numero infinito di elementi, che non si può definire per tabulazione.

- Esistono definizioni formali degli insiemi dei numeri naturali, interi e razionali che esulano dal programma del corso. Daremo più avanti una definizione formale dei numeri reali.

1.3 Relazioni tra insiemi

Definizione 1.7: di insiemi uguali

Due insiemi A e B sono **uguali** quando possiedono gli stessi elementi. Si scrive

$$A = B$$

e significa che ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B e ogni elemento che appartiene a B appartiene anche ad A . Se A e B non sono uguali si scrive $A \neq B$.

Esempio 1.10: ordine e molteplicità degli elementi

- Il concetto di *ordine* tra gli elementi è estraneo agli insiemi:

$$\{1, 2, 5\} = \{1, 5, 2\}$$

perché i due insiemi hanno gli stessi elementi, i numeri 1, 2 e 5: l'ordine in cui elenchiamo gli elementi è irrilevante.

- Anche il concetto di *molteplicità degli elementi* è estraneo agli insiemi. Ad esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$x - 1 = 0$$

(che ha come unico elemento il numero 1) è uguale all'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(x - 1)^2 = 0$$

Il fatto che la seconda equazione abbia la soluzione $x = 1$ con molteplicità algebrica 2 non cambia l'insieme delle sue soluzioni: entrambi gli insiemi sono uguali a $\{1\}$.

Può accadere che valga solo una delle due richieste espresse dalla relazione di uguaglianza. Ad esempio, se sappiamo solo che ogni elemento di A è anche elemento di B , potremo dire che A è contenuto in B .

Definizione 1.8: di sottoinsieme

Dati due insiemi A e B , si dice che A è un **sottoinsieme** di B , e si scrive

$$A \subseteq B,$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B , cioè se per ogni x vale l'implicazione $x \in A \implies x \in B$. Si legge “ A è contenuto in B ” oppure “ A è un sottoinsieme di B ”.

Se si afferma che $A \subseteq B$, non si esclude che sia $A = B$. Se invece vogliamo proprio affermare che A è contenuto in B ma non coincide con B , diremo che A è *strettamente contenuto* in B .

Definizione 1.9: di sottoinsieme proprio

Dati due insiemi A e B , si dice che A è un **sottoinsieme proprio** di B , o che A è *strettamente contenuto* in B , e si scrive

$$A \subsetneq B,$$

se $A \subseteq B$ e $A \neq B$. In tal caso si parla di **inclusione stretta**.

- In alcuni testi il simbolo $\subset$ indica l'inclusione stretta, in altri è un sinonimo di $\subseteq$. Per evitare ambiguità useremo $\subseteq$ per l'inclusione e $\subsetneq$ per l'inclusione stretta; quando compare, il simbolo $\subset$ ha lo stesso significato di $\subseteq$.

Esempio 1.11: inclusione e inclusione stretta

- $\{1, 4\} \subseteq \{1, 3, 4\}$, perché 1 e 4 appartengono a $\{1, 3, 4\}$. L'inclusione è stretta, $\{1, 4\} \subsetneq \{1, 3, 4\}$, perché $3 \in \{1, 3, 4\}$ ma $3 \notin \{1, 4\}$, quindi i due insiemi non sono uguali.
- $\{1, 3, 4\} \subseteq \{1, 3, 4\}$, ma l'inclusione non è stretta, perché i due insiemi sono uguali.
- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$: ogni numero naturale è un numero intero, e $-1 \in \mathbb{Z}$ ma $-1 \notin \mathbb{N}$.

Si faccia attenzione a non confondere “appartiene a” e “è contenuto in” (in simboli, $\in$ e $\subseteq$). In un certo senso, sono due modi per indicare che “qualcosa sta dentro qualcos'altro”, ma hanno una differenza logica fondamentale:

- un insieme è contenuto in un altro insieme;
- un elemento appartiene a un insieme.

Esempio 1.12: “appartiene a” vs “è contenuto in”

Ad esempio:

$$3 \in \{1, 3, 4\};$$

$$\{3\} \subseteq \{1, 3, 4\};$$

$$\{1, 4\} \subseteq \{1, 3, 4\}.$$

In particolare, non si confonda 3 (che è un numero) con $\{3\}$, che è l'insieme che contiene come unico elemento il numero 3.

Talvolta si considerano insiemi che hanno per elementi altri insiemi. Anche in questo caso i simboli $\in$ e $\subseteq$ non sono intercambiabili, ma devono essere utilizzati correttamente.

Esempio 1.13: “appartiene a” vs “è contenuto in”

Ad esempio, se definiamo l'insieme

$$A = \left\{ \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \right\},$$

allora è corretto affermare che $\{2\} \in A$, perché $\{2\}$ è un insieme che svolge il ruolo di elemento di A , mentre sarebbe scorretto dire che $\{2\} \subseteq A$, perché questo significherebbe che $2 \in A$, mentre A ha come elemento $\{2\}$ ma non 2 . Invece il sottoinsieme di A che contiene il solo elemento $\{2\}$ si indica con $\{\{2\}\}$ e vale $\{\{2\}\} \subseteq A$.

1.3.1 Proprietà dell'inclusione**Proposizione 1.10: proprietà riflessiva dell'inclusione**

Per ogni insieme A abbiamo

$$A \subseteq A.$$

Dimostrazione. Per la definizione di sottoinsieme dobbiamo verificare che ogni elemento di A è anche elemento di A , cioè che per ogni x vale l'implicazione $x \in A \implies x \in A$. L'implicazione è vera perché la tesi coincide con l'ipotesi: se $x \in A$, allora $x \in A$. Quindi $A \subseteq A$. $\square$

Proposizione 1.11: proprietà antisimmetrica dell'inclusione

Dati due insiemi A e B , abbiamo

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Dimostrazione. $(\implies)$ Supponiamo $A = B$. Per la definizione di insiemi uguali ogni elemento di A appartiene a B , quindi $A \subseteq B$ per la definizione di sottoinsieme. Allo stesso modo ogni elemento di B appartiene ad A , quindi $B \subseteq A$.

$(\impliedby)$ Supponiamo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Da $A \subseteq B$ segue che ogni elemento di A appartiene a B , e da $B \subseteq A$ segue che ogni elemento di B appartiene ad A . Quindi A e B hanno gli stessi elementi, cioè $A = B$. $\square$

- La proprietà antisimmetrica dà il metodo più usato per dimostrare che due insiemi A e B sono uguali, detto della **doppia inclusione**: si prende un elemento qualsiasi di A e si mostra che appartiene a B (cioè $A \subseteq B$), poi si prende un elemento qualsiasi di B e si mostra che appartiene ad A (cioè $B \subseteq A$).

Proposizione 1.12: proprietà transitiva dell'inclusione

Dati tre insiemi A , B e C , abbiamo

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

Dimostrazione. Supponiamo $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, e sia x un elemento qualsiasi di A . Poiché $A \subseteq B$, abbiamo $x \in B$. Poiché $B \subseteq C$, da $x \in B$ segue $x \in C$. Quindi ogni elemento di A appartiene a C , cioè $A \subseteq C$. $\square$

1.3.2 Insieme vuoto, cardinalità e insieme delle parti**Definizione 1.13: di insieme vuoto**

L'**insieme vuoto** è l'insieme che non contiene alcun elemento. Si indica con $\emptyset$.

Osservazione 1.14

Dato un insieme A , abbiamo:

$$\emptyset \subseteq A$$

Dimostrazione. Per la definizione di sottoinsieme dobbiamo provare che ogni elemento che appartiene a $\emptyset$ appartiene anche ad A , cioè che per ogni x vale l'implicazione

$$x \in \emptyset \implies x \in A.$$

L'ipotesi $x \in \emptyset$ è falsa per ogni x , perché nessun elemento appartiene a $\emptyset$. Un'implicazione con l'ipotesi falsa è vera qualunque sia la tesi: si dice che l'implicazione è **vera per vacuità**. Lo stesso si vede ragionando per assurdo: se non fosse $\emptyset \subseteq A$, esisterebbe un elemento di $\emptyset$ che non appartiene ad A ; ma $\emptyset$ non ha elementi, quindi un tale elemento non esiste. Abbiamo quindi la tesi. $\square$

Definizione 1.15: di cardinalità di un insieme

Il numero di elementi di un insieme A è la **cardinalità** dell'insieme. Si indica con $|A|$. Se la cardinalità di A è un numero naturale, l'insieme A si dice **finito**; altrimenti si dice **infinito**.

- L'insieme vuoto è finito e ha cardinalità $|\emptyset| = 0$.
- Un insieme con un solo elemento si chiama **singolelto**: ad esempio $\{3\}$ è un singoletto e $|\{3\}| = 1$.
- Un sottoinsieme con k elementi di un insieme A si chiama **k -sottoinsieme** di A .

Esempio 1.14: cardinalità e sottoinsiemi con k elementi

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ abbiamo $|A| = 3$. I 2-sottoinsiemi di A sono $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$; i 1-sottoinsiemi di A sono i singoletti $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$; l'unico 0-sottoinsieme di A è $\emptyset$ e l'unico 3-sottoinsieme di A è A stesso.

Definizione 1.16: di insieme delle parti

Dato un insieme A , l'insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi di A si chiama **insieme delle parti** di A e si indica col simbolo $\mathcal{P}(A)$. Si usa anche la notazione 2^A .

- Ogni insieme A ha due sottoinsiemi banali, che sono A stesso (per la proprietà riflessiva dell'inclusione) e l'insieme vuoto $\emptyset$ (per l'Osservazione sull'insieme vuoto); i due sottoinsiemi coincidono se A è vuoto.

Esempio 1.15: insieme delle parti

Ad esempio, dato

$$A = \{1, 2, 3\},$$

allora

$$\mathcal{P}(A) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\} \right\}$$

Osservazione 1.17

Dato un insieme A con n elementi, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$$

Dimostrazione. Se $n = 0$, l'insieme A è vuoto e il suo unico sottoinsieme è $\emptyset$, quindi $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$. Se $n \geq 1$, siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ gli elementi di A . Per costruire un sottoinsieme S di A dobbiamo decidere, per ciascuno degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$, se S contiene o meno quell'elemento: dobbiamo quindi prendere una decisione tra due opzioni n volte, e ogni decisione è indipendente dalle altre.

- Ogni sequenza di n decisioni individua un sottoinsieme di A e, viceversa, ogni sottoinsieme S di A si ottiene da una sequenza di decisioni: per ogni i si sceglie di includere a_i se e solo se $a_i \in S$.
- Sequenze di decisioni diverse danno sottoinsiemi diversi: se due sequenze differiscono nella decisione sull'elemento a_i , allora a_i appartiene a uno dei due sottoinsiemi ma non all'altro.

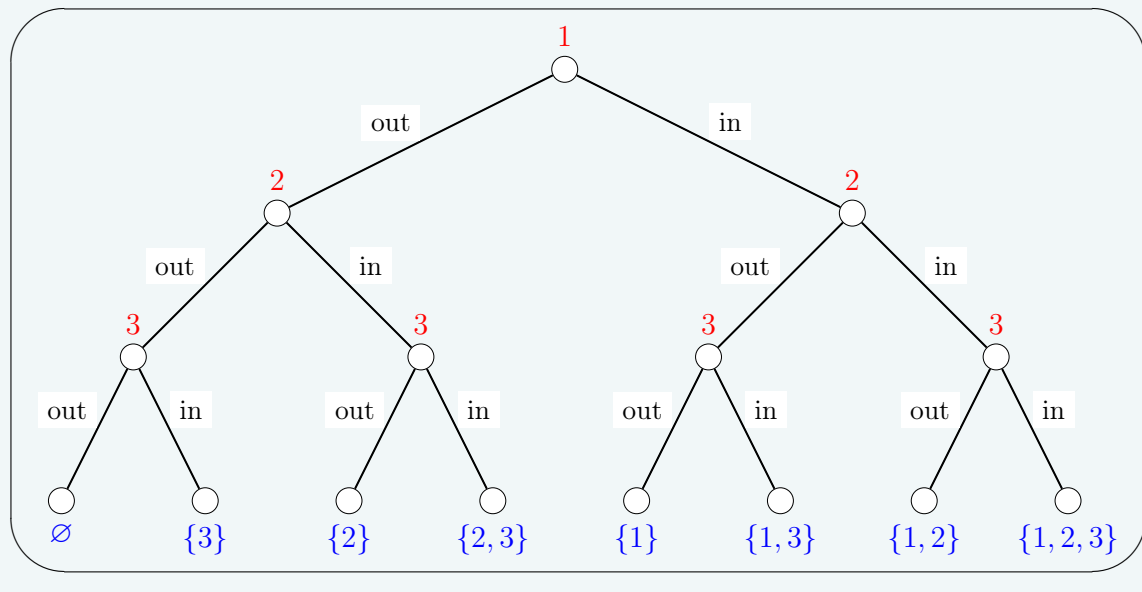
Il numero totale di sottoinsiemi possibili è quindi uguale al numero di sequenze di n decisioni tra due opzioni, cioè

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ volte}} = 2^n.$$



Esempio 1.16: costruzione dell'insieme delle parti con un albero binario

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ con $n = 3$ elementi, la cardinalità del suo insieme delle parti è $2^3 = 8$. La costruzione dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ può essere visualizzata attraverso il seguente **albero binario** (grafo non diretto, connesso e aciclico) a cui a ogni livello si decide se includere o meno l'oggetto nel sottoinsieme:



1.4 Operazioni tra insiemi

Definizione 1.18: di intersezione di insiemi

L'*intersezione* di due insiemi $A, B \subseteq U$ è l'insieme definito da:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme.

Definizione 1.19: di unione di insiemi

L'*unione* di due insiemi $A, B \subseteq U$ è l'insieme definito da:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo o al secondo insieme, intendendo la "o" in modo non esclusivo (l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B o a entrambi).

Definizione 1.20: di differenza di insiemi

La **differenza** di due insiemi $A, B \subseteq U$ è l'insieme definito da:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo ma non al secondo insieme. Il simbolo “ $\setminus$ ” si può anche scrivere “-” per analogia con la differenza aritmetica.

Esempio 1.17: intersezione, unione e differenza

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, abbiamo

$$A \cap B = \{3, 4\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \quad B \setminus A = \{5\}.$$

In particolare $A \setminus B \neq B \setminus A$: nella differenza conta l'ordine dei due insiemi.

1.4.1 Insiemi complementari e insiemi disgiunti**Esempio 1.18: insiemi universo**

Ad esempio, in questioni di aritmetica potrebbe essere $U = \mathbb{N}$; se consideriamo insiemi formati soltanto da numeri interi è naturale scegliere $U = \mathbb{Z}$, mentre in questioni di analisi potrebbe essere $U = \mathbb{R}$.

Definizione 1.21: di complementazione insiemi e insiemi complementari

La **complementazione** di un insieme $A \subseteq U$ è l'insieme definito da:

$$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$$

Tale insieme si chiama **insieme complementare** di A rispetto a U .

- Per la definizione di differenza, $U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$, quindi il complementare di A è la differenza tra l'universo e A :

$$\bar{A} = U \setminus A.$$

Proposizione 1.22: proprietà del complementare

Per ogni insieme $A \subseteq U$, dove U è l'insieme universo, abbiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}} &= A \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ A \cup \overline{A} &= U \\ \overline{\overline{U}} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= U\end{aligned}$$

Dimostrazione. Tutti gli insiemi che compaiono sono sottoinsiemi di U : basta quindi considerare gli elementi $x \in U$. Dimostriamo le cinque relazioni.

- Sia $x \in U$. Abbiamo $x \in \overline{\overline{A}}$ se e solo se $x \notin \overline{A}$, cioè se e solo se non è vero che $x \notin A$, cioè se e solo se $x \in A$. Quindi $\overline{\overline{A}} = A$.
- Se esistesse $x \in A \cap \overline{A}$, avremmo $x \in A$ e $x \in \overline{A}$, cioè $x \notin A$: è impossibile. Quindi $A \cap \overline{A}$ non ha elementi, cioè $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- Per la definizione di unione, $A \cup \overline{A}$ è formato da elementi di U , quindi $A \cup \overline{A} \subseteq U$. Viceversa, sia $x \in U$: se $x \in A$, allora $x \in A \cup \overline{A}$; se $x \notin A$, allora $x \in \overline{A}$ e quindi $x \in A \cup \overline{A}$. Quindi $U \subseteq A \cup \overline{A}$ e, per la doppia inclusione, $A \cup \overline{A} = U$.
- $\overline{\overline{U}} = \{x \in U : x \notin U\}$ non ha elementi, perché nessun elemento di U può non appartenere a U . Quindi $\overline{\overline{U}} = \emptyset$.
- $\overline{\emptyset} = \{x \in U : x \notin \emptyset\}$, e ogni $x \in U$ soddisfa $x \notin \emptyset$. Quindi $\overline{\emptyset} = U$.

□

Proposizione 1.23: leggi di identità

Per ogni insieme $A \subseteq U$, dove U è l'insieme universo, abbiamo:

$$\begin{aligned}A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cap U &= A \\ A \cup \emptyset &= A \\ A \cup U &= U\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo le quattro relazioni.

- Nessun x può appartenere sia ad A sia a $\emptyset$, perché $\emptyset$ non ha elementi. Quindi $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Se $x \in A \cap U$, allora $x \in A$. Viceversa, se $x \in A$, allora $x \in U$ perché $A \subseteq U$, e quindi $x \in A \cap U$. Per la doppia inclusione $A \cap U = A$.

- Abbiamo $x \in A \cup \emptyset$ se e solo se $x \in A$ oppure $x \in \emptyset$. La seconda possibilità non si verifica mai, quindi $x \in A \cup \emptyset$ se e solo se $x \in A$, cioè $A \cup \emptyset = A$.
- Per la definizione di unione, $A \cup U$ è formato da elementi di U , quindi $A \cup U \subseteq U$. Viceversa, se $x \in U$, allora $x \in A \cup U$. Per la doppia inclusione $A \cup U = U$.

□

Definizione 1.24: di insiemi disgiunti

Due insiemi A e B sono **disgiunti** se non hanno elementi in comune:

$$A \cap B = \emptyset$$

Esempio 1.19: insiemi disgiunti

Gli insiemi $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ sono disgiunti, mentre $\{1, 2\}$ e $\{2, 3\}$ non lo sono, perché $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$. Per la proprietà del complementare, ogni insieme $A \subseteq U$ e il suo complementare $\bar{A}$ sono disgiunti.

Gli insiemi disgiunti permettono di “spezzare” un insieme in pezzi che non si sovrappongono. Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi, l'**unione della famiglia** è l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi della famiglia; si indica con

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Per una famiglia formata da due insiemi B e C si ritrova l'unione $B \cup C$.

Definizione 1.25: di partizione

Dato un insieme A , una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di A è una **partizione** di A se:

- ogni insieme della famiglia è non vuoto: $B \neq \emptyset$ per ogni $B \in \mathcal{F}$;
- gli insiemi della famiglia sono a due a due disgiunti: se $B, C \in \mathcal{F}$ e $B \neq C$, allora $B \cap C = \emptyset$;
- la loro unione è A :

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B,$$

cioè ogni elemento di A appartiene ad almeno un insieme della famiglia.

Gli insiemi della famiglia $\mathcal{F}$ si chiamano **blocchi** della partizione.

Osservazione 1.26

Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi non vuoti di un insieme A è una partizione di A se e solo se ogni elemento di A appartiene a **esattamente un** insieme della famiglia.

Dimostrazione. ($\implies$) Sia $\mathcal{F}$ una partizione di A e sia $x \in A$. Poiché l'unione della famiglia è A , l'elemento x appartiene ad almeno un insieme della famiglia. Se appartenesse a due insiemi diversi $B, C \in \mathcal{F}$, avremmo $x \in B \cap C$, contro il fatto che $B \cap C = \emptyset$. Quindi x appartiene a esattamente un insieme della famiglia.

($\impliedby$) Supponiamo che ogni elemento di A appartenga a esattamente un insieme della famiglia. Gli insiemi della famiglia sono non vuoti per ipotesi. Ogni elemento di A appartiene ad almeno un insieme della famiglia, quindi $A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$; viceversa, ogni elemento dell'unione appartiene a un sottoinsieme di A e quindi ad A : per la doppia inclusione l'unione è A . Infine, se due insiemi diversi $B, C \in \mathcal{F}$ avessero un elemento comune x , questo elemento di A apparterebbe a due insiemi della famiglia, contro l'ipotesi: quindi $B \cap C = \emptyset$. $\square$

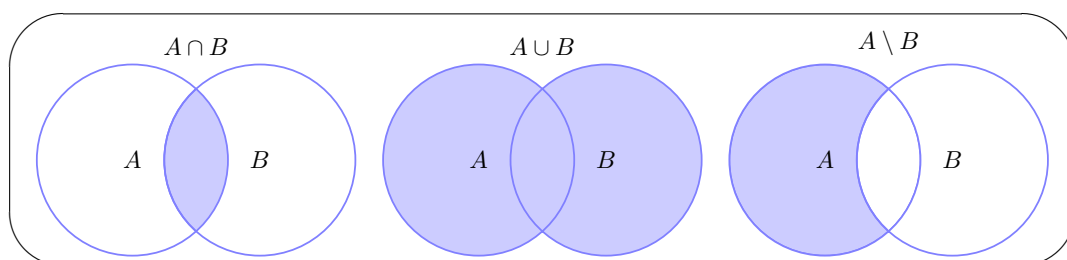
Esempio 1.20: partizioni

- La famiglia $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$ è una partizione di $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: i tre insiemi sono non vuoti e ogni elemento di A appartiene a esattamente uno di essi.
- La famiglia $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ non è una partizione di $\{1, 2, 3\}$: l'elemento 2 appartiene a due insiemi della famiglia.
- La famiglia $\{\{1\}, \{2\}\}$ non è una partizione di $\{1, 2, 3\}$: l'elemento 3 non appartiene ad alcun insieme della famiglia.
- Con universo $\mathbb{Z}$, l'insieme E dei numeri pari e il suo complementare $\overline{E}$, cioè l'insieme dei numeri dispari, formano una partizione di $\mathbb{Z}$: i due insiemi sono non vuoti ($0 \in E$ e $1 \in \overline{E}$) e, per la proprietà del complementare, $E \cap \overline{E} = \emptyset$ ed $E \cup \overline{E} = \mathbb{Z}$.

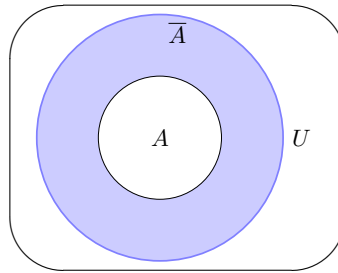
1.4.2 Diagrammi di Venn

I diagrammi di Venn sono rappresentazioni grafiche in cui gli insiemi sono rappresentati come regioni del piano

- Diagrammi di Venn di intersezione, unione e differenza:



- Diagrammi di Venn di complementare di un insieme:



1.4.3 Proprietà delle operazioni su insiemi

Osservazione 1.27: proprietà dell'intersezione

Dati tre insiemi A, B e C , l'intersezione gode delle seguenti proprietà:

- **Commutativa:**

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Associativa:**

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

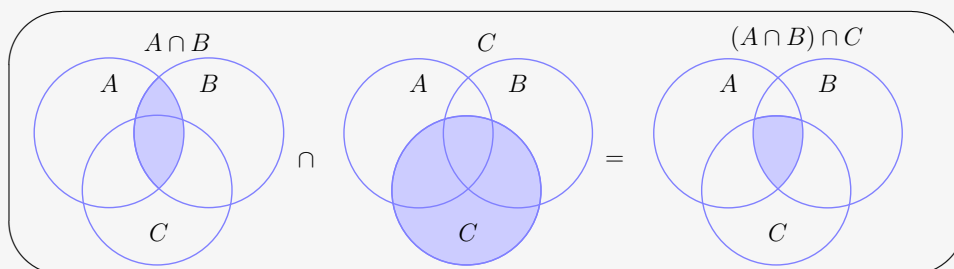
- **Idempotenza:**

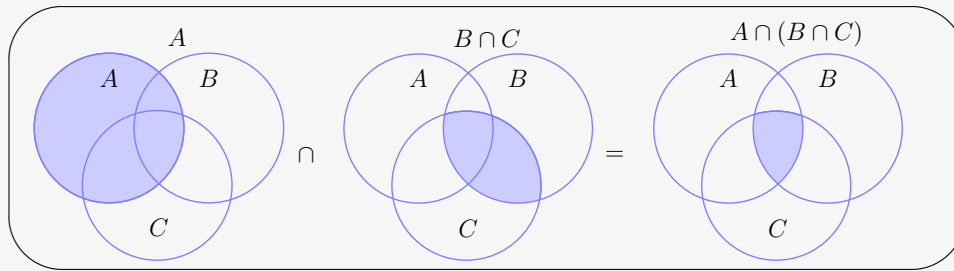
$$A \cap A = A$$

Dimostrazione. Dimostriamo le tre proprietà confrontando gli elementi dei due membri.

- **Commutativa:** $x \in A \cap B$ se e solo se $x \in A$ e $x \in B$, cioè se e solo se $x \in B$ e $x \in A$, cioè se e solo se $x \in B \cap A$. Quindi $A \cap B = B \cap A$.
- **Associativa:** $x \in A \cap (B \cap C)$ se e solo se $x \in A$ e $x \in B \cap C$, cioè se e solo se x appartiene a tutti e tre gli insiemi A, B e C , cioè se e solo se $x \in A \cap B$ e $x \in C$, cioè se e solo se $x \in (A \cap B) \cap C$.
- **Idempotenza:** $x \in A \cap A$ se e solo se $x \in A$ e $x \in A$, cioè se e solo se $x \in A$. Quindi $A \cap A = A$.

La dimostrazione grafica della proprietà associativa dell'intersezione è la seguente: nella prima riga si costruisce $(A \cap B) \cap C$, nella seconda $A \cap (B \cap C)$, e i due insiemi ottenuti a destra coincidono.





□

Osservazione 1.28: proprietà dell'unione

Dati tre insiemi A , B e C , l'unione gode delle seguenti proprietà:

- **Commutativa:**

$$A \cup B = B \cup A$$

- **Associativa:**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

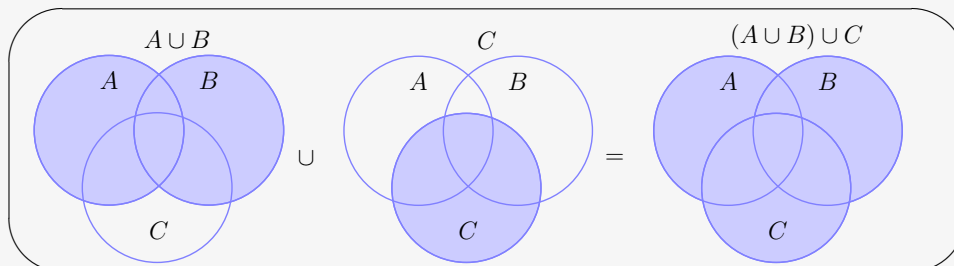
- **Idempotenza:**

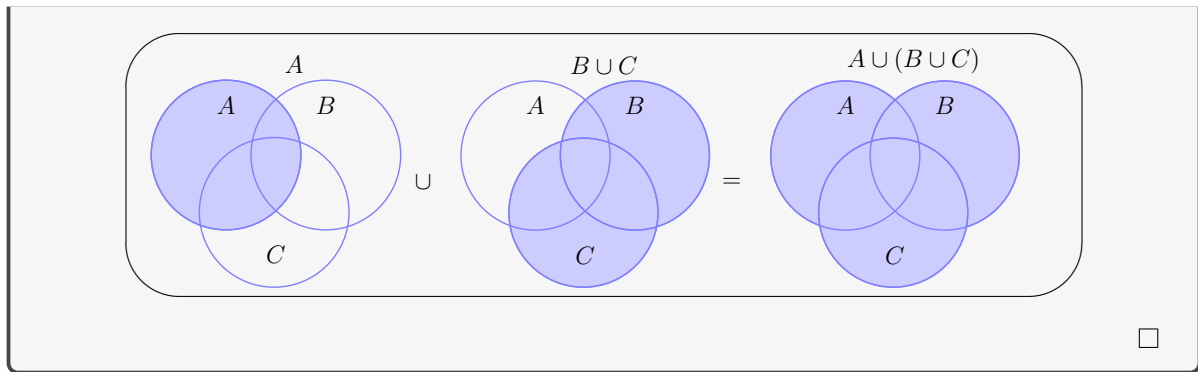
$$A \cup A = A$$

Dimostrazione. Dimostriamo le tre proprietà confrontando gli elementi dei due membri.

- **Commutativa:** $x \in A \cup B$ se e solo se $x \in A$ o $x \in B$, cioè se e solo se $x \in B$ o $x \in A$, cioè se e solo se $x \in B \cup A$. Quindi $A \cup B = B \cup A$.
- **Associativa:** $x \in A \cup (B \cup C)$ se e solo se $x \in A$ o $x \in B \cup C$, cioè se e solo se x appartiene ad almeno uno dei tre insiemi A , B e C , cioè se e solo se $x \in A \cup B$ o $x \in C$, cioè se e solo se $x \in (A \cup B) \cup C$.
- **Idempotenza:** $x \in A \cup A$ se e solo se $x \in A$ o $x \in A$, cioè se e solo se $x \in A$. Quindi $A \cup A = A$.

La dimostrazione grafica della proprietà associativa dell'unione è la seguente: nella prima riga si costruisce $(A \cup B) \cup C$, nella seconda $A \cup (B \cup C)$, e i due insiemi ottenuti a destra coincidono.




Osservazione 1.29: proprietà distributive (legano unione e intersezione)

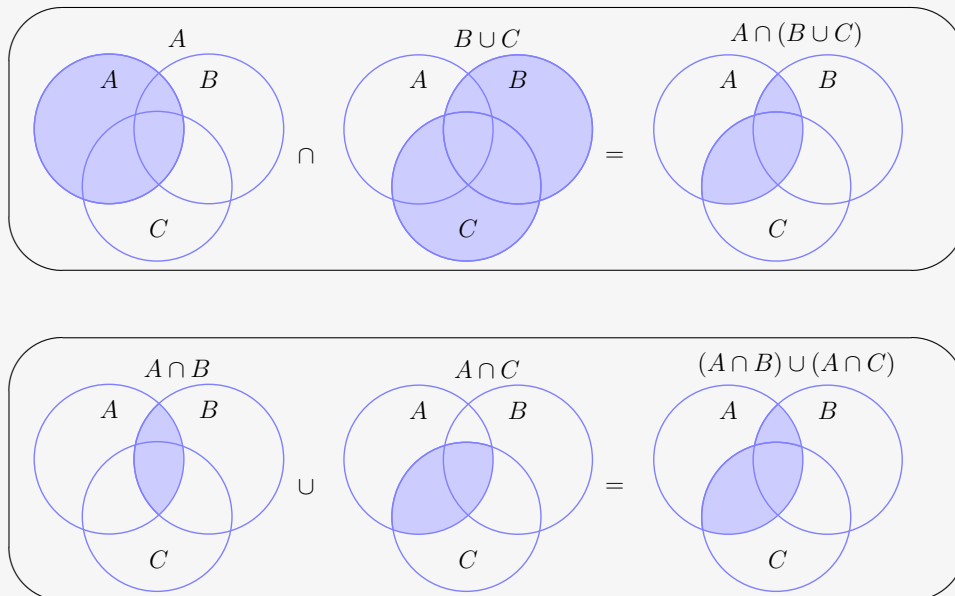
Dati tre insiemi A, B e C abbiamo:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

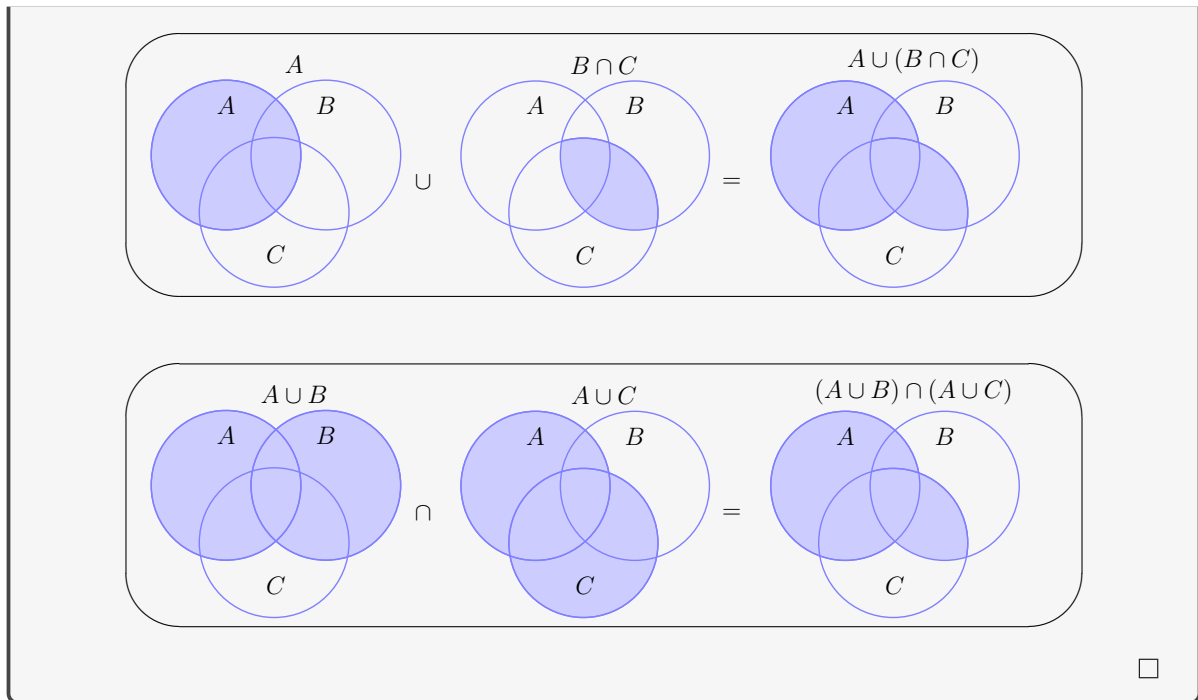
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Le proprietà distributive legano fra loro unione e intersezione.

Dimostrazione. La dimostrazione grafica della prima proprietà è la seguente: nella prima riga si costruisce il primo membro $A \cap (B \cup C)$, nella seconda il secondo membro $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, e i due insiemi ottenuti a destra coincidono.



La dimostrazione grafica della seconda proprietà è la seguente: nella prima riga si costruisce il primo membro $A \cup (B \cap C)$, nella seconda il secondo membro $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.



Proposizione 1.30: leggi di assorbimento

Dati due insiemi A e B abbiamo:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Dimostrazione. Dimostriamo le due leggi con la doppia inclusione.

- Se $x \in A \cap (A \cup B)$, allora $x \in A$. Viceversa, se $x \in A$, allora $x \in A \cup B$, e quindi $x \in A \cap (A \cup B)$. Quindi $A \cap (A \cup B) = A$.
- Se $x \in A$, allora $x \in A \cup (A \cap B)$. Viceversa, se $x \in A \cup (A \cap B)$, allora $x \in A$ oppure $x \in A \cap B$; nel secondo caso, di nuovo, $x \in A$. Quindi $A \cup (A \cap B) = A$.

□

Proposizione 1.31: inclusione, unione e intersezione

Dati due insiemi A e B , le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$A \subseteq B, \quad A \cap B = A, \quad A \cup B = B.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $A \subseteq B$ equivale a ciascuna delle altre due affermazioni.

- $(A \subseteq B \implies A \cap B = A)$ Ogni elemento di $A \cap B$ appartiene ad A . Viceversa, se $x \in A$, allora $x \in B$ perché $A \subseteq B$, e quindi $x \in A \cap B$. Per la doppia inclusione

$$A \cap B = A.$$

- $(A \cap B = A \implies A \subseteq B)$ Se $x \in A$, allora $x \in A \cap B$, perché $A \cap B = A$, e quindi $x \in B$.
- $(A \subseteq B \implies A \cup B = B)$ Ogni elemento di B appartiene ad $A \cup B$. Viceversa, se $x \in A \cup B$, allora $x \in A$ oppure $x \in B$; nel primo caso $x \in B$ perché $A \subseteq B$. In ogni caso $x \in B$, e per la doppia inclusione $A \cup B = B$.
- $(A \cup B = B \implies A \subseteq B)$ Se $x \in A$, allora $x \in A \cup B$, e quindi $x \in B$ perché $A \cup B = B$.

□

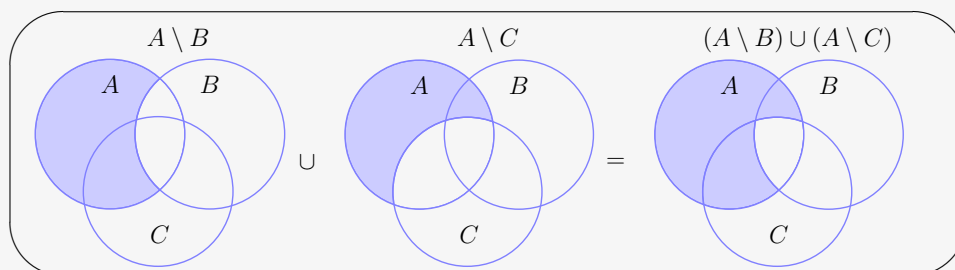
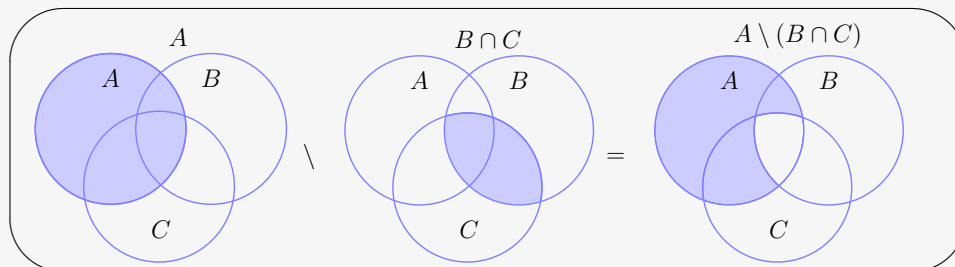
Proposizione 1.32: leggi di De Morgan (prima versione)

Dati tre insiemi A, B e C abbiamo:

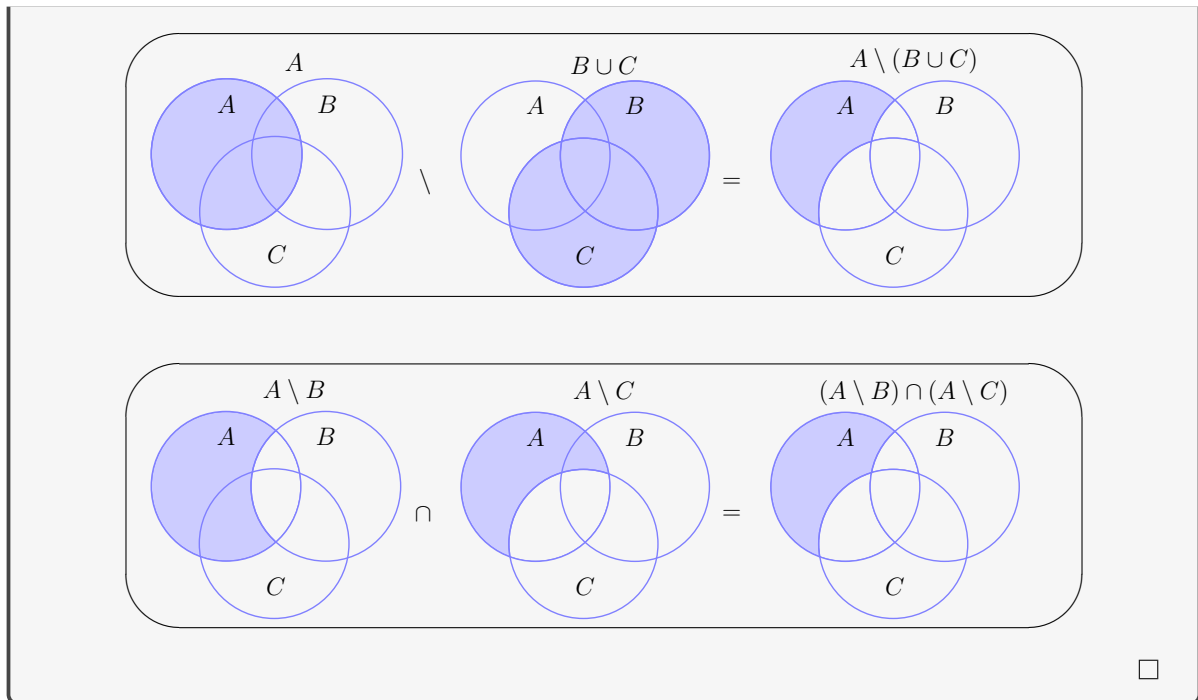
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Dimostrazione. La dimostrazione grafica della prima proprietà è la seguente: nella prima riga si costruisce il primo membro $A \setminus (B \cap C)$, nella seconda il secondo membro $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, e i due insiemi ottenuti a destra coincidono.



La dimostrazione grafica della seconda proprietà è la seguente: nella prima riga si costruisce il primo membro $A \setminus (B \cup C)$, nella seconda il secondo membro $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.



Proposizione 1.33: leggi di De Morgan (seconda versione)

Dati gli insiemi $B, C \subseteq U$, abbiamo

$$\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$$

$$\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$$

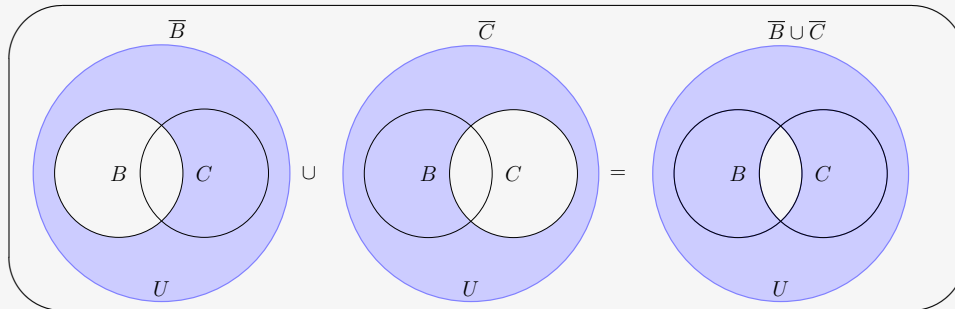
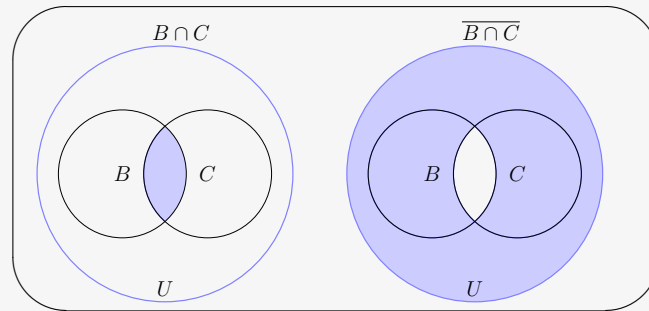
Dimostrazione. Queste leggi si possono derivare ponendo A uguale a U nelle precedenti leggi di De Morgan e ricordando che $\overline{B} = U \setminus B$ e $\overline{C} = U \setminus C$, come segue:

$$\underbrace{U \setminus (B \cap C)}_{=\overline{B \cap C}} = \underbrace{(U \setminus B)}_{=\overline{B}} \cup \underbrace{(U \setminus C)}_{=\overline{C}}$$

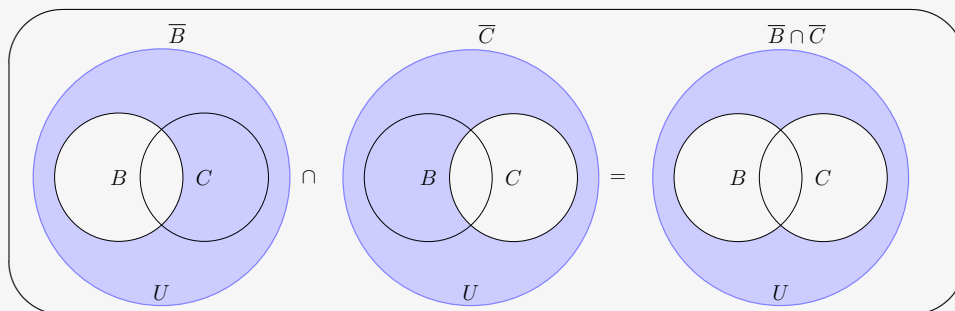
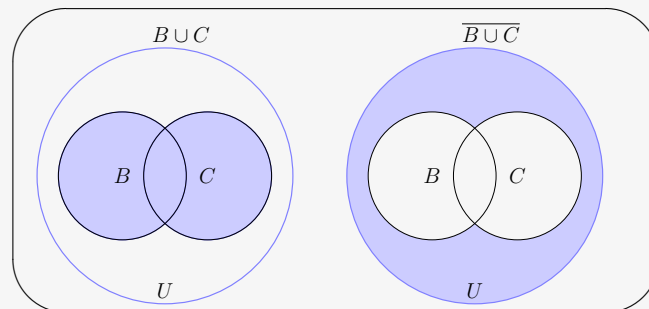
$$\underbrace{U \setminus (B \cup C)}_{=\overline{B \cup C}} = \underbrace{(U \setminus B)}_{=\overline{B}} \cap \underbrace{(U \setminus C)}_{=\overline{C}}$$

$\square$

Dimostrazione. La dimostrazione grafica della prima proprietà è la seguente: nella prima riga si costruisce il primo membro $\overline{B \cap C}$ a partire da $B \cap C$, nella seconda il secondo membro $\overline{B} \cup \overline{C}$, e i due insiemi ottenuti a destra coincidono.



La dimostrazione grafica della seconda proprietà è la seguente: nella prima riga si costruisce il primo membro $\overline{B \cup C}$ a partire da $B \cup C$, nella seconda il secondo membro $\overline{B \cap C}$.



□

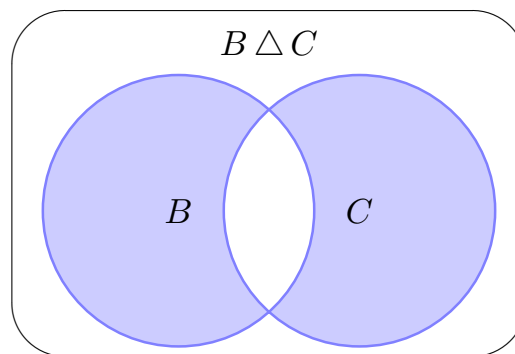
- L'insieme degli elementi che appartengono a un insieme B o a un insieme C ma non a tutti e due (intendendo la "o" in modo esclusivo) si chiama **differenza simmetrica** di B e C e si indica con $B \triangle C$:

$$B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

Si ottiene anche ponendo $U = B \cup C$ e facendo il complementare dell'intersezione rispetto a questo universo:

$$B \triangle C = (B \cup C) \setminus (B \cap C).$$

Dimostrazione. Dimostriamo che le due espressioni della differenza simmetrica coincidono. Abbiamo $x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ se e solo se $(x \in B \text{ e } x \notin C)$ oppure $(x \in C \text{ e } x \notin B)$, cioè se e solo se x appartiene a uno solo dei due insiemi B e C . D'altra parte $x \in (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ se e solo se x appartiene ad almeno uno dei due insiemi ma non a entrambi, cioè di nuovo se e solo se x appartiene a uno solo dei due insiemi. Quindi i due insiemi hanno gli stessi elementi. $\square$



1.4.4 Proprietà delle cardinalità degli insiemi

Proposizione 1.34: cardinalità dell'unione di insiemi disgiunti

Se A e B sono due insiemi finiti disgiunti, cioè $|A \cap B| = 0$, allora

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Più in generale, se $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono insiemi finiti a due a due disgiunti, allora

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|.$$

Dimostrazione. Ogni elemento di $A \cup B$ appartiene ad A oppure a B , e nessun elemento appartiene a entrambi, perché $A \cap B = \emptyset$. Contando prima gli $|A|$ elementi di A e poi i $|B|$ elementi di B contiamo quindi ogni elemento di $A \cup B$ esattamente una volta: $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Allo stesso modo, ogni elemento di $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ appartiene ad almeno uno degli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_m$ e, poiché gli insiemi sono a due a due disgiunti, a uno solo di essi. Contando uno dopo l'altro gli elementi di $A_1, A_2, \dots, A_m$ contiamo quindi ogni elemento dell'unione esattamente una volta. $\square$

Proposizione 1.35: cardinalità dell'unione

Per ogni due insiemi finiti A e B , abbiamo

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dimostrazione. Ogni elemento di $A \cup B$ appartiene a esattamente uno dei tre insiemi

$$A \setminus B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A :$$

se appartiene sia ad A sia a B sta in $A \cap B$, se appartiene solo ad A sta in $A \setminus B$, se appartiene solo a B sta in $B \setminus A$. I tre insiemi sono quindi a due a due disgiunti e la loro unione è $A \cup B$, e per la cardinalità dell'unione di insiemi disgiunti

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Allo stesso modo, ogni elemento di A appartiene a esattamente uno dei due insiemi disgiunti $A \setminus B$ e $A \cap B$, e ogni elemento di B appartiene a esattamente uno dei due insiemi disgiunti $B \setminus A$ e $A \cap B$, quindi

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|, \quad |B| = |B \setminus A| + |A \cap B|.$$

Sommando le ultime due uguaglianze otteniamo

$$|A| + |B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A \cup B| + |A \cap B|,$$

cioè $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. □

Proposizione 1.36: disuguaglianza per la cardinalità dell'unione

Per ogni due insiemi finiti A e B , abbiamo

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|.$$

Dimostrazione. Per la cardinalità dell'unione abbiamo $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Poiché $|A \cap B| \geq 0$, otteniamo

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \leq |A| + |B|.$$

□

Proposizione 1.37: cardinalità di un sottoinsieme

Dati due insiemi finiti A e B con $A \subseteq B$, abbiamo

$$|A| \leq |B|.$$

Se inoltre $A \subsetneq B$, allora $|A| < |B|$.

Dimostrazione. Poiché $A \subseteq B$, ogni elemento di B appartiene a esattamente uno dei due insiemi disgiunti A e $B \setminus A$, e ogni elemento di questi due insiemi appartiene a B : quindi $B = A \cup (B \setminus A)$ e, per la cardinalità dell'unione di insiemi disgiunti,

$$|B| = |A| + |B \setminus A| \geq |A|.$$

Se inoltre $A \subsetneq B$, allora $A \neq B$ e quindi, per la proprietà antisimmetrica dell'inclusione, non può essere $B \subseteq A$: esiste un elemento $b \in B$ con $b \notin A$, cioè $b \in B \setminus A$. Allora $|B \setminus A| \geq 1$ e

$$|B| = |A| + |B \setminus A| \geq |A| + 1 > |A|.$$

□

1.4.5 Coppie ordinate e prodotto cartesiano

Esiste un'altra operazione sugli insiemi, che può essere eseguita su due insiemi qualsiasi (cioè due insiemi non necessariamente contenuti nel medesimo universo). Per introdurla serve il concetto di *coppia ordinata*: a differenza dell'insieme $\{a, b\}$, in cui l'ordine degli elementi è irrilevante, in una coppia ordinata conta quale elemento viene prima.

Definizione 1.38: di coppia ordinata

Dati due elementi a e b , la **coppia ordinata** (a, b) è l'insieme

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

L'elemento a si chiama **prima componente** e l'elemento b **seconda componente** della coppia.

Questa definizione, dovuta a Kuratowski, esprime la coppia ordinata usando soltanto insiemi. Ciò che conta della coppia ordinata è la proprietà seguente.

Proposizione 1.39: proprietà caratteristica delle coppie ordinate

Dati gli elementi a, b, c e d , abbiamo

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d.$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Se $a = c$ e $b = d$, gli insiemi $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ e $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ sono scritti con gli stessi elementi, quindi sono uguali.

($\Rightarrow$) Supponiamo $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ e distinguiamo due casi.

- Se $a = b$, allora $\{a, b\} = \{a\}$ e la coppia $(a, b) = \{\{a\}\}$ ha un solo elemento. Quindi anche $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ ha come unico elemento $\{a\}$: da $\{c\} = \{a\}$ segue $c = a$, e da $\{c, d\} = \{a\}$ segue $d = a$. Quindi $a = c$ e $b = a = d$.
- Se $a \neq b$, la coppia (a, b) ha due elementi distinti: $\{a\}$, che ha un elemento, e $\{a, b\}$, che ne ha due. Allora anche $c \neq d$, altrimenti (c, d) avrebbe un solo elemento.

Poiché $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ e $\{a\}$ ha un solo elemento, mentre $\{c, d\}$ ne ha due, deve essere $\{a\} = \{c\}$, cioè $a = c$. Analogamente $\{a, b\}$, che ha due elementi, non può essere uguale a $\{c\}$, quindi $\{a, b\} = \{c, d\} = \{a, d\}$. Poiché $b \in \{a, d\}$ e $b \neq a$, otteniamo $b = d$.

□

- In particolare, se $a \neq b$ allora $(a, b) \neq (b, a)$: se fosse $(a, b) = (b, a)$, la proprietà caratteristica darebbe $a = b$. Invece gli insiemi $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ sono sempre uguali. Se $a = b$, le due coppie (a, b) e (b, a) sono la stessa coppia.

Definizione 1.40: di prodotto cartesiano

Dati due insiemi (non necessariamente distinti) A e B , l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate (a, b) , con $a \in A$ e $b \in B$, si chiama **prodotto cartesiano** di A per B e si indica col simbolo $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Proposizione 1.41: cardinalità del prodotto cartesiano

Quando A e B sono due insiemi finiti, la cardinalità del loro prodotto cartesiano è:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Dimostrazione. Se $A = \emptyset$ non esiste alcuna coppia con prima componente in A , quindi $A \times B = \emptyset$ e $|A \times B| = 0 = 0 \cdot |B|$. Altrimenti siano $a_1, a_2, \dots, a_m$ gli elementi di A , con $m = |A|$, e per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ consideriamo l'insieme delle coppie con prima componente a_i :

$$R_i = \{(a_i, b) : b \in B\}.$$

- Ogni coppia di $A \times B$ appartiene a esattamente uno degli insiemi $R_1, R_2, \dots, R_m$, quello corrispondente alla sua prima componente: per la proprietà caratteristica, coppie con prime componenti diverse sono diverse. Quindi gli insiemi $R_1, R_2, \dots, R_m$ sono a due a due disgiunti e la loro unione è $A \times B$.
- Ogni insieme R_i ha $|B|$ elementi: per la proprietà caratteristica, $(a_i, b) = (a_i, b')$ se e solo se $b = b'$, quindi elementi diversi di B danno coppie diverse.

Per la cardinalità dell'unione di insiemi disgiunti

$$|A \times B| = |R_1| + |R_2| + \dots + |R_m| = \underbrace{|B| + |B| + \dots + |B|}_{m \text{ volte}} = |A| \cdot |B|.$$

□

Esempio 1.21: prodotto cartesiano

$$\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$$

$$|\{a, b\}| = 2, \quad |\{a, b, c\}| = 3, \quad |\{a, b\} \times \{a, b, c\}| = 2 \cdot 3 = 6$$

Il prodotto cartesiano non è commutativo: la coppia (c, a) appartiene a $\{a, b, c\} \times \{a, b\}$, ma non appartiene a $\{a, b\} \times \{a, b, c\}$, perché $c \notin \{a, b\}$. Quindi $\{a, b, c\} \times \{a, b\} \neq \{a, b\} \times \{a, b, c\}$.

Il prodotto cartesiano si estende a più di due insiemi.

Definizione 1.42: di n -upla ordinata e di prodotto cartesiano di n insiemi

Dati $n \geq 3$ elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$, la **n -upla ordinata** $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è la coppia ordinata

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Dati $n \geq 2$ insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle n -uple

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i \text{ per ogni } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

- Applicando ripetutamente la proprietà caratteristica delle coppie ordinate si ottiene

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff a_i = b_i \text{ per ogni } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Proposizione 1.43: cardinalità del prodotto cartesiano di n insiemi

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono insiemi finiti, allora

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Dimostrazione. Per $n = 2$ è la cardinalità del prodotto cartesiano di due insiemi. Per $n \geq 3$, per la definizione di n -upla le n -uple $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sono esattamente le coppie $((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ con $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ e $a_n \in A_n$, cioè

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Per la cardinalità del prodotto cartesiano di due insiemi

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}| \cdot |A_n|.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento su $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$, poi su $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-2}$, e così via fino a $A_1 \times A_2$, otteniamo $|A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$. $\square$

- Il prodotto cartesiano di n insiemi uguali ad A si indica con

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}}$$

e, se A è finito, per la proposizione precedente ha cardinalità $|A^n| = |A|^n$. Ad esempio $\{0, 1\}^3$ ha $2^3 = 8$ elementi: le terne di 0 e 1 corrispondono alle scelte “dentro” o “fuori” dell’albero binario con cui abbiamo costruito l’insieme delle parti di un insieme con 3 elementi.

- Un tipico uso di prodotto cartesiano si ha con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che si abbrevia col simbolo $\mathbb{R}^2$, e denota l’insieme delle coppie ordinate di numeri reali.
- Analogamente, $\mathbb{R}^n$ (abbreviazione del prodotto cartesiano di n insiemi uguali a $\mathbb{R}$) è l’insieme delle n -uple ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\} \}$$

Esempio 1.22: sottoinsiemi del piano

Quando si studiano sottoinsiemi del piano si sceglie come universo $U = \mathbb{R}^2$. Ad esempio l’insieme dei punti del piano con entrambe le coordinate positive (il *primo quadrante*) è

$$Q_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0 \}.$$

Poiché $(x_1, x_2) \in Q_1$ se e solo se $x_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, abbiamo $Q_1 = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$.

1.5 Approfondimenti

1.5.1 Paradosso di Russell

“un insieme può essere o meno elemento di se stesso?”

- Ad esempio, l’insieme di tutti i libri di una biblioteca non è elemento di se stesso (un insieme di libri non è un libro). Invece, ragionando in modo ingenuo, la collezione di tutti gli insiemi con più di 20 elementi sembrerebbe elemento di se stessa, perché ha certamente più di 20 elementi. Vedremo alla fine di questa sezione che nella definizione formale degli insiemi questa collezione non è un insieme.
- Seguendo questo ragionamento si possono definire due categorie di insiemi:
 1. gli insiemi che non sono elementi di se stessi
 2. gli insiemi che sono elementi di se stessi

Se consideriamo l’insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi, esso è o no elemento di se stesso?

Chiamiamo questo insieme S , si possono fare due ipotesi:

- 1 Se supponiamo $S \in S$, allora S contiene se stesso come elemento e quindi non appartiene ad S (poiché per definizione un insieme appartiene ad S soltanto se non contiene se stesso come elemento). Quindi $S \notin S$, e abbiamo una contraddizione. Concludiamo che l'ipotesi debba essere errata.
- 2 Se supponiamo $S \notin S$, allora S non contiene se stesso come elemento e quindi appartiene a S (poiché per definizione un insieme appartiene ad S se non contiene se stesso come elemento). Quindi $S \in S$ e abbiamo un'altra contraddizione. Concludiamo che anche questa ipotesi debba essere errata!

Paradosso di Russell: L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

- La definizione formale del concetto di insieme si basa sul **sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel**, abbreviati con **ZF**. Questo sistema di assiomi comprende gli assiomi standard della teoria assiomatica degli insiemi su cui, insieme con l'*assioma di scelta*, si basa tutta la matematica ordinaria.
- L'**assioma della coppia** afferma che “Dati due oggetti, esiste un insieme i cui elementi sono i due oggetti”.
- L'**assioma di regolarità** afferma che “Ogni insieme non vuoto A contiene un elemento disgiunto da A ”.

Osservazione 1.44

Nessun insieme è un elemento di sé stesso.

Dimostrazione. Sia A un insieme. Per l'assioma della coppia, applicato ai due oggetti A e A , esiste l'insieme $\{A, A\}$, che coincide con $\{A\}$ dato che gli insiemi non contengono oggetti ripetuti: quindi $\{A\}$ è un insieme (è un caso speciale di coppia), ed è non vuoto.

Applichiamo ora l'assioma di regolarità all'insieme $\{A\}$: deve esistere un elemento di $\{A\}$ disgiunto da $\{A\}$. Dato che l'unico elemento di $\{A\}$ è A , allora A è disgiunto da $\{A\}$, cioè $A \cap \{A\} = \emptyset$.

Se fosse $A \in A$, poiché anche $A \in \{A\}$, avremmo $A \in A \cap \{A\}$, contro il fatto che $A \cap \{A\} = \emptyset$ (definizione di insiemi disgiunti). Quindi $A \notin A$. □

- In particolare la collezione di tutti gli insiemi con più di 20 elementi non è un insieme in ZF: se lo fosse, avrebbe più di 20 elementi e quindi sarebbe elemento di sé stessa, contro l'Osservazione appena dimostrata.
- Gli altri assiomi ZF non fanno parte del corso base di Analisi Matematica.

1.5.2 Un'ulteriore dimostrazione con la proprietà di Archimede

- Una ulteriore dimostrazione di

$$0,\overline{9} = 1$$

parte dall'assunzione che due numeri siano uguali se e solo se la loro differenza è uguale a zero e si basa sul calcolare quanto valga $1 - 0,\overline{9}$.

- Questa dimostrazione si basa sul fatto che 0 è l'unico numero non negativo minore di tutti gli inversi degli interi positivi, o equivalentemente che non esiste un numero maggiore di ogni numero naturale. Questa è la **proprietà di Archimede**, che si verifica per i numeri razionali e reali.

La **proprietà di Archimede** afferma che per ogni numero reale x esiste un numero naturale n tale che:

$$n > x$$

- In forma equivalente: per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale $n > 0$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (basta prendere n maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$). Di conseguenza l'unico numero non negativo minore o uguale a $\frac{1}{n}$ per ogni n è lo zero: è questa la forma in cui la proprietà interviene nella dimostrazione qui sotto.
- Non si tratta di un assioma in più: nel capitolo *Campi ordinati, estremo superiore/inferiore e assioma di continuità* la dimostreremo a partire dalla proprietà dell'estremo superiore dei numeri reali.

Dimostrazione. Scriviamo il numero $0,999\dots$ con n cifre dopo la virgola come $0,(9)_n$, quindi $0,(9)_1 = 0,9$, $0,(9)_2 = 0,99$, $0,(9)_3 = 0,999$, e così via.

Dato $\frac{1}{10^n} = 0,0\dots01$, con n cifre dopo la virgola, le regole di addizione per i numeri decimali implicano

$$0,(9)_n + \frac{1}{10^n} = 1 \quad \text{inoltre} \quad 0,(9)_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si deve dimostrare che 1 è il numero più piccolo che non sia inferiore a tutti gli $0,(9)_n$. Per questo basta provare che, se un numero x non è maggiore di 1 e non minore di tutti gli $0,(9)_n$, allora $x = 1$.

Quindi sia x tale che

$$0,(9)_n \leq x \leq 1$$

per ogni intero positivo n . Quindi

$$1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 - 0,(9)_n$$

che, usando l'aritmetica di base e la prima uguaglianza stabilita sopra, semplifica a

$$0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{10^n}$$

Ciò implica che la differenza tra 1 e x è minore dell'inverso di qualsiasi intero positivo. Quindi questa differenza deve essere zero, e quindi $x = 1$; che a sua volta implica

$$0,999\cdots = 1$$

□

Insiemi numerici e intervalli

2.1 I cinque principali insiemi numerici

2.1.1 I numeri naturali

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei **numeri naturali**, ossia i numeri che si usano per contare:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Ricordiamo la convenzione adottata in queste note: lo **zero è un numero naturale**, ovvero $0 \in \mathbb{N}$. Altri testi escludono lo zero da $\mathbb{N}$: è solo una convenzione, ma va dichiarata una volta per tutte.
- Indichiamo con $\mathbb{N}_{>0}$ l'insieme dei **numeri naturali positivi**:

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Nel capitolo *Insiemi* abbiamo già introdotto, per i numeri naturali:

- le definizioni di numero **pari** ($n = 2m$) e di numero **dispari** ($n = 2m + 1$), con $m \in \mathbb{N}$, e il fatto che ogni numero naturale è pari oppure dispari, ma mai entrambe le cose;
- l'**assioma del buon ordinamento**, secondo cui ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ possiede il minimo.

2.1.2 I numeri interi

$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei **numeri interi** (detti anche numeri relativi), ossia:

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

2.1.3 I numeri razionali

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei **numeri razionali**, ossia delle frazioni:

$$\frac{n}{m}, \quad \text{dove } n, m \in \mathbb{Z}, \text{ e } m \neq 0.$$

I numeri razionali possono essere scritti anche in forma decimale. Ad esempio:

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \text{mentre} \quad \frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\overline{3}.$$

Un numero razionale, scritto in forma decimale, ha un'**espansione decimale finita o infinita periodica**: dopo la virgola compare un numero finito di cifre, oppure un numero infinito di cifre che da un certo punto in poi si ripetono *periodicamente*.

Uno stesso numero razionale può avere due espansioni decimali diverse. L'esempio classico è l'uguaglianza

$$0,\overline{9} = 1$$

di cui abbiamo dato quattro dimostrazioni diverse nel capitolo *Insiemi*, e che quindi qui non ripetiamo.

2.1.4 I numeri reali

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei **numeri reali**, ossia quelli che si identificano con **espansioni decimali finite o infinite, periodiche o non periodiche**: dopo la virgola può comparire un allineamento qualsiasi di cifre, eventualmente anche *infinito e non periodico*.

Che esistano numeri di quest'ultimo tipo (ossia reali ma non razionali), si capisce riflettendo su esempi come:

$$0,10110111011110\dots$$

Il numero precedente dopo la virgola ha: una cifra uguale a 1, poi 0, poi due cifre uguali a 1, poi 0, poi tre cifre uguali a 1... e così via. È chiaro che questo criterio definisce con precisione un numero decimale. D'altro canto, l'allineamento delle cifre dopo la virgola non è né finito né periodico: questo numero perciò è irrazionale.

2.1.5 I numeri complessi

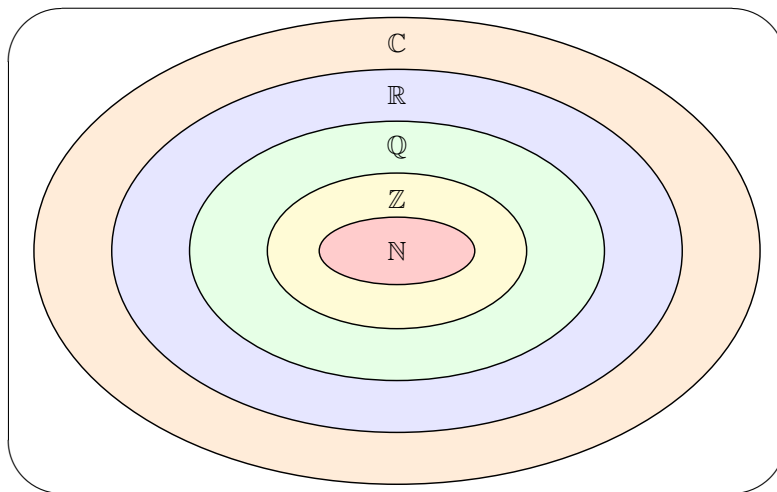
$\mathbb{C}$ è l'insieme dei **numeri complessi**, ossia del tipo $a + ib$, dove a, b sono numeri reali, e i è l'*unità immaginaria*, ossia un numero il cui quadrato è -1 .

Tra gli insiemi numerici introdotti, valgono le inclusioni:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Come indicato dai simboli, tutte le inclusioni sono strette:

- esistono numeri interi non naturali (i numeri negativi),
- esistono numeri razionali non interi (le frazioni proprie),
- esistono numeri reali non razionali (i numeri irrazionali),
- esistono numeri complessi non reali (i numeri immaginari).



Come per $\mathbb{N}_{>0}$, indichiamo con

$$\mathbb{Z}_{>0}, \quad \mathbb{Q}_{>0}, \quad \mathbb{R}_{>0}$$

gli insiemi dei numeri interi, razionali e reali **positivi**, e con

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gli insiemi dei numeri interi, razionali e reali **non negativi** (cioè positivi o nulli). Ad esempio:

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\} = \mathbb{N}$$

2.2 Intervalli

Definizione 2.1: di intervallo limitato

Dati due numeri reali a, b , si chiama **intervallo limitato** di estremi a e b uno dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, & (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \end{aligned}$$

- Come si può notare la parentesi quadra (tonda) in corrispondenza di uno dei due estremi indica che quest'ultimo è incluso (escluso) nell'intervallo.
- Gli intervalli $[a, b]$ si dicono **chiusi**; quelli (a, b) si dicono **aperti**.

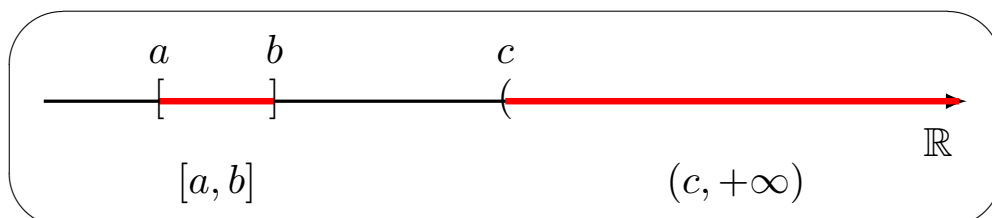
Definizione 2.2: di intervallo illimitato

Dato un numero reale a , si chiama **intervallo illimitato** (o **semiretta**) di estremo a uno dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, & (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, & (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \end{aligned}$$

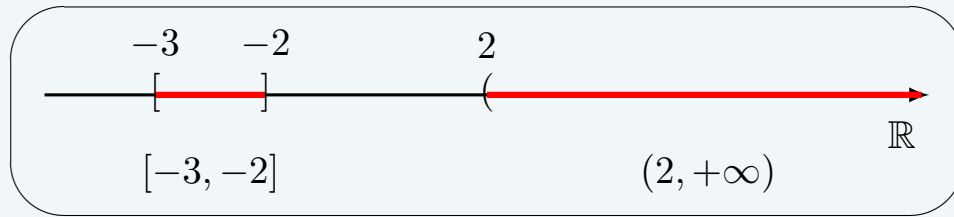
- I simboli $-\infty$ e $+\infty$ **non sono numeri reali**: non sono estremi che possano appartenere all'insieme, e perciò accanto a essi si scrive sempre la parentesi tonda.
- Anche l'intera retta è un intervallo illimitato:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



Esempio 2.1: di intervalli

La rappresentazione grafica dell'intervallo limitato chiuso $[-3, -2]$ e dell'intervallo illimitato aperto $(2, +\infty)$ è la seguente:



Il primo contiene i suoi due estremi, il secondo non contiene il suo estremo 2 e non è limitato superiormente.

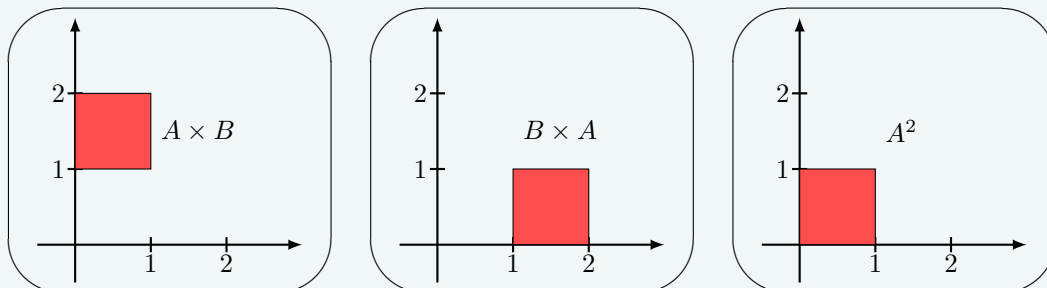
Si può dimostrare che gli intervalli, limitati o illimitati, sono tutti e soli i sottoinsiemi I di $\mathbb{R}$ che soddisfano la seguente proprietà (detta **connessione**):

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ tali che } x_1 < x_2 < x_3, \text{ se } x_1, x_3 \in I, \text{ allora } x_2 \in I$$

- Nel seguito ci capiterà di considerare il prodotto cartesiano di due (o più) intervalli, cui si può dare il significato geometrico di rettangolo (in due dimensioni) o parallelepipedo (in tre dimensioni).

Esempio 2.2: Prodotto cartesiano di intervalli

Sia $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$; la figura



illustra gli insiemi $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ indicato anche con A^2 . In generale, $A \times B$ è diverso da $B \times A$.

Campi ordinati, estremo superiore/inferiore e assioma di continuità

3.1 Proprietà R_1 e R_2

- Inizieremo ora a studiare più da vicino la **struttura degli insiemi numerici** che abbiamo introdotto in precedenza, ed in particolare: l'insieme $\mathbb{Q}$ dei **numeri razionali** e l'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali**.
- Indichiamo con a, b, c tre generici numeri **razionali** o **reali**.

$R_1 \rightarrow$ È definita in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ un'operazione (detta **addizione** o **somma**) che ha le seguenti quattro proprietà:

- 1 $\forall a, b, \quad a + b = b + a$ (**proprietà commutativa**)
- 2 $\forall a, b, c, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (**proprietà associativa**)
- 3 esiste un elemento **neutro della somma**, indicato con 0, tale che:

$$\forall a, \quad a + 0 = a$$

- 4 per ogni a esiste un elemento **inverso** di a **rispetto alla somma**, detto **opposto** di a e indicato con $-a$, tale che:

$$a + (-a) = 0$$

$R_2 \rightarrow$ È definita in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ un'operazione (detta **moltiplicazione** o **prodotto**) che ha le seguenti quattro proprietà:

- 1 $\forall a, b, \quad a \cdot b = b \cdot a$ (**proprietà commutativa**)
- 2 $\forall a, b, c, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (**proprietà associativa**)

3 esiste un elemento **neutro del prodotto**, indicato con 1, tale che:

$$\forall a, \quad a \cdot 1 = a$$

4 per ogni $a \neq 0$ esiste un elemento **inverso** di a **rispetto al prodotto**, detto **reciproco** di a e indicato con a^{-1} , tale che:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

- Le operazioni di somma e prodotto sono legate dalla seguente proprietà:

$$\forall a, b, c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{proprietà distributiva})$$

- Dalle proprietà R_1 e R_2 discende la **possibilità di eseguire senza restrizioni le quattro operazioni fondamentali**:

- addizione** e **moltiplicazione** (sopra definite)
- sottrazione**, ponendo:

$$a - b = a + (-b)$$

- divisione**, ponendo:

$$a/b = a \cdot b^{-1} \quad \text{purché sia } b \neq 0$$

3.2 Grandezze commensurabili

In matematica con la parola **grandezza** si intende una **proprietà** di una **figura geometrica** che può essere **misurata**. Sono esempi di grandezze: la lunghezza di un segmento, la misura di un angolo, l'area di una figura piana o il volume di un solido.

Definizione 3.1: di grandezze omogenee

Due grandezze sono **omogenee** se hanno la stessa dimensione, cioè se si possono esprimere mediante la stessa unità di misura.

- La lunghezza di un segmento e l'altezza di un solido sono due grandezze omogenee infatti entrambe si possono esprimere con una stessa unità di misura della lunghezza.
- L'area di un quadrato e il volume di un cono non sono grandezze omogenee, infatti l'area si esprime in metri quadrati o in altre misure di superficie che però non possono essere usate per esprimere il volume.

Definizione 3.2: di grandezze commensurabili e incommensurabili

Si dicono **commensurabili** due grandezze omogenee a e b il cui rapporto è un numero razionale, i.e., se $a/b \in \mathbb{Q}$. Si dicono invece **incommensurabili** se il loro rapporto non è un numero razionale, i.e., se $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Esempio 3.1: di grandezze commensurabili

Il volume di una sfera e il volume del cilindro circoscritto alla sfera sono commensurabili. In formule, il volume della sfera V_s in funzione del suo raggio r si ottiene con la formula:

$$V_s = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Il cilindro ad essa circoscritto ha il raggio del cerchio di base congruente al raggio r della sfera e l'altezza h congruente al doppio del raggio. Il volume V_c di questo cilindro si ottiene quindi con la formula:

$$V_c = \pi r^2 h = \pi r^2 2r = 2\pi r^3$$

Facendo il rapporto otteniamo:

$$\frac{V_s}{V_c} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2 \pi r^3} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$

Esempio 3.2: di grandezze incommensurabili

La lunghezza della circonferenza e la lunghezza del suo diametro sono incommensurabili. In formule, denotiamo con d il diametro della circonferenza e con c la lunghezza della circonferenza, abbiamo:

$$c = \pi d$$

Ora facendo il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro otteniamo:

$$\frac{c}{d} = \frac{\pi d}{d} = \pi \notin \mathbb{Q}$$

Una dimostrazione che $\pi \notin \mathbb{Q}$ verrà data in seguito.

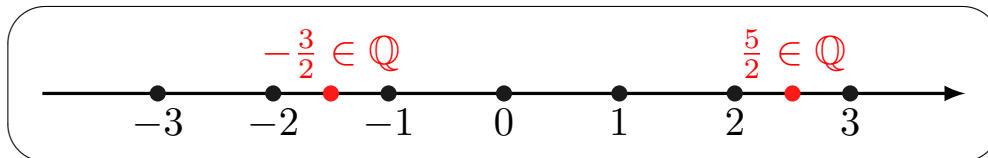
3.3 Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$

Una rappresentazione di tipo geometrico di $\mathbb{Q}$ si può ottenere associando a ogni numero razionale un punto della **retta euclidea** (immaginabile come una linea nel piano di lunghezza infinita)

- Ad un punto della retta euclidea, scelto arbitrariamente, si associa 0 e a un altro, distinto dal primo, si associa 1, individuando così il segmento orientato 01 che costituisce l'**unità di misura**

- A questo punto si ha una **corrispondenza biunivoca** tra i numeri razionali e quei punti P della retta che sono estremi dei segmenti orientati $0P$ **commensurabili** con 01 . Infatti, se al punto P è associato il numero razionale p (la sua **ascissa**), il segmento $0P$ misura p volte il segmento unitario 01 , e quindi il rapporto fra le due lunghezze è:

$$\frac{0P}{01} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Q}$$



3.4 Relazioni di ordine totale

Definizione 3.3: di relazione d'ordine totale

Una **relazione binaria** su un insieme A è un sottoinsieme R di $A \times A$; si scrive $a R b$ se $(a, b) \in R$. La relazione R è una **relazione d'ordine parziale** se è riflessiva ($a R a$ per ogni a), antisimmetrica ($a R b$ e $b R a$ implicano $a = b$) e transitiva ($a R b$ e $b R c$ implicano $a R c$). È una **relazione d'ordine totale** se, inoltre, per ogni $a, b \in A$ vale $a R b$ oppure $b R a$; la coppia (A, R) si chiama allora **insieme totalmente ordinato**.

Osservazione 3.4

Gli insiemi dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e dei numeri reali $\mathbb{R}$ con la relazione “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) sono insiemi totalmente ordinati.

- Le relazioni “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) per l'insieme dei numeri razionali o reali :

$$R_{\leq} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a \leq b \right\}, \quad R_{\leq} = \left\{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \leq b \right\}$$

sono **relazioni d'ordine parziale**. Ovvero verificano le seguenti proprietà:

$$\forall a, \quad a \leq a \quad (\text{proprietà riflessiva})$$

$$\forall a, b, \quad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \Rightarrow a = b \quad (\text{proprietà antisimmetrica})$$

$$\forall a, b, c, \quad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{proprietà transitiva})$$

Inoltre le relazioni “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) per $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono **relazioni totali** in quanto:

$$\forall a, b, \quad a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a$$

- Di conseguenza la coppia costituita dall'insieme $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ e dalla corrispondente relazione $R_{\leq}$ diventa un insieme totalmente ordinato.

Osservazione 3.5: proprietà di tricotomia

Per ogni coppia di numeri a, b (razionali o reali) vale **una e una sola** delle tre relazioni:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

- Non è una proprietà nuova: è una conseguenza del fatto che “ $\leq$ ” è una relazione d'ordine **totale**, come mostra la dimostrazione qui sotto. Per questo motivo non la contiamo fra gli assiomi R_1, R_2, R_3 ed R_4 .

Dimostrazione. Ricordiamo che $a < b$ significa $a \leq b$ e $a \neq b$.

Almeno una delle tre relazioni vale. Poiché la relazione è totale, abbiamo $a \leq b$ oppure $b \leq a$:

- se $a \leq b$ e $a \neq b$, allora $a < b$;
- se $b \leq a$ e $a \neq b$, allora $a > b$;
- se $a = b$ vale la seconda relazione.

Al più una delle tre relazioni vale. Le relazioni $a < b$ e $a = b$ non possono valere insieme, perché la prima richiede $a \neq b$; per lo stesso motivo non possono valere insieme $a > b$ e $a = b$. Infine, se valessero insieme $a < b$ e $a > b$, avremmo $a \leq b$ e $b \leq a$, e quindi $a = b$ per la proprietà antisimmetrica, contro $a \neq b$. $\square$

3.5 Proprietà R_3

- Mettiamo ora in evidenza le proprietà dell'ordinamento dei numeri razionali o reali:

$R_3 \rightarrow$ È definita in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ la relazione d'ordine totale “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) compatibile con la struttura algebrica ^a, cioè:

1. $\forall a, b, c, \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $\forall a, b \text{ e } \forall c > 0, \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

^auna struttura algebrica è un insieme, chiamato insieme sostegno (della struttura), munito di una o più operazioni

- Osserviamo che tutte le regole del calcolo algebrico derivano dalle proprietà: R_1, R_2, R_3 .

Esempio 3.3

Ad esempio tutte le usuali procedure con cui si risolvono le disequazioni sono conseguenza degli assiomi e delle proprietà algebriche della somma e del prodotto, espresse da R_1 e R_2 , e della **compatibilità della relazione d'ordine con queste operazioni**, espressa da R_3 . È infatti R_3 che permette di sommare lo stesso numero ai due membri di una disequazione e di moltiplicarli per uno stesso numero positivo senza cambiare il verso.

3.6 Campi ordinati**Definizione 3.6: di campo (ordinato)**

Un **campo** è un insieme in cui sono definite due operazioni (somma e prodotto) che soddisfano le proprietà R_1 ed R_2 e la **proprietà distributiva**.

Un **campo ordinato** è un campo in cui è definita anche una relazione d'ordine totale che soddisfa la proprietà R_3 .

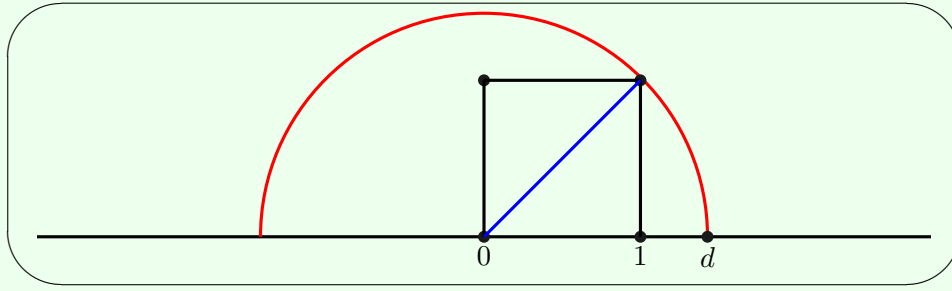
- La proprietà distributiva fa parte della definizione di campo: è l'unica proprietà che lega fra loro la somma e il prodotto, e senza di essa le due operazioni resterebbero indipendenti.
- Tutto ciò che abbiamo detto fin qui riguardo alle operazioni di somma e prodotto e alla relazione d'ordine totale “minore o uguale di” (“ $\leq$ ”) vale sia per l'insieme dei numeri razionali che per l'insieme dei numeri reali.

Osservazione 3.7

Gli insiemi dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e dei numeri reali $\mathbb{R}$ sono campi ordinati.

- Da questo punto di vista, quindi, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ appaiono dotati di proprietà simili. Evidenzieremo nel seguito qual è la **proprietà che distingue sostanzialmente $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$** e che rende $\mathbb{R}$ **l'ambiente giusto per sviluppare l'analisi matematica**.
- Iniziamo osservando che **l'insieme dei numeri razionali è inadeguato ad esprimere le lunghezze dei segmenti** (ma anche le aree, i volumi, i tempi, le velocità ecc.)

Come abbiamo visto esistono grandezze che non sono **commensurabili** tra loro. L'esempio classico è dato dalla diagonale e dal lato di un quadrato: se il lato misura 1, l'ascissa d che misura la diagonale non è un numero razionale.



Infatti, per il Teorema di Pitagora abbiamo:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

ma, come abbiamo visto, non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2. Dunque il punto d sulla retta non è il rappresentante di alcun numero razionale. Ciò significa che, dopo aver “occupato” i punti della retta con i numeri razionali, su di essa rimangono ancora dei **posti vuoti**.

3.7 Insiemi limitati, massimi e minimi

Definizione 3.8: di insieme limitato

Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$. L'insieme E si dice **limitato** se esistono due numeri m e M , tali che:

$$\forall x \in E, \quad m \leq x \leq M$$

- E è **limitato inferiormente** se esiste un numero m tale che:

$$\forall x \in E, \quad m \leq x$$

- E è **limitato superiormente** se esiste un numero M tale che:

$$\forall x \in E, \quad x \leq M$$

- Non fa differenza imporre che m e/o M appartengano a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$ in quanto la condizione è soltanto di esistenza di tali numeri. Non è però una conseguenza immediata della definizione, perché $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$: lo si ottiene dalla **proprietà di Archimede** (richiamata nel capitolo [Insiemi](#) e dimostrata più avanti in questo capitolo). Infatti, se $M \in \mathbb{R}$ verifica $x \leq M$ per ogni $x \in E$, esiste un numero naturale $n > M$, e quindi $x \leq M < n$ per ogni $x \in E$, con $n \in \mathbb{Q}$; allo stesso modo, se $m \in \mathbb{R}$ verifica $m \leq x$ per ogni $x \in E$, esiste un numero naturale $n > -m$, cioè $-n < m$, e quindi $-n < x$ per ogni $x \in E$, con $-n \in \mathbb{Q}$. Viceversa ogni numero razionale è anche reale, e quindi le due richieste individuano gli stessi insiemi limitati.

Definizione 3.9: di massimo e minimo di un insieme

Un elemento $x_M \in E$ si chiama **massimo** di E se:

$$\forall x \in E, \quad x \leq x_M$$

Un elemento $x_m \in E$ si chiama **minimo** di E se:

$$\forall x \in E, \quad x_m \leq x$$

- Si noti che il massimo e il minimo, per definizione, **appartengono** all'insieme E .

Osservazione 3.10

Se un insieme E possiede massimo, questo è **unico**; allo stesso modo, se possiede minimo, questo è unico. Si scrive allora $\max E$ e $\min E$.

Dimostrazione. Siano x_M e x'_M due massimi di E . Poiché x'_M appartiene a E e x_M è un massimo di E , abbiamo $x'_M \leq x_M$. Scambiando i ruoli, poiché x_M appartiene a E e x'_M è un massimo di E , abbiamo $x_M \leq x'_M$. Dalla proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine segue:

$$x'_M \leq x_M \quad \text{e} \quad x_M \leq x'_M \quad \implies \quad x_M = x'_M$$

La dimostrazione per il minimo è identica: se x_m e x'_m sono due minimi di E , allora $x_m \leq x'_m$ e $x'_m \leq x_m$, e quindi $x_m = x'_m$. $\square$

L'esistenza del massimo e del minimo per un insieme implica che l'insieme è limitato, ovvero:

$$\text{esistenza di massimo e minimo} \implies \text{insieme limitato} \quad (3.1)$$

ma il viceversa non è vero (daremo più avanti un controesempio):

$$\text{insieme limitato} \not\Rightarrow \text{esistenza di massimo e minimo} \quad (3.2)$$

Quindi il fatto che un insieme sia limitato è condizione necessaria ma non sufficiente al fatto che l'insieme ammetta massimo e minimo. Inoltre l'esistenza di massimo e minimo è condizione sufficiente ma non necessaria al fatto che un insieme sia limitato.

Dalla **contronominale** di (3.1) abbiamo:

$$\text{insieme non limitato} \implies \text{non esiste il massimo oppure non esiste il minimo}$$

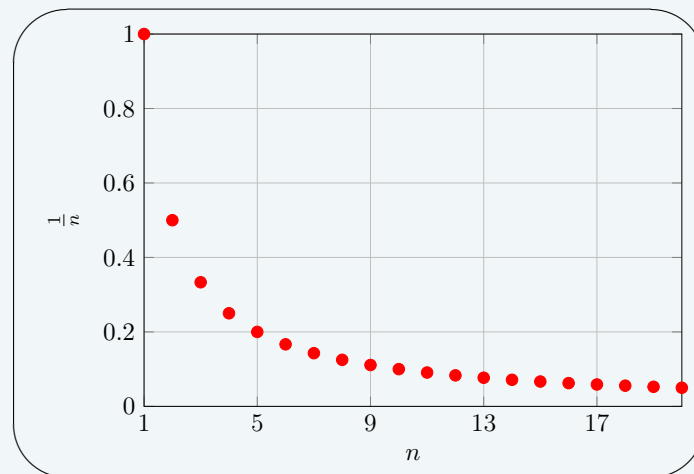
ovvero se un insieme non è limitato non ha massimo o non ha minimo (può averne uno dei due: $\mathbb{N}$ non è limitato e tuttavia ha minimo 0).

Esempio 3.4: di massimi e minimi

Esempio	insieme E	minimo	massimo
I)	$\mathbb{N}$	0	non esiste
II)	numeri interi pari	non esiste	non esiste

Esempio 3.5: di massimi e minimi

Esempio	insieme E	minimo	massimo
III)	$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$	non esiste	1

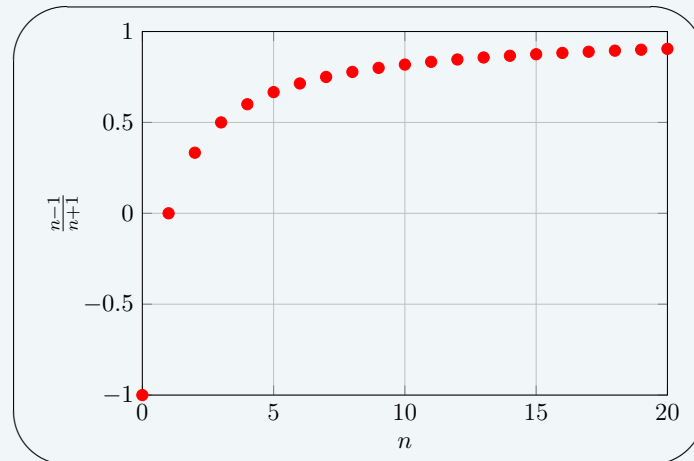


Esempio 3.6: di massimi e minimi

Esempio	insieme E	minimo	massimo
IV)	$\left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$	-1	non esiste

Abbiamo:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$



Si osservi che talvolta, pur essendo l'insieme limitato, esso può non possedere massimo o minimo.

Esempio 3.7: di massimi e minimi

Esempio	insieme E	minimo	massimo
V)	$\{x \in \mathbb{R} : 27 \leq x^3\}$	3	non esiste

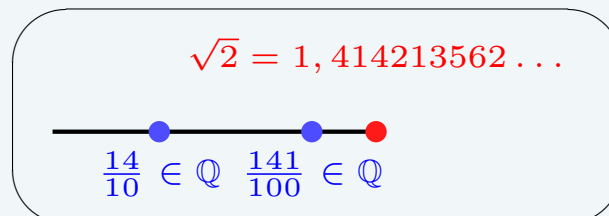
Abbiamo:

$$27 \leq x^3 \iff \sqrt[3]{27} = 3 \leq x \quad \text{e} \quad 3 \in E$$

Esempio 3.8: di massimi e minimi

Esempio	insieme E	minimo	massimo
VI)	$\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$	0	non esiste

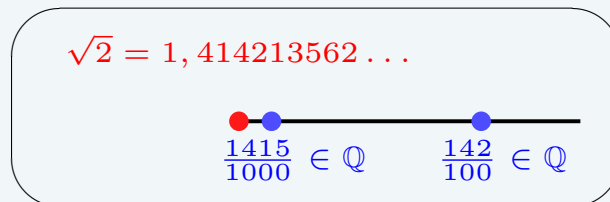
Il valore $\sqrt{2}$ è irrazionale quindi troncando otteniamo numeri razionali che si avvicinano sempre di più a $\sqrt{2}$ nessuno con la proprietà di essere massimo.



È un esempio di insieme limitato ma che non ammette massimo.

Esempio	insieme E	minimo	massimo
VII)	$\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}, x \leq 4\}$	non esiste	4

Il valore $\sqrt{2}$ è irrazionale quindi troncando e maggiorando otteniamo dei numeri razionali che si avvicinano sempre di più a $\sqrt{2}$ nessuno con la proprietà di essere minimo.



È un esempio di insieme limitato ma che non ammette minimo.

Esempio 3.9: di massimi e minimi di intervalli

Esempio	insieme E	minimo	massimo
VIII)	$[-2, 1]$	-2	1
IX)	$(-\infty, 3)$	non esiste	non esiste

- Nell'esempio VIII) l'intervallo contiene entrambi i suoi estremi: $-2 \in [-2, 1]$ e $-2 \leq x$ per ogni $x \in [-2, 1]$, quindi -2 è il minimo; $1 \in [-2, 1]$ e $x \leq 1$ per ogni $x \in [-2, 1]$, quindi 1 è il massimo.
- Nell'esempio IX) l'intervallo non è limitato inferiormente e quindi non ha minimo. Non ha nemmeno massimo: preso un qualunque $x \in (-\infty, 3)$, il numero

$$y = \frac{x+3}{2} \quad \text{verifica} \quad x < y < 3$$

infatti $y - x = \frac{3-x}{2} > 0$ e $y < 3 \Leftrightarrow x < 3$. Dunque $y \in (-\infty, 3)$ ed è strettamente maggiore di x : nessun elemento dell'insieme può essere il massimo.

Esempio 3.10: di massimo e minimo di un insieme definito da una disequazione

Esempio	insieme E	minimo	massimo
X)	$\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq 3x < 4\}$	$-\frac{5}{3}$	non esiste

Conviene prima **risolvere la disequazione**: dividendo per $3 > 0$, e usando la proprietà R_3 che conserva il verso, otteniamo

$$-5 \leq 3x < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{5}{3} \leq x < \frac{4}{3} \quad \text{cioè} \quad E = \left[-\frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

- $-\frac{5}{3} \in E$ ed è minore o uguale a ogni elemento di E : è quindi il minimo.
- Il massimo non esiste: come nell'esempio IX), preso $x \in E$, il numero $y = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{3})$ verifica $x < y < \frac{4}{3}$ ed è ancora un elemento di E strettamente maggiore di x .

3.8 Maggioranti/minoranti e estremi superiori/inferiori

Definizione 3.11: di maggioranti di un insieme

Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$, un numero k appartenente a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$ rispettivamente, si dice un **maggiorante** di E se:

$$\forall x \in E, \quad x \leq k$$

Definizione 3.12: di minorante di un insieme

Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$, un numero k appartenente a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$ rispettivamente, si dice un **minorante** di E se:

$$\forall x \in E, \quad k \leq x$$

Osserviamo che un insieme superiormente (inferiormente) limitato ha molti maggioranti (minoranti). Inoltre i maggioranti (minoranti) non appartengono necessariamente all'insieme stesso.

Osservazione 3.13

Se k è un maggiorante di E , allora ogni numero $h \geq k$ è ancora un maggiorante di E ; se k è un minorante di E , allora ogni numero $h \leq k$ è ancora un minorante di E . Quindi l'insieme dei maggioranti (minoranti) di E , se non è vuoto, è una **semiretta**.

Dimostrazione. Sia k un maggiorante di E e sia $h \geq k$. Per ogni $x \in E$ abbiamo $x \leq k$ per definizione di maggiorante, e quindi, per la proprietà transitiva,

$$x \leq k \leq h \quad \implies \quad x \leq h$$

cioè h è un maggiorante di E . L'insieme dei maggioranti contiene allora, insieme a ogni suo elemento k , tutti i numeri maggiori di k : è dunque una semiretta illimitata superiormente.

La dimostrazione per i minoranti è analoga: se k è un minorante di E e $h \leq k$, per ogni $x \in E$ si ha $h \leq k \leq x$ e quindi $h \leq x$. $\square$

Osservazione 3.14

Un maggiorante di E che **appartiene** a E è il massimo di E ; un minorante di E che appartiene a E è il minimo di E .

Dimostrazione. Sia k un maggiorante di E con $k \in E$. Per definizione di maggiorante vale $x \leq k$ per ogni $x \in E$: queste sono esattamente le due condizioni che definiscono il massimo di E (appartenere a E ed essere maggiore o uguale a tutti i suoi elementi), e quindi $k = \max E$.

Allo stesso modo, se k è un minorante di E e $k \in E$, allora $k \leq x$ per ogni $x \in E$ e $k \in E$, cioè $k = \min E$. $\square$

Definizione 3.15: di estremo superiore

L è l'**estremo superiore** di E (indicato con $\sup E$) è il minimo dei maggioranti di E .

Definizione 3.16: di estremo inferiore

L è l'**estremo inferiore** di E (indicato con $\inf E$) è il massimo dei minoranti di E .

Osserviamo che l'estremo superiore (inferiore) può non esistere (insiemi non limitati). Osserviamo inoltre che se l'insieme possiede massimo (minimo), questo coincide con l'estremo superiore (inferiore).

Per gli insiemi non limitati si adotta la seguente **convenzione**: se E non è limitato superiormente si scrive

$$\sup E = +\infty$$

e se E non è limitato inferiormente si scrive

$$\inf E = -\infty$$

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ **non sono numeri**: la scrittura è solo un modo compatto per dire che E non ha maggioranti (minoranti).

Esempio 3.11: di estremi superiori e inferiori di intervalli

Esempio	insieme E	$\inf E$	$\sup E$	minimo	massimo
VIII)	$[-2, 1]$	-2	1	-2	1
IX)	$(-\infty, 3)$	$-\infty$	3	non esiste	non esiste
X)	$\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq 3x < 4\}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	non esiste

- Negli esempi VIII) e X) il minimo esiste e quindi coincide con l'estremo inferiore; nell'esempio VIII) anche il massimo esiste e coincide con l'estremo superiore.

- Nell'esempio IX) l'insieme non è limitato inferiormente e quindi, per la convenzione appena introdotta, $\inf E = -\infty$. Il numero 3 è un maggiorante, perché $x < 3$ per ogni $x \in E$; nessun numero $k < 3$ è un maggiorante, perché il numero $y = \frac{k+3}{2}$ verifica $k < y < 3$ e quindi appartiene a E . Dunque 3 è il minimo dei maggioranti, cioè $\sup E = 3$ (e non è un massimo, perché $3 \notin E$).
- Nell'esempio X), con lo stesso ragionamento applicato a $E = [-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, si ottiene $\sup E = \frac{4}{3} \notin E$.
- Riprendendo infine l'esempio III), per $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ si ha $\inf E = 0$ e $\sup E = \max E = 1$. Infatti 0 è un minorante, perché $\frac{1}{n} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$; e nessun numero $k > 0$ è un minorante, perché per la **proprietà di Archimede** esiste $n \in \mathbb{N}_{>0}$ con $n > \frac{1}{k}$, e quindi $\frac{1}{n} < k$. Dunque 0 è il massimo dei minoranti, ma non è il minimo perché $0 \notin E$.

Esempio 3.12: di estremi superiori e inferiori

Esempio	insieme E	$\inf E$	$\sup E$	minimo	massimo
I)	$\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$	0	non esiste in $\mathbb{Q}$	0	non esiste

Qui si cercano i maggioranti **dentro** $\mathbb{Q}$. Abbiamo:

$$\sqrt{2} \notin E \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

quindi il massimo non esiste; e non esiste nemmeno il sup **in** $\mathbb{Q}$, perché i maggioranti razionali di E sono i razionali maggiori di $\sqrt{2}$ e fra questi non ce n'è uno minimo (troncando $\sqrt{2}$ per eccesso si ottengono maggioranti razionali sempre più piccoli). Come mostra l'esempio seguente, in $\mathbb{R}$ l'estremo superiore esiste e vale $\sqrt{2}$.

Esempio	insieme E	$\inf E$	$\sup E$	minimo	massimo
II)	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x < \sqrt{2}\}$	0	$\sqrt{2}$	0	non esiste

Abbiamo:

$$\sqrt{2} \notin E \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

ovvero il massimo non esiste ma $\sqrt{2}$ è il minimo dei maggioranti e quindi è il sup.

3.9 Definizione assiomatica dei numeri reali

Si dice che un insieme numerico X totalmente ordinato possiede la **proprietà dell'estremo superiore**, se:

$R_4 \rightarrow$ Ogni insieme $E \subset X$ non vuoto e limitato superiormente possiede estremo superiore in X

- Si prova facilmente che, se vale questa proprietà, allora è anche vero che ogni sottoinsieme di X non vuoto e inferiormente limitato ammette estremo inferiore.
- Non si richiede che X stesso abbia estremo superiore (ad esempio, nel caso $X = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ questo è certamente falso!) , ma che ogni sottoinsieme non vuoto superiormente limitato di X ne sia provvisto.

L'esempio VI mostra che certamente $\mathbb{Q}$ non ha la proprietà dell'estremo superiore. Invece, $\mathbb{R}$ ha questa proprietà. ^a

^aNon presenteremo però una dimostrazione formale.

- Nella **definizione assiomatica** di $\mathbb{R}$, questa proprietà costituisce parte della definizione stessa di $\mathbb{R}$

Definizione 3.17: (assiomatica) dei numeri reali

Chiamiamo $\mathbb{R}$ un insieme che soddisfa le proprietà R_1, R_2 (con la proprietà distributiva), R_3 ed R_4 , ossia un campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore

Proposizione 3.18: proprietà di Archimede

Per ogni numero reale x esiste un numero naturale n tale che:

$$n > x$$

- È la proprietà che abbiamo richiamato nel capitolo *Insiemi* e usato poco sopra. **Non è un assioma in più:** come mostra la dimostrazione, segue dalla proprietà R_4 .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un numero reale x tale che $n \leq x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente (da x), e quindi per la proprietà R_4 possiede estremo superiore in $\mathbb{R}$:

$$s = \sup \mathbb{N}$$

Poiché s è il **minimo** dei maggioranti di $\mathbb{N}$, il numero $s - 1$, che è più piccolo di s , non è un maggiorante di $\mathbb{N}$: esiste quindi $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > s - 1 \quad \implies \quad n + 1 > s$$

Ma $n+1$ è ancora un numero naturale, e questo contraddice il fatto che s è un maggiorante di $\mathbb{N}$. L'ipotesi iniziale è dunque assurda, e per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ con $n > x$. $\square$

- In forma equivalente: per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Infatti basta scegliere $n > \frac{1}{\varepsilon}$, e allora $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Di conseguenza l'unico numero non negativo minore o uguale a $\frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ è lo zero.
- La proprietà dell'estremo superiore prende anche il nome di **assioma di Dedekind**, o **assioma di continuità**, o **assioma di completezza** e si può enunciare anche nella seguente forma equivalente.

Sia $\{A, B\}$ una partizione di $\mathbb{R}$ (cioè A e B sono insiemi non vuoti e disgiunti la cui unione è $\mathbb{R}$); la partizione si chiama **sezione** se:

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B \text{ risulta } a < b.$$

Allora si dimostra che:

$R'_4 \rightarrow$ Per ogni sezione $\{A, B\}$ di $\mathbb{R}$ esiste un unico numero reale s (chiamato **elemento separatore**) tale che:

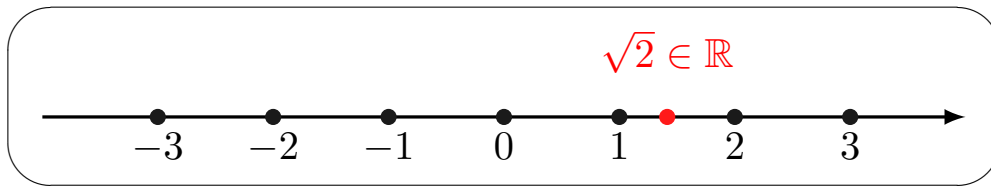
$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B, \quad a \leq s \leq b$$

Tale elemento separatore è il $\sup A$ e l' $\inf B$, quindi $\sup A = \inf B$

3.10 Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea?

- Ritorniamo ora al problema dell'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato. Quando, con riga e compasso, fissato il lato unitario del quadrato, ne costruiamo la diagonale e la riportiamo sulla retta di partenza, l'arco tracciato dal compasso "spezza la retta in due", generando quella che abbiamo chiamato una sezione; l'elemento separatore, che esiste per l'assioma R_4 rappresenta geometricamente il punto di intersezione, e quindi quel numero misura la diagonale.



Quindi l'interpretazione geometrica della proprietà R_4 ci mostra come l'insieme $\mathbb{R}$ sia una rappresentazione adeguata della nostra idea intuitiva di retta, così adeguata che **spesso in matematica si usa l'espressione “la retta reale” per indicare $\mathbb{R}$** , confondendo l'insieme numerico con la sua rappresentazione geometrica naturale.

Radicali, potenze, logaritmi e aritmetica modulare

4.1 Radicali, potenze, logaritmi

- In conseguenza della proprietà R_4 possiamo eseguire, nel campo reale, operazioni che sono solo occasionalmente possibili nel campo razionale, come l'estrazione di radice o l'elevamento a potenza.

4.1.1 Radici n -esime aritmetiche

Teorema 4.1

Per ogni $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tale che $x^n = y$.

- Tale numero si chiama radice n -esima aritmetica di y e si indica con uno dei simboli

$$\sqrt[n]{y} \text{ oppure } y^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo Teorema verrà fornita utilizzando le proprietà delle funzioni continue. □

La radice n -esima aritmetica è non negativa.

Esempio 4.1: radice n -esima aritmetica

Ad esempio:

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3.$$

Abbiamo inoltre:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (4.1)$$

Costruzione della rappresentazione decimale della radice n -esima.

- Cerchiamo l'allineamento decimale di

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237$$

questo numero, non essendo razionale, sarà rappresentato da un allineamento infinito (non periodico).

- Si procede così: si costruisce una classe di numeri razionali della forma:

$$\begin{aligned} 0 &< a_0 \\ &< a_0, a_1 \\ &< a_0, a_1 a_2 \\ &< a_0, a_1 a_2 a_3 \\ &< \dots \\ &< a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \\ &< \dots \end{aligned}$$

La regola è: ognuno di questi numeri è il più grande tra quelli con lo stesso numero di decimali dopo la virgola il cui quadrato è minore di 2. I primi di questi numeri sono:

$$\begin{array}{lll} 1 & 1^2 & = 1 \\ 1,4 & (1,4)^2 & = 1,96 \\ 1,41 & (1,41)^2 & = 1,9881 \\ 1,414 & (1,414)^2 & = 1,999396 \\ 1,4142 & (1,4142)^2 & = 1,99996164 \\ \dots & & \end{array}$$

- Questo insieme di numeri, che chiamiamo E_- , è limitato superiormente (ognuno è < 2); per la proprietà R_4 esso possiede estremo superiore e viene usato per la definizione di $\sqrt{2}$.

Il numero $\sqrt{2}$ si definisce precisamente come $\sup E_-$

- Si sarebbe potuto anche costruire una classe di numeri E_+ come la precedente con la regola che ognuno di essi sia il più piccolo tra quelli con lo stesso numero di decimali dopo la virgola il cui quadrato è maggiore di 2; avremmo ottenuto:

2	2^2	= 4
1,5	$(1,5)^2$	= 2,25
1,42	$(1,42)^2$	= 2,0164
1,415	$(1,415)^2$	= 2,002225
1,4143	$(1,4143)^2$	= 2,00024449
...		

Questo insieme E_+ è limitato inferiormente (ogni elemento è > 1), perciò possiede estremo inferiore; si dimostra che:

$$\sqrt{2} = \inf E_+ = \sup E_-$$

I numeri della classe E_- approssimano $\sqrt{2}$ per difetto, quelli della classe E_+ per eccesso.

4.1.2 Potenze a esponente reale

L'estrazione di radice n -esima è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza intera.

Esponente razionale

- Si può estendere l'operazione di elevamento a potenza per ogni esponente razionale se la base è positiva (utilizzando il teorema precedente).

$$\text{Se } r = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad a > 0 \quad \text{allora} \quad a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(si assume $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$ positivo)

Esponente reale

- Se l'esponente è reale $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ il numero a^b ($a > 0$) sarà individuato dalla classe di numeri

$$a^{b_0} \quad a^{b_0, b_1} \quad a^{b_0, b_1 b_2} \quad \dots$$

in un modo simile a quello del caso della radice.

Se la base a è negativa l'operazione di elevamento a potenza a^b è definita solo in certi casi:

1. se l'esponente b è intero, oppure
2. se l'esponente $b = \frac{n}{m}$ è razionale, *scritto in forma ridotta ai minimi termini*, purché non sia n dispari ed m pari.

Se $c < 0$ e m dispari, si definisce

$$\sqrt[m]{c} = -\sqrt[m]{-c}$$

Esempio 4.2: base negativa

Per esempio:

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}$$

$$(-2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^2} = \sqrt[5]{4}$$

L'ipotesi che la frazione sia ridotta ai minimi termini è essenziale: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ sono lo stesso numero razionale, ma

$$\sqrt[3]{(-8)^1} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{mentre} \quad \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Solo la prima scrittura, con $\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$ ridotta ai minimi termini, definisce $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

- Quando si dice “non esiste in $\mathbb{R}$ ” si intende che non è possibile definire tale operazione in modo da mantenere valide le usuali regole di calcolo.

Esempio 4.3: non esistenza della potenza a esponente reale

Per esempio:

$$(-2)^{\frac{3}{4}}$$

non esiste nel campo reale!

Siano

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0 \quad (\text{reali positivi})$$

e

$$c, d \in \mathbb{R} \quad (\text{reali qualsiasi}),$$

le proprietà principali dell'elevamento a potenza sono:

$$a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0 \quad (4.2a)$$

$$1^c = 1 \quad \forall c \quad (4.2b)$$

$$a^c > 0 \quad \forall c \quad (4.2c)$$

$$a^c > 1 \quad \forall a > 1 \quad \text{e} \quad c > 0 \quad (4.2d)$$

$$a^c < 1 \quad \forall a < 1 \quad \text{e} \quad c > 0 \quad (4.2e)$$

$$a^{c+d} = a^c \cdot a^d \quad (4.3a)$$

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \quad (4.3b)$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad (4.3c)$$

$$c < d \Rightarrow a^c < a^d \text{ se } a > 1 \quad (4.4a)$$

$$c < d \Rightarrow a^c > a^d \text{ se } a < 1 \quad (4.4b)$$

$$0 < a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c \quad \forall c > 0 \quad (4.4c)$$

4.1.3 Logaritmi

- Consideriamo l'equazione

$$a^x = y, \quad a > 0$$

con y assegnato e x incognito. Anzitutto, se $a = 1$, essa è risolubile solo se $y = 1$ (e in tal caso ogni numero reale x è soluzione). Sia dunque $a \neq 1$.

Se $y \leq 0$ essa non ha alcuna soluzione, vedere la proprietà (4.2c).

Il seguente teorema ci dice che essa ha una sola soluzione per ogni $y > 0$:

Teorema 4.2

Sia $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$. Esiste un unico numero reale x tale che $a^x = y$.

- Tale numero prende il nome di logaritmo in base a di y e si indica col simbolo:

$$\log_a y$$

- Il logaritmo è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.
- il logaritmo di un numero in una data base è l'esponente al quale la base deve essere elevata per ottenere il numero stesso.

Siano

$$x, y, a \in \mathbb{R}, \quad x > 0, y > 0, a > 0 \quad (\text{reali positivi}) \text{ e } a \neq 1,$$

le proprietà principali dei logaritmi sono (si deducono da quelle degli esponenziali):

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (4.5a)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (4.5b)$$

$$\log_a \left(\frac{1}{y} \right) = -\log_a y \quad (4.5c)$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad (4.6a)$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (\forall b > 0, b \neq 1) \quad (4.6b)$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x \quad (x \neq 1) \quad (4.6c)$$

Notazione:

- $\lg n = \log_2 n \rightarrow$ **logaritmo binario**
- $\ln n = \log_e n \rightarrow$ **logaritmo naturale** (dove $e \approx 2.718$ è il **numero di Nepero**) (a volte il logaritmo naturale $\ln$ si denota anche $\log$)
- $\lg^k n = (\lg n)^k \rightarrow$ **potenza**
- $\lg \lg n = \lg(\lg n) \rightarrow$ **composizione**

4.1.4 Approssimazioni

- un numero razionale può essere sempre espresso con precisione assoluta, sia ricorrendo alla scrittura frazionaria che a quella decimale (eventualmente con cifre periodiche).
- Invece non è possibile, naturalmente, scrivere tutte le cifre decimali di un numero irrazionale, dato che queste sono infinite e si susseguono senza periodicità.
- Cosa significa allora “conoscere” o “specificare” un numero irrazionale? Significa conoscere qualche algoritmo che ci consenta (almeno teoricamente) di scrivere tante cifre decimali esatte quante ne desideriamo.

Esempio 4.4: numeri irrazionali

– Nell'esempio (già considerato) del numero irrazionale:

$$0,101001000100001\dots$$

formato in base alla regola: scrivere una cifra 1, una cifra 0, una cifra 1, due

cifre 0, una cifra 1, tre cifre 0, e così via) è chiaro che potremmo scrivere tante cifre quante ne desideriamo.

– In altri casi, come

$$\sqrt{2} \text{ o } \log_2 3,$$

le cose sono più laboriose e richiedono l'esecuzione di calcoli iterativi per determinare ogni successiva cifra decimale; tuttavia, questi calcoli sono effettivamente eseguibili.

- Altre volte, in Analisi matematica, un numero viene specificato in modo non costruttivo, denotandolo come l'unico numero che risolve un determinato problema (una volta che si sia dimostrato appunto che tale soluzione esiste ed è unica). Si tratta di un modo operativamente meno soddisfacente, ma teoricamente ineccepibile.

Aspetti pratici del calcolo di numeri irrazionali

- Ogni volta che eseguiamo calcoli con una **calcolatrice tascabile**, questa scriverà solo numeri con un numero fissato di cifre decimali dopo la virgola (tipicamente 9). Questo significa che stiamo lavorando solo con numeri razionali, anzi con un sottoinsieme finito dell'insieme $\mathbb{Q}$.
- Lavorando con un **computer** le cose migliorano un po', ma rimaniamo comunque nell'ambito di sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}$. Occorre naturalmente esserne consapevoli.
- Oltre all'approssimazione generata dagli strumenti di calcolo, a volte siamo noi stessi a non essere interessati a troppe cifre decimali; introduciamo allora volutamente delle approssimazioni, scrivendo ad esempio

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

Regola di arrotondamento: l'ultima cifra che si scrive viene arrotondata all'unità inferiore (superiore) se la prima cifra che si trascura è da 0 a 4 (rispettivamente, da 5 a 9).

Esempio 4.5: Arrotondamento

Ad esempio:

$$2,4138 \approx 2,41$$

$$2,4152 \approx 2,42$$

4.2 Aritmetica modulare

Definizione 4.3: di parte intera

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, denotiamo con $[a]$ o $\lfloor a \rfloor$ la **parte intera** (o “**floor**”) di a :

$$[a] = \text{intero } n \text{ tale che } n \leq a < n + 1$$

Equivalentemente, la parte intera di a è il **più grande** intero minore o uguale ad a :

$$\lfloor a \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}.$$

- Le due descrizioni coincidono. Se $n \leq a < n + 1$, allora n appartiene all'insieme $\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ e ogni altro suo elemento k soddisfa $k \leq a < n + 1$, cioè $k \leq n$ (essendo k e n interi): quindi n ne è il massimo. Viceversa, se n è il massimo di quell'insieme, allora $n \leq a$ e inoltre $a < n + 1$, perché altrimenti $n + 1$ appartenerrebbe all'insieme e n non ne sarebbe il massimo.

Esempio 4.6: Parte intera

$$[2,38] = 2; \quad [3] = 3; \quad [-1,8] = -2.$$

- Mentre per i numeri positivi la parte intera si ottiene semplicemente “buttando via le cifre dopo la virgola”, per i numeri negativi occorre prendere il massimo intero $\leq a$, che è diverso da quello che si ottiene buttando via le cifre dopo la virgola (tranne nel caso in cui a sia già un intero)

Definizione 4.4: di mantissa

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, denotiamo con (a) la **mantissa** (o parte decimale) di a :

$$(a) = a - [a]$$

Esempio 4.7: Mantissa

$$(2,38) = 0.38; \quad (3) = 0; \quad (-1,8) = 0.2.$$

- La mantissa quindi non è un intero ma un numero reale, compreso in $[0, 1)$. Infatti, posto $n = [a]$, dalla definizione di parte intera abbiamo $n \leq a < n + 1$ e, sottraendo n ,

$$0 \leq \underbrace{a - n}_{(a)} < 1.$$

- Per i numeri positivi, si ottiene semplicemente “buttando via le cifre prima della virgola”, per i numeri negativi la mantissa è il **complemento a uno** del numero che si ottiene buttando via le cifre prima della virgola.

Definizione 4.5: di parte intera superiore

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, denotiamo con $\lceil a \rceil$ la **parte intera superiore** (o “**ceil**”) di a :

$$\lceil a \rceil = \text{intero } n \text{ tale che } n - 1 < a \leq n$$

Equivalentemente, la parte intera superiore di a è il **più piccolo** intero maggiore o uguale ad a :

$$\lceil a \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} : n \geq a\}.$$

- Anche qui le due descrizioni coincidono. Se $n - 1 < a \leq n$, allora n appartiene all’insieme $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$ e ogni altro suo elemento k soddisfa $k \geq a > n - 1$, cioè $k \geq n$: quindi n ne è il minimo. Viceversa, se n è il minimo di quell’insieme, allora $a \leq n$ e inoltre $n - 1 < a$, perché altrimenti $n - 1$ apparterrebbe all’insieme e n non ne sarebbe il minimo.

Esempio 4.8: di ceil

$$\lceil 2,38 \rceil = 3; \quad \lceil 3 \rceil = 3; \quad \lceil -1,8 \rceil = -1.$$

Alcune proprietà:

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil < a + 1$$

- Segue subito dalle due definizioni: da $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ si ricava $\lfloor a \rfloor \leq a$ e $a - 1 < \lfloor a \rfloor$; da $\lceil a \rceil - 1 < a \leq \lceil a \rceil$ si ricava $a \leq \lceil a \rceil$ e $\lceil a \rceil < a + 1$.

Valgono inoltre le seguenti relazioni fra le due funzioni.

Osservazione 4.6: parte intera, parte intera superiore e cambio di segno

Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$-\lfloor a \rfloor = \lceil -a \rceil \quad \text{e} \quad -\lceil a \rceil = \lfloor -a \rfloor \quad (4.7)$$

e inoltre

$$\lfloor a \rfloor = a \iff a \in \mathbb{Z} \iff \lceil a \rceil = a \quad (4.8)$$

Dimostrazione. Poniamo $n = \lfloor a \rfloor$, cioè $n \leq a < n+1$. Moltiplicando per -1 (e invertendo i versi) otteniamo

$$-n - 1 < -a \leq -n, \quad \text{cioè} \quad (-n) - 1 < -a \leq -n.$$

Poiché $-n$ è un intero, la definizione di parte intera superiore dà $\lceil -a \rceil = -n = -\lfloor a \rfloor$: questa è la prima identità della (4.7). Applicando la prima identità al numero $-a$ si ottiene $-\lfloor -a \rfloor = \lceil a \rceil$, cioè la seconda.

Per la (4.8): se $\lfloor a \rfloor = a$ allora a è un intero, perché $\lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}$. Viceversa, se $a \in \mathbb{Z}$ allora $a \leq a < a+1$ e quindi $\lfloor a \rfloor = a$. Allo stesso modo, se $\lceil a \rceil = a$ allora $a \in \mathbb{Z}$; e se $a \in \mathbb{Z}$ allora $a-1 < a \leq a$, quindi $\lceil a \rceil = a$. $\square$

Le due funzioni sono completamente caratterizzate dalle disuguaglianze seguenti.

Osservazione 4.7: caratterizzazioni della parte intera e della parte intera superiore

Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ e ogni numero intero $n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$\lfloor a \rfloor = n \iff n \leq a < n+1 \quad (4.9a)$$

$$\lfloor a \rfloor = n \iff a-1 < n \leq a \quad (4.9b)$$

$$\lceil a \rceil = n \iff n-1 < a \leq n \quad (4.9c)$$

$$\lceil a \rceil = n \iff a \leq n < a+1 \quad (4.9d)$$

$$a < n \iff \lfloor a \rfloor < n \quad (4.9e)$$

$$n \leq a \iff n \leq \lfloor a \rfloor \quad (4.9f)$$

$$a \leq n \iff \lceil a \rceil \leq n \quad (4.9g)$$

$$n < a \iff n < \lceil a \rceil \quad (4.9h)$$

e inoltre

$$\lfloor a+n \rfloor = \lfloor a \rfloor + n \quad \text{e} \quad \lceil a+n \rceil = \lceil a \rceil + n \quad (4.10)$$

Dimostrazione. • La (4.9a) è la definizione di parte intera e la (4.9c) è la definizione di parte intera superiore.

- La (4.9b) è una riscrittura della (4.9a): la condizione $n \leq a < n+1$ equivale a “ $n \leq a$ e $a < n+1$ ”, cioè a “ $n \leq a$ e $a-1 < n$ ”. Allo stesso modo la (4.9d) è una riscrittura della (4.9c): $n-1 < a \leq n$ equivale a “ $a \leq n$ e $n < a+1$ ”.
- (4.9e): se $a < n$, allora $\lfloor a \rfloor \leq a < n$. Viceversa, se $\lfloor a \rfloor < n$, allora, essendo entrambi interi, $\lfloor a \rfloor \leq n-1$ e quindi $a < \lfloor a \rfloor + 1 \leq n$.

- (4.9g): se $a \leq n$, allora n appartiene all'insieme $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$, di cui $\lceil a \rceil$ è il minimo, quindi $\lceil a \rceil \leq n$. Viceversa, se $\lceil a \rceil \leq n$, allora $a \leq \lceil a \rceil \leq n$.
- Le (4.9f) e (4.9h) si ottengono negando i due membri, rispettivamente, della (4.9e) e della (4.9g): la negazione di $a < n$ è $n \leq a$ e la negazione di $\lfloor a \rfloor < n$ è $n \leq \lfloor a \rfloor$; la negazione di $a \leq n$ è $n < a$ e la negazione di $\lceil a \rceil \leq n$ è $n < \lceil a \rceil$.
- (4.10): posto $m = \lfloor a \rfloor$, cioè $m \leq a < m + 1$, sommando n si ottiene $m + n \leq a + n < (m + n) + 1$ con $m + n \in \mathbb{Z}$, quindi $\lfloor a + n \rfloor = m + n = \lfloor a \rfloor + n$. In modo analogo, posto $m = \lceil a \rceil$, da $m - 1 < a \leq m$ si ottiene $(m + n) - 1 < a + n \leq m + n$, quindi $\lceil a + n \rceil = m + n = \lceil a \rceil + n$. □

Dato un numero intero $n \in \mathbb{Z}$, abbiamo

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$$

Dimostrazione. Distinguiamo i due casi.

- Se n è **pari**, esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2m$, e poiché m è un intero la (4.8) dà $\lfloor m \rfloor = \lceil m \rceil = m$:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2m}{2} \right\rceil = \lfloor m \rfloor + \lceil m \rceil = m + m = 2m = n.$$

- Se n è **dispari**, esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2m + 1$. Poiché $m \leq m + \frac{1}{2} < m + 1$, la (4.9a) dà $\lfloor m + \frac{1}{2} \rfloor = m$; poiché $(m + 1) - 1 < m + \frac{1}{2} \leq m + 1$, la (4.9c) dà $\lceil m + \frac{1}{2} \rceil = m + 1$. Quindi

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor m + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil m + \frac{1}{2} \right\rceil = m + (m + 1) = 2m + 1 = n.$$

□

Dati due numeri interi positivi $r, s \in \mathbb{Z}, r, s > 0$, abbiamo

$$\left\lceil \frac{r}{s} \right\rceil \leq \frac{r + (s - 1)}{s} \quad (4.11a)$$

$$\left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor \geq \frac{r - (s - 1)}{s} \quad (4.11b)$$

Dato inoltre anche un numero reale non negativo $p \in \mathbb{R}, p \geq 0$, abbiamo

$$\left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{p}{r} \right\rfloor}{s} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{r s} \right\rceil \quad (4.12a)$$

$$\left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{p}{r} \right\rceil}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p}{r s} \right\rfloor \quad (4.12b)$$

Definizione 4.8: Divisore

Un **divisore** di un intero $n \in \mathbb{Z}$, chiamato anche **fattore** di n , è un intero $m \in \mathbb{Z}$ che può essere moltiplicato per un qualche intero $q \in \mathbb{Z}$ per ottenere n , i.e., se $n = q \cdot m$.

- Se m è un divisore di n , n è un **multiplo** di m .
- Un intero n è **divisibile** per un altro intero m se m è un *divisore* di n .
- Per un intero $a \in \mathbb{Z}$ e un intero positivo $n \in \mathbb{Z}, n > 0$, il valore $a \bmod n$ è il resto della divisione $\frac{a}{n}$.

Definizione 4.9: di modulo (remainder)

Dato $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}, n > 0$,

$$a \bmod n = a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$

- Segue che $0 \leq a \bmod n < n$

Se $(a \bmod n) = (b \bmod n)$, scriviamo

$$a \equiv b \pmod{n}$$

e diciamo che a è **equivalente** a b , modulo n .

Esempio 4.9

Per esempio, 23 e 13 sono equivalenti modulo 5 e scriviamo $23 \equiv 13 \pmod{5}$

- Equivalentemente, $a \equiv b \pmod{n}$ se a e b hanno lo stesso resto se divisi per n .
- Equivalentemente, $a \equiv b \pmod{n}$ se e solo se n è un divisore di $|b - a|$.

Sommatorie, progressioni geometriche e aritmetiche

5.1 Sommatorie

Definizione 5.1: di sommatoria

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$, n numeri reali. La loro somma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

si può indicare in forma compatta col simbolo di sommatoria:

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

che si legge: “sommatoria per k da 1 a n di a_k ”. Il simbolo k si dice indice di sommatoria.

- Il simbolo di sommatoria è dunque una pura e semplice stenografia, che tuttavia risulta molto utile quando i termini a_k sono definiti esplicitamente in funzione dell'indice k .

Esempio 5.1: sommatorie

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$\sum_{k=3}^n k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2$$

- L'indice di sommatoria è un **indice muto**. Questo vuol dire che se si sostituisce k con i , j o qualunque altro indice (in tutte le sue occorrenze) il valore della sommatoria non cambia.

Esempio 5.2: indice muto

Abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

in quanto i due simboli indicano la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali (senza lo zero).

Invece, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \neq \sum_{k=1}^m k^2$$

in quanto i due simboli indicano la somma, rispettivamente, dei primi n oppure dei primi m quadrati (se $n \neq m$ il risultato sarà diverso).

5.1.1 Principali proprietà delle sommatorie

Osservazione 5.2: prodotto per una costante

Data una sommatoria $\sum_{k=1}^n a_k$ e un numero reale $c \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (5.1)$$

Dimostrazione. Dalla proprietà distributiva abbiamo:

$$\underbrace{c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n}_{=\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k)} = \underbrace{c (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_{=c \sum_{k=1}^n a_k}$$

□

Osservazione 5.3: sommatoria con termine costante

Per ogni numero naturale $n \geq 1$ e ogni numero reale $c \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n c = c \cdot n \quad (5.2)$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\underbrace{c + c + \cdots + c}_{= \sum_{k=1}^n c \quad \text{ovvero } c \text{ sommato } n \text{ volte}} = cn$$

□

Osservazione 5.4: unione di sommatorie

Date due sommatorie $\sum_{k=1}^n a_k$ e $\sum_{k=1}^n b_k$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \quad (5.3)$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}_{= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k} = \underbrace{a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n}_{= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)}$$

□

- Le tre proprietà che seguono (scomposizione, traslazione di indici e riflessione di indici) sono semplicemente differenti scritture e/o ordinamenti dei termini delle sommatorie.

Osservazione 5.5: scomposizione

Dati due numeri naturali $n \geq 1$ e $m \geq 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n+m} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \quad (5.4)$$

Dimostrazione. I termini della sommatoria $\sum_{k=1}^{n+m} a_k$ si raggruppano nei primi n e negli ultimi m :

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{= \sum_{k=1}^n a_k} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}}_{= \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k} \\ &= \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}}_{= \sum_{k=1}^{n+m} a_k} \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.6: traslazione di indici

Data una sommatoria $\sum_{k=1}^n a_k$ e un numero naturale $m \geq 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m} = \sum_{k=1-m}^{n-m} a_{k+m} \quad (5.5)$$

Dimostrazione. Nella sommatoria $\sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$ l'indice k varia da $1+m$ a $n+m$ e quindi l'indice $k-m$ varia da 1 a n :

$$\underbrace{a_{(1+m)-m} + a_{(2+m)-m} + \cdots + a_{(n+m)-m}}_{=\sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$

Allo stesso modo, nella sommatoria $\sum_{k=1-m}^{n-m} a_{k+m}$ l'indice k varia da $1-m$ a $n-m$ e quindi l'indice $k+m$ varia da 1 a n :

$$\underbrace{a_{(1-m)+m} + a_{(2-m)+m} + \cdots + a_{(n-m)+m}}_{=\sum_{k=1-m}^{n-m} a_{k+m}} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$

□

Osservazione 5.7: riflessione di indici

Data una sommatoria $\sum_{k=1}^n a_k$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \quad (5.6)$$

Dimostrazione. Nella sommatoria $\sum_{k=1}^n a_{n-k+1}$ l'indice k varia da 1 a n e quindi l'indice $n-k+1$ varia da n a 1, cioè i termini sono gli stessi, elencati in ordine inverso:

$$\underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1}_{=\sum_{k=1}^n a_{n-k+1}} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$

Allo stesso modo, nella sommatoria $\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$ l'indice k varia da 0 a $n-1$ e quindi l'indice $n-k$ varia da n a 1:

$$\underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1}_{=\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=\sum_{k=1}^n a_k}$$

□

5.1.2 Alcune sommatorie importanti

Osservazione 5.8: somma dei primi n numeri naturali (senza lo zero)

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione. Usando la riflessione di indici (5.6) abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k + n - k + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.9: somma dei primi n numeri dispari

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$$

Dimostrazione. Sfruttando le proprietà delle sommatorie abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1) &= 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n = n^2 + n - n = n^2 \\ \\ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (k-1) + n = 2 \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right) + n \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) + n = n^2 + n - 2n + n = n^2 \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.10: somma dei primi n numeri pari (senza lo zero)

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Dimostrazione.

$$\sum_{k=1}^n 2k = 2 \sum_{k=1}^n k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = n(n+1)$$

□

- Le tre sommatorie importanti appena viste si dimostrano anche per induzione, nel capitolo «[Principio di induzione](#)» della Parte 1.

5.2 Progressioni geometriche

Definizione 5.11: di progressione geometrica

Una sequenza di numeri reali è in **progressione geometrica** se il rapporto tra ogni termine (a partire dal secondo) e il precedente è costante. Tale costante si dice ragione della progressione.

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $q \in \mathbb{R}$, l'associata progressione geometrica è:

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3, \quad aq^4, \quad \dots$$

Ogni termine (a partire dal secondo) si ottiene dal precedente moltiplicandolo per q . Il k -esimo termine ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) si può scrivere aq^{k-1} e abbiamo:

$aq^{1-1} = aq^0 = a$	primo termine, in posizione $k = 1$
$aq^{2-1} = aq^1 = aq$	secondo termine, in posizione $k = 2$
$aq^{3-1} = aq^2$	terzo termine, in posizione $k = 3$
$aq^{4-1} = aq^3$	quarto termine, in posizione $k = 4$
$\dots$	$\dots$

Osservazione 5.12: termine k -esimo di una progressione geometrica

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $q \in \mathbb{R}$, indichiamo con t_k il termine in posizione k della progressione geometrica. La relazione ricorsiva che definisce la progressione è:

$$t_1 = a \quad \text{e} \quad t_k = t_{k-1} q \quad \text{per ogni numero naturale } k \geq 2 \quad (5.7)$$

e la formula chiusa del termine k -esimo è:

$$t_k = a q^{k-1} \quad \text{per ogni numero naturale } k \geq 1 \quad (5.8)$$

Dimostrazione. La formula chiusa (5.8) si ottiene applicando ripetutamente la relazione ricorsiva (5.7):

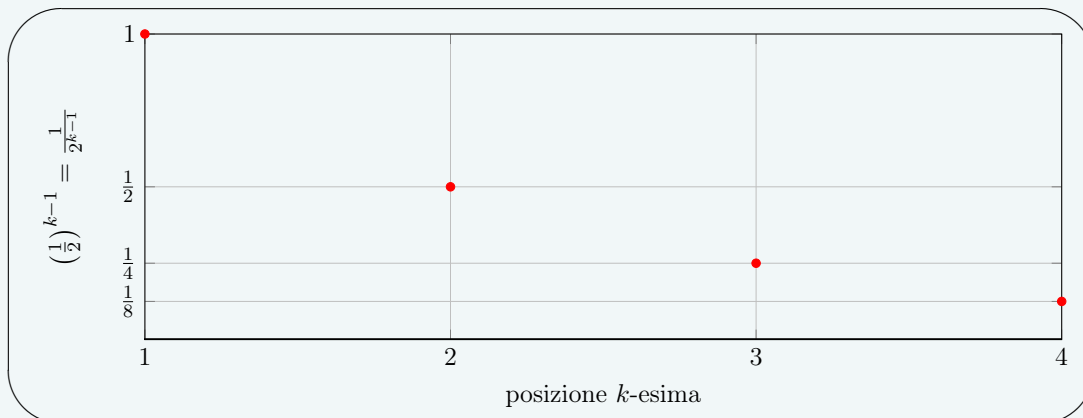
$$\begin{aligned} t_1 &= a = a q^0 \\ t_2 &= t_1 q = a q = a q^1 \\ t_3 &= t_2 q = a q q = a q^2 \\ t_4 &= t_3 q = a q^2 q = a q^3 \\ &\vdots \\ t_k &= t_{k-1} q = a q^{k-2} q = a q^{k-1} \end{aligned}$$

□

Esempio 5.3: progressioni geometriche

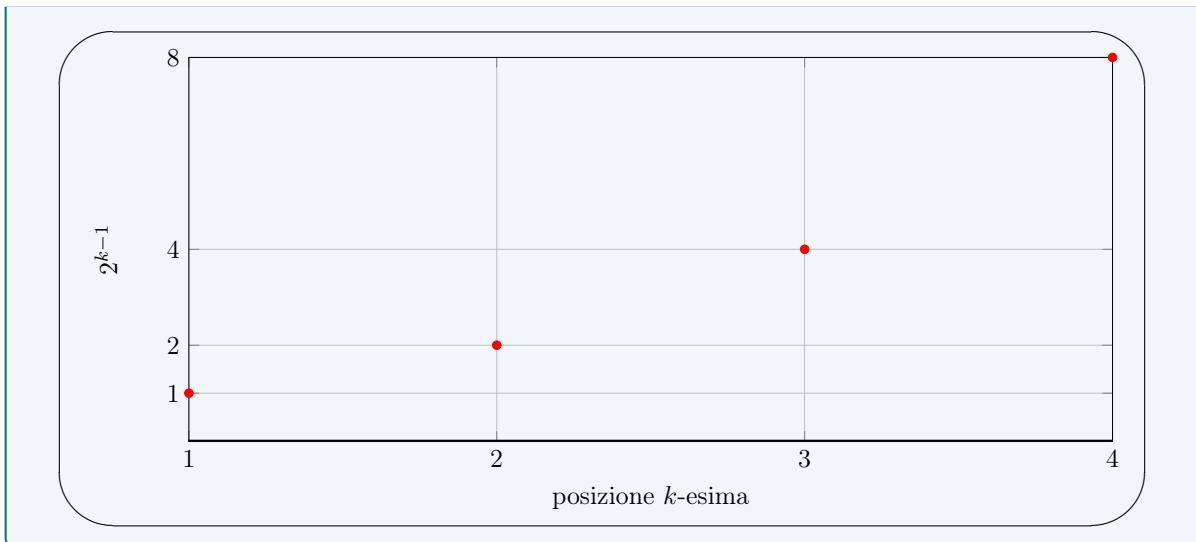
- Con $a = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}$$



- Con $a = 1$ e $q = 2$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8$$

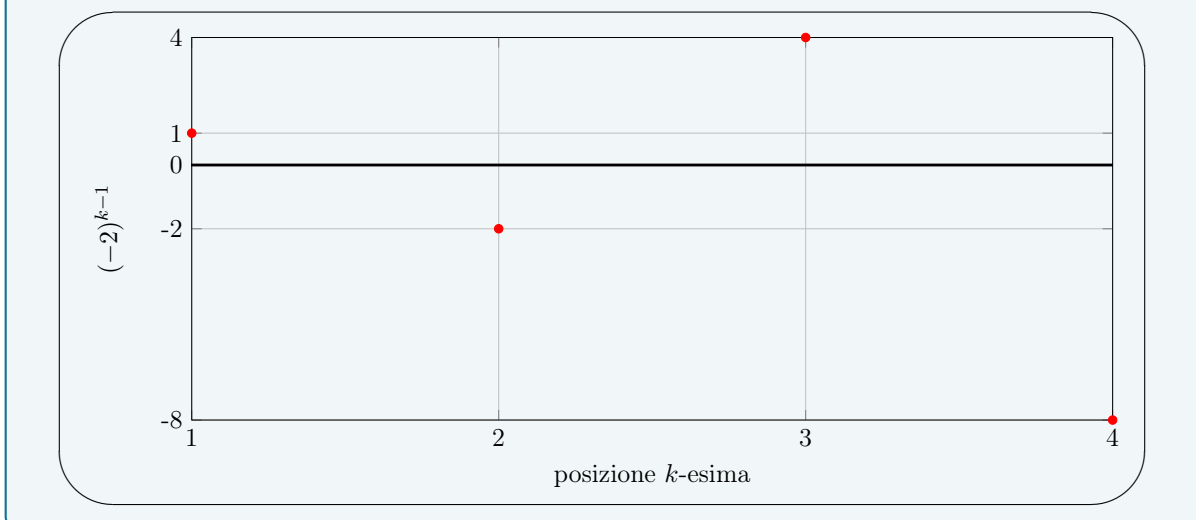


Esempio 5.4: progressione geometrica con ragione negativa

- Con $a = 1$ e $q = -2$, i primi 4 termini sono:

$$1, -2, 4, -8$$

Con ragione negativa i termini cambiano di segno a ogni passo: quelli in posizione dispari sono positivi, quelli in posizione pari sono negativi.



5.2.1 Sommatorie dei termini delle progressioni geometriche

Osservazione 5.13: somma dei primi n termini della progressione geometrica ($a = 1$)

Dato $q \in \mathbb{R}$, per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{se } q \neq 1 \\ n & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.9)$$

Dimostrazione. Se $q \neq 1$, proviamo l'equazione nella seguente forma equivalente:

$$(q - 1) \sum_{k=1}^n q^{k-1} = q^n - 1$$

Applicando le proprietà delle sommatorie, in particolare il prodotto per una costante (5.1) e la traslazione di indici (5.5), si ha:

$$\begin{aligned} (q - 1) \sum_{k=1}^n q^{k-1} &= q \sum_{k=1}^n q^{k-1} - \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q^k + q^n - \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \right) = q^n - 1 \end{aligned}$$

Dividendo per $q - 1 \neq 0$ otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Se $q = 1$, abbiamo invece:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

□

- La dimostrazione non usa mai il segno della ragione: la formula (5.9) vale per ogni $q \in \mathbb{R}$, positivo, nullo o negativo. L'unico caso da precisare è $q = 0$: il primo addendo della sommatoria è $q^{1-1} = 0^0$, che qui si intende uguale a 1 (convenzione $0^0 = 1$). Con questa convenzione, per ogni $n \geq 1$ abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n 0^{k-1} = 1 + 0 + \cdots + 0 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{0^n - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

e quindi la formula (5.9) resta vera.

- Dati $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, la formula (5.9) si estende come segue:

$$\sum_{k=1}^n a q^{k-1} = \begin{cases} a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) & \text{se } q \neq 1 \\ a n & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{dato che} \quad \sum_{k=1}^n a q^{k-1} = a \sum_{k=1}^n q^{k-1} \quad (5.10)$$

chiaramente:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{e quindi abbiamo anche} \quad \sum_{k=1}^n a q^{k-1} = \begin{cases} a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) & \text{se } q \neq 1 \\ a n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- La formula (5.9) si dimostra anche per induzione, nel capitolo «[Principio di induzione](#)» della Parte 1.

Esempio 5.5: somma dei primi n termini di progressioni geometriche

- Con $a = 2$ e $q = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$2, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{4} = \frac{15}{4}$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \sum_{k=1}^4 \frac{2}{2^{k-1}} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \frac{1 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{15}{4}$$

- Con $a = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{8} = \frac{15}{8}$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{16} \cdot 2 = \frac{15}{8}$$

- Con $a = 1$ e $q = 2$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8 \quad \text{e} \quad 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 2^{k-1} = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 16 - 1 = 15$$

- Con $a = 1$ e $q = -2$, i primi 4 termini sono:

$$1, -2, 4, -8 \quad \text{e} \quad 1 - 2 + 4 - 8 = -5$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 (-2)^{k-1} = \frac{(-2)^4 - 1}{-2 - 1} = \frac{16 - 1}{-3} = \frac{15}{-3} = -5$$

5.3 Progressioni aritmetiche

Definizione 5.14: di progressione aritmetica

Una sequenza di numeri reali è in **progressione aritmetica** se la differenza tra ogni termine (a partire dal secondo) e il precedente è costante. Tale costante si dice ragione della progressione.

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $d \in \mathbb{R}$, l'associata progressione aritmetica è:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \dots$$

Ogni termine (a partire dal secondo) si ottiene dal precedente sommandogli d . Il k -esimo termine ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) si può scrivere $a + (k - 1)d$ e abbiamo:

$a + (1 - 1)d = a + 0d = a$	primo termine, in posizione $k = 1$
$a + (2 - 1)d = a + 1d = a + d$	secondo termine, in posizione $k = 2$
$a + (3 - 1)d = a + 2d$	terzo termine, in posizione $k = 3$
$a + (4 - 1)d = a + 3d$	quarto termine, in posizione $k = 4$
$\dots$	$\dots$

- La progressione aritmetica è l'analogo additivo della progressione geometrica: nella progressione geometrica si *moltiplica* ogni termine per la ragione q , nella progressione aritmetica si *somma* a ogni termine la ragione d .

Osservazione 5.15: termine k -esimo di una progressione aritmetica

Dato il primo termine $a \in \mathbb{R}$ e la ragione $d \in \mathbb{R}$, indichiamo con t_k il termine in posizione k della progressione aritmetica. La relazione ricorsiva che definisce la progressione è:

$$t_1 = a \quad \text{e} \quad t_k = t_{k-1} + d \quad \text{per ogni numero naturale } k \geq 2 \quad (5.11)$$

e la formula chiusa del termine k -esimo è:

$$t_k = a + (k - 1)d \quad \text{per ogni numero naturale } k \geq 1 \quad (5.12)$$

Dimostrazione. La formula chiusa (5.12) si ottiene applicando ripetutamente la relazione ricorsiva (5.11):

$$\begin{aligned} t_1 &= a = a + 0 d \\ t_2 &= t_1 + d = a + d = a + 1 d \\ t_3 &= t_2 + d = a + d + d = a + 2 d \\ t_4 &= t_3 + d = a + 2 d + d = a + 3 d \\ &\vdots \\ t_k &= t_{k-1} + d = a + (k-2) d + d = a + (k-1) d \end{aligned}$$

□

- La formula chiusa (5.12) si ottiene anche con il seguente ragionamento, che non richiede i puntini di sospensione. Scriviamo la relazione ricorsiva (5.11) nella forma $t_j - t_{j-1} = d$ per ogni posizione j da 2 a k :

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= d \\ t_3 - t_2 &= d \\ t_4 - t_3 &= d \\ &\vdots \\ t_k - t_{k-1} &= d \end{aligned}$$

Sommiamo ora tutte queste $k-1$ uguaglianze. A destra sommiamo d con sé stesso $k-1$ volte e otteniamo $d(k-1)$. A sinistra, la somma è **telescopica**: ogni termine compare due volte, una volta con il segno $+$ e una volta con il segno $-$, tranne t_k e t_1 :

$$\underbrace{(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + (t_4 - t_3) + \cdots + (t_k - t_{k-1})}_{=\sum_{j=2}^k (t_j - t_{j-1})} = t_k - t_1 = t_k - a$$

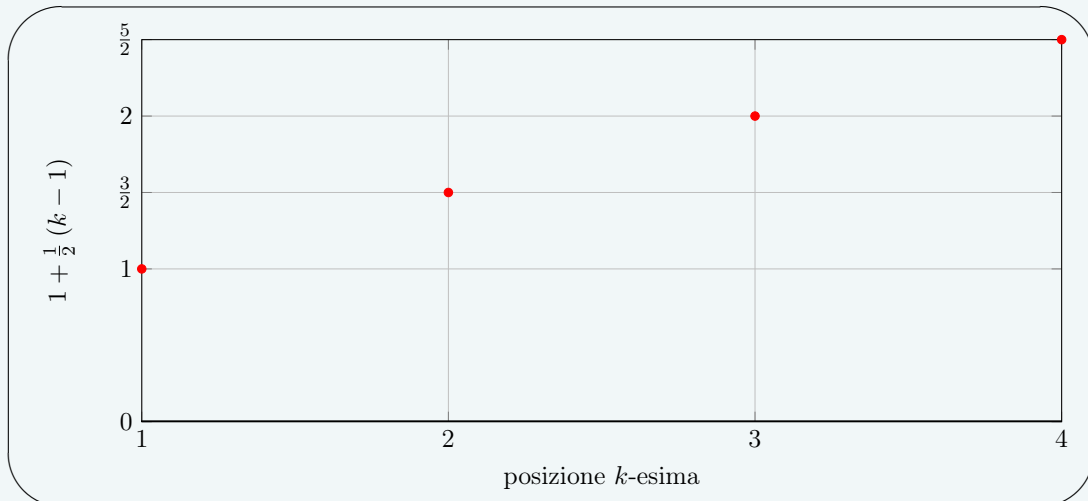
Uguagliando i due membri abbiamo $t_k - a = d(k-1)$, cioè la formula chiusa:

$$t_k = a + (k-1) d \quad \text{per ogni numero naturale } k \geq 1$$

Esempio 5.6: progressioni aritmetiche

- Con $a = 1$ e $d = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

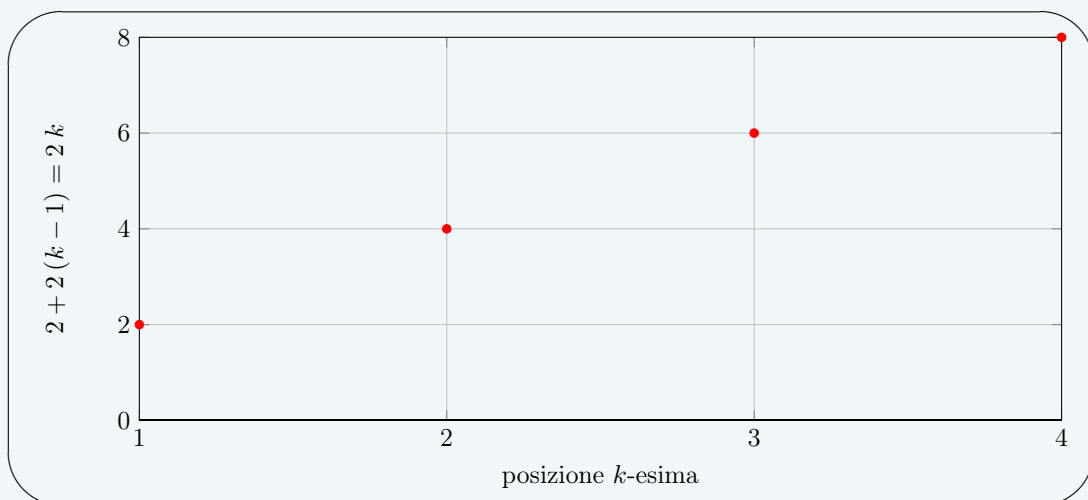
$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}$$



- Con $a = 2$ e $d = 2$, i primi 4 termini sono:

2, 4, 6, 8

cioè i primi 4 numeri pari (senza lo zero).



5.3.1 Sommatorie dei termini delle progressioni aritmetiche

Osservazione 5.16: somma dei primi n termini della progressione aritmetica ($a = 0$)

Dato $d \in \mathbb{R}$, per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n d(k-1) = d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \quad (5.13)$$

Dimostrazione. Usando il prodotto per una costante (5.1) e la riflessione di indici (5.6), con lo stesso ragionamento usato per la somma dei primi n numeri naturali, abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n d(k-1) &= \frac{d}{2} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) + \sum_{k=1}^n (k-1) \right) = \frac{d}{2} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) + \sum_{k=1}^n (n-k) \right) \\ &= \frac{d}{2} \sum_{k=1}^n (k-1+n-k) = \frac{d}{2} \sum_{k=1}^n (n-1) = d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è riflesso l'indice della seconda sommatoria: il termine di posto k è $a_k = k-1$ e quindi $a_{n-k+1} = (n-k+1)-1 = n-k$. $\square$

- Dati $d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, la formula (5.13) si estende come segue:

$$\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = a n + d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \quad (5.14)$$

dato che $\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a}_{=a n} + \sum_{k=1}^n d(k-1)$

dove si sono usate l'unione di sommatorie (5.3) e la sommatoria con termine costante (5.2). Questa formula calcola la somma dei primi n termini della progressione aritmetica con primo termine a qualunque.

- La stessa dimostrazione per riflessione di indici, applicata direttamente alla sommatoria dei primi n termini, dà la forma equivalente:

$$\sum_{k=1}^n (a + d(k-1)) = \frac{n}{2} \left(\underbrace{a}_{=t_1} + \underbrace{a + (n-1)d}_{=t_n} \right) = n \left(\frac{t_1 + t_n}{2} \right)$$

dato che, riflettendo l'indice, il termine di posto k e il termine di posto $n-k+1$ hanno somma costante $t_k + t_{n-k+1} = 2a + (n-1)d = t_1 + t_n$. La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è quindi n volte la media tra il primo e l'ultimo termine.

- Con $a = 1$ e $d = 1$ la progressione aritmetica è $1, 2, 3, \dots$ e la formula (5.14) dà $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, cioè la somma dei primi n numeri naturali (senza lo zero) già vista nella sezione «Alcune sommatorie importanti». Con $a = 1$ e $d = 2$ la progressione è $1, 3, 5, \dots$ e la formula dà $n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, cioè la somma dei primi n numeri dispari.

Esempio 5.7: somma dei primi n termini di progressioni aritmetiche

- Con $a = 1$ e $d = \frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{2+3+4+5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 \left(1 + \frac{1}{2} (k-1) \right) = 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) = 4 + 3 = 7$$

- Con $a = 2$ e $d = 2$, i primi 4 termini sono:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8 \quad \text{e} \quad 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 (2 + 2 (k-1)) = 2 \cdot 4 + 2 \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) = 8 + 12 = 20$$

e con la forma equivalente: $4 \left(\frac{2+8}{2} \right) = 4 \cdot 5 = 20$.

- Con $a = 1$ e $d = -\frac{1}{2}$, i primi 4 termini sono:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 1$$

la somma dei primi $n = 4$ termini è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^4 \left(1 - \frac{1}{2} (k-1) \right) = 1 \cdot 4 - \frac{1}{2} \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) = 4 - 3 = 1$$

Fattoriali, coefficienti binomiali e disuguaglianza triangolare

6.1 Fattoriali

Definizione 6.1: di fattoriale di n

Il fattoriale di n è il prodotto dei primi n interi positivi. Si indica con $n!$ e si legge “ n fattoriale”. In formule:

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Si pone, per definizione, $0! = 1$.

- Il numero $n!$ cresce molto rapidamente al crescere di n . I primi valori sono:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5.040	40.320	362.880	3.628.800

- Alcune proprietà del fattoriale, di verifica immediata, sono:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1), \quad \text{con } 1 \leq k \leq n \quad (6.1)$$

Con $1 \leq k \leq n$, diventa il prodotto di k fattori, partendo da n e decrescendo di una unità alla volta.

Esempio 6.1: Calcolo del fattoriale

$$\frac{100!}{95!} = \frac{100!}{(100-5)!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 = 9.034.502.400$$

Convienne sempre semplificare il più possibile le espressioni che contengono il fattoriale, prima di calcolarle!

6.2 Coefficienti binomiali**Definizione 6.2: di coefficiente binomiale**

Si definisce **coefficiente binomiale** il numero:

$$c_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad \text{con } 0 \leq k \leq n. \quad (6.2)$$

Il coefficiente binomiale $c_{n,k}$ si indica usualmente col simbolo: $\binom{n}{k}$ che si legge “ n su k ”.

- Data la regola (6.1), abbiamo:

$$c_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad (6.3)$$

con $k \geq 1$, espressione che è più maneggevole per il calcolo del coefficiente binomiale.

Abbiamo:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad (6.4)$$

Dato che:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! (n-(n-k))!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Abbiamo:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad \text{per ogni } n \geq 2 \text{ e } 1 \leq k \leq n-1 \quad (6.5)$$

(il verso della dimostrazione richiede $(k-1)!$ e $(n-k-1)!$, quindi $k \geq 1$ e $k \leq n-1$). Dato

che:

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \underbrace{(n-1-(k-1))!}_{=(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!}} + \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)! (n-k-1)!} \\
 &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k(k-1)! (n-k)(n-k-1)!} = \frac{\overbrace{(n-1)!}^{=n!} n}{\underbrace{k(k-1)!}_{k!} \underbrace{(n-k)(n-k-1)!}_{(n-k)!}} \\
 &= \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

Segue anche:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{per ogni } n \geq 1 \text{ e } 1 \leq k \leq n$$

6.2.1 Formula di Newton

La potenza n -esima di un binomio $(a+b)$ si può calcolare con la seguente formula (da cui deriva il nome di coefficiente binomiale):

Osservazione 6.3: formula di Newton

Per ogni intero $n \geq 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, vale:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (6.6)$$

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa: $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ cioè $1 = 1$ che è evidentemente vero (con la convenzione $0^0 = 1$, che copre anche il caso $a = b = 0$).

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva,

abbiamo: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Allora:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b) \cdot (a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right)}_{= \binom{n+1}{k}} a^{n-k+1} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$. □

Osservazione 6.4

Per ogni intero $n \geq 0$ abbiamo:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (6.7)$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$2^n = (1 + 1)^n$$

Applichiamo ora la formula di Newton (6.6):

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

□

6.2.2 Calcolo ricorsivo dei coefficienti binomiali

La relazione (6.5) permette di calcolare i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ per mezzo del cosiddetto **triangolo di Tartaglia** (o di Pascal).

Le regole per la creazione del triangolo sono:

1. In cima al triangolo si pone il numero $\binom{0}{0} = 1$ (per definizione).
2. Ai lati si pongono i numeri $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ per ogni $n \geq 1$.
3. Per $0 < k < n$, il numero $\binom{n}{k}$ viene scritto all'incrocio della n -esima riga e della k -esima colonna.
4. Sempre per $0 < k < n$, il numero $\binom{n}{k}$ risulta dalla somma dei due numeri che si trovano nella riga precedente, quello sulla stessa colonna e quello sulla colonna precedente.

Esempio 6.2: triangolo di Tartaglia (o di Pascal)

Il triangolo di Tartaglia con $n \leq 10$ e $k \leq 10$ è:

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$n = 0$	1										
$n = 1$	1	1									
$n = 2$	1	2	1								
$n = 3$	1	3	3	1							
$n = 4$	1	4	6	4	1						
$n = 5$	1	5	10	10	5	1					
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1				
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1			
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n = 10$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Per calcolare il coefficiente binomiale $\binom{5}{3}$, corrispondente alla cella blu, si può usare la relazione (6.5) e sommare i due coefficienti binomiali: $\binom{4}{2}$ e $\binom{4}{3}$, corrispondenti alle celle rosse:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10.$$

Esempio 6.3: calcolo della potenza di un binomio usando il triangolo di Tartaglia

Grazie al precedente triangolo di Tartaglia e alla formula di Newton (6.6) possiamo calcolare:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

6.3 Valore assoluto

Definizione 6.5: di valore assoluto

Il **valore assoluto** di un numero reale $a \in \mathbb{R}$ (o **modulo** di a) è il numero non negativo così definito:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Dalla definizione di valore assoluto segue immediatamente che:

$$\forall \varepsilon \geq 0, a \in \mathbb{R}, \quad |a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon \quad (6.9)$$

6.3.1 Disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$

Osservazione 6.6: disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$

$$|b + c| \leq |b| + |c| \quad \forall b, c \in \mathbb{R} \quad (6.10)$$

Dimostrazione. Scriviamo le due relazioni:

$$-|b| \leq b \leq |b|, \quad -|c| \leq c \leq |c|$$

e sommiamo membro a membro:

$$-(|b| + |c|) \leq b + c \leq |b| + |c|$$

Quindi per la (6.9), con $\varepsilon = |b| + |c| \geq 0$ e $a = b + c$, segue la (6.10). $\square$

- La disuguaglianza triangolare è usata anche nella forma seguente:

$$|d - e| \leq |d - f| + |e - f| \quad \forall d, e, f \in \mathbb{R} \quad (6.11)$$

Per ottenerla basta porre nella (6.10):

$$b = d - f, \quad c = f - e$$

otteniamo:

$$|d - f + f - e| = |d - e| \leq |d - f| + |f - e| = |d - f| + |e - f|$$

in quanto:

$$|f - e| = |e - f| \quad \forall e, f \in \mathbb{R}$$

- Inoltre la disuguaglianza triangolare si può anche scrivere nella forma seguente:

$$|g| \leq |g - h| + |h| \quad \text{cioè} \quad |g| - |h| \leq |g - h| \quad \forall g, h \in \mathbb{R} \quad (6.12)$$

Per ottenerla basta porre nella (6.10):

$$b = g - h, \quad c = h$$

Osservazione 6.7: disuguaglianza triangolare inversa in $\mathbb{R}$

$$||g| - |h|| \leq |g - h|, \quad \forall g, h \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

Dimostrazione. Dalla (6.12) abbiamo

$$|g| - |h| \leq |g - h| \quad \forall g, h \in \mathbb{R}$$

Analogamente scambiando g con h nella (6.12) otteniamo:

$$|h| - |g| \leq |h - g| = |g - h| \quad \text{ovvero} \quad |g| - |h| \geq -|g - h|$$

dunque abbiamo

$$-(|g - h|) \leq |g| - |h| \leq |g - h| \quad \forall g, h \in \mathbb{R}$$

Quindi per la (6.9), con $\varepsilon = |g - h| \geq 0$ e $a = |g| - |h|$ segue la disuguaglianza triangolare inversa. $\square$

- La (6.10) può facilmente estendersi al caso di k addendi:

$$\left| \sum_{i=1}^k b_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |b_i|. \quad (6.14)$$

- Valgono anche le seguenti proprietà immediate:

$$\begin{aligned} |bc| &= |b| |c|, & |-b| &= |b| \quad \forall b, c \in \mathbb{R}, \\ \left| \frac{b}{c} \right| &= \frac{|b|}{|c|} & \forall b, c \in \mathbb{R}, \quad c &\neq 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Successione di Fibonacci

7.1 Successione di Fibonacci

Definizione 7.1: di successione di Fibonacci

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_i &= F_{i-1} + F_{i-2}, \quad \text{con } i \geq 2, i \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (7.1)$$

- Pertanto, ogni numero di Fibonacci è la somma dei due precedenti, ottenendo la successione

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

- La successione di Fibonacci è collegata alla **sezione aurea** ϕ e al **coniugato della sezione aurea** $\hat{\phi}$,

Definizione 7.2: di sezione aurea

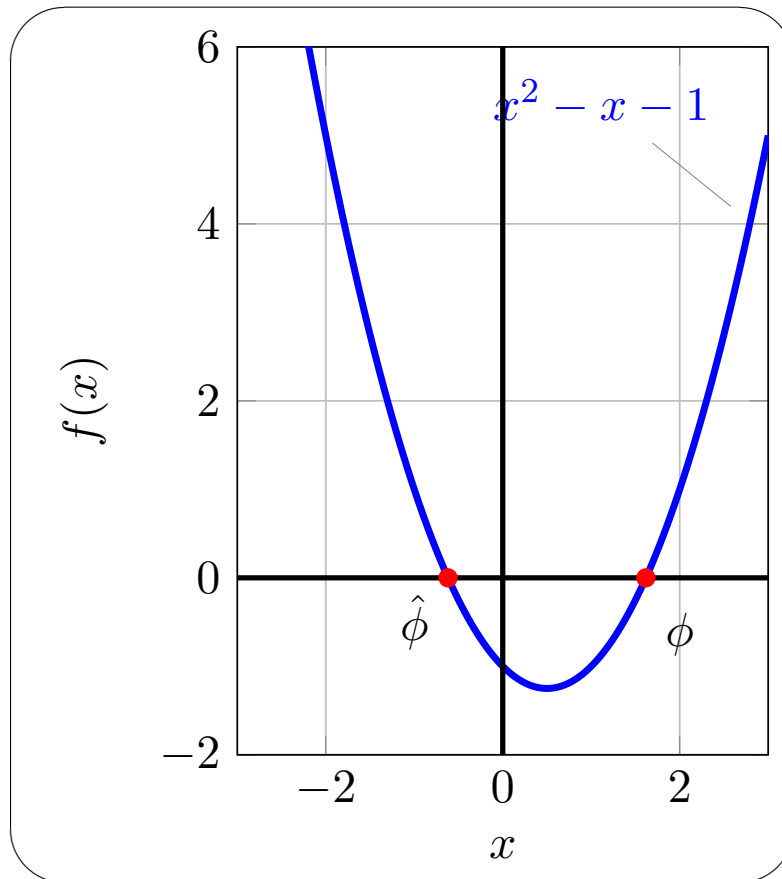
La **sezione aurea** ϕ e il **coniugato della sezione aurea** $\hat{\phi}$, sono le due radici dell'equazione:

$$x^2 = x + 1$$

e sono dati dalle formule:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & \hat{\phi} &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ &\approx 1.61803 & &\approx -0.61803 \end{aligned}$$

La seguente figura mostra il grafico della funzione $f(x) = x^2 - x - 1$ nell'intervallo $[-3, 3]$, i pallini rossi corrispondono alle radici dell'equazione $x^2 = x + 1$.



La sezione aurea ϕ e il coniugato della sezione aurea $\hat{\phi}$ soddisfano chiaramente l'equazione $x^2 = x + 1$ in quanto:

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \phi + 1$$

$$\hat{\phi}^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \hat{\phi} + 1$$

Osservazione 7.3: formula chiusa della successione di Fibonacci

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione. Per induzione su i .

- **Primo passo dell'induzione**

Dimostriamo che la formula sia valida per $i = 0$ e $i = 1$:

$$F_0 = \frac{\phi^0 - \hat{\phi}^0}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0, \quad F_1 = \frac{\phi^1 - \hat{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

• **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per $i = k$ e $i = k-1$ con $k \geq 1$, e proviamolo per $i = k+1$. Per definizione della successione di Fibonacci, abbiamo $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, mentre per ipotesi induttiva abbiamo:

$$F_k = \frac{\phi^k - \hat{\phi}^k}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{k-1} = \frac{\phi^{k-1} - \hat{\phi}^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\ &= \frac{\phi^k - \hat{\phi}^k}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{k-1} - \hat{\phi}^{k-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi^k - \hat{\phi}^k) + (\phi^{k-1} - \hat{\phi}^{k-1})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\phi^k + \phi^{k-1}) - (\hat{\phi}^k + \hat{\phi}^{k-1})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{k-1}(\phi + 1) - \hat{\phi}^{k-1}(\hat{\phi} + 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{k-1}(\phi^2) - \hat{\phi}^{k-1}(\hat{\phi}^2)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $i = k+1$.

□

Osservazione 7.4: calcolo di F_i per arrotondamento

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione. Dato che $|\hat{\phi}| < 1$, abbiamo

$$\frac{|\hat{\phi}^i|}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

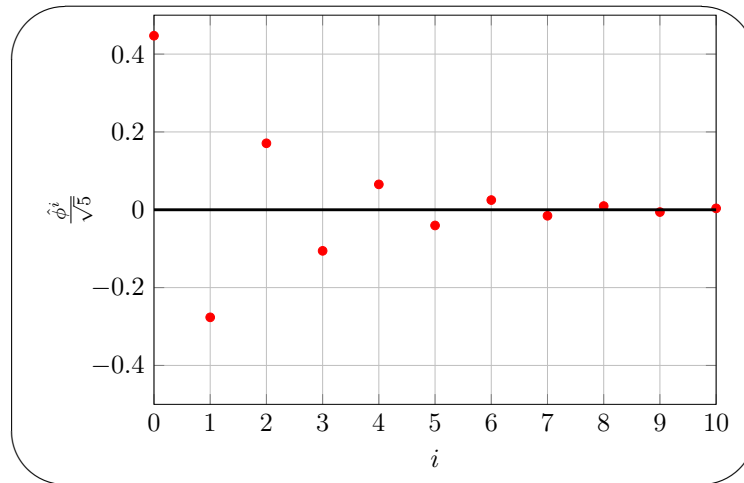
Dato che $F_i \in \mathbb{N}$ e $F_i = \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} - \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$, allora l' i -esimo numero di Fibonacci F_i è uguale a $\frac{\phi^i}{\sqrt{5}}$ arrotondato all'intero più vicino:

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

□

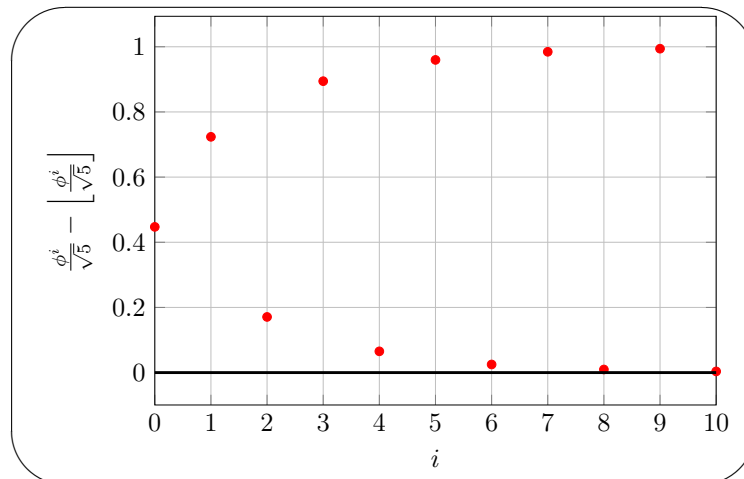
- I valori di

$$\frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \text{ con } i = 0, 1, \dots, 10 \text{ sono :}$$



- I valori di

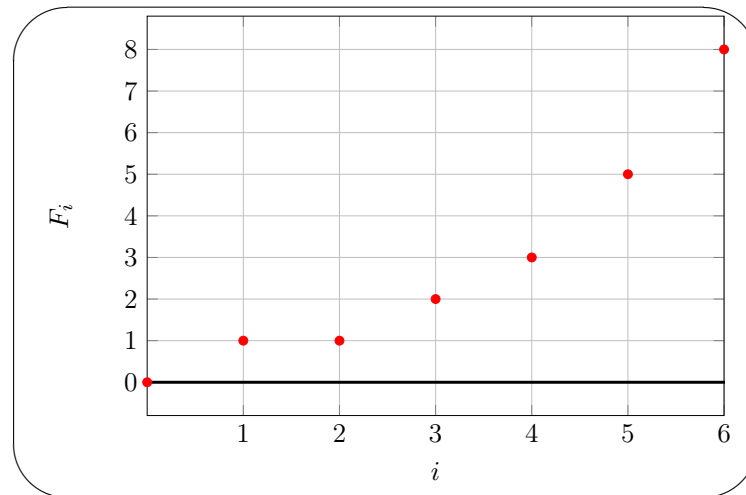
$$\frac{\phi^i}{\sqrt{5}} - \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} \right\rfloor \text{ con } i = 0, 1, \dots, 10 \text{ sono :}$$



- Dato che $F_i \in \mathbb{N}$ abbiamo inoltre:

$$\left(\frac{\phi^i}{\sqrt{5}} - \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} \right\rfloor \right) - \frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \in \{0, 1\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- I valori di F_i , con $i = 0, 1, \dots, 10$, sono:



Cardinalità degli insiemi infiniti

8.1 Potenza del numerabile

È possibile confrontare la “numerosità” degli insiemi infiniti?

- Affrontiamo il discorso a partire dagli insiemi numerici notevoli che abbiamo introdotto: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e chiediamoci: quanti sono gli elementi di ciascuno di questi insiemi?
- Intuitivamente, la risposta sembra ovvia: ciascuno di questi insiemi ha infiniti elementi; tuttavia i numeri razionali sono più numerosi dei numeri interi, essendo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, e per lo stesso motivo i numeri reali sono più numerosi dei numeri razionali, essendo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Come possiamo affermare, al tempo stesso, che due insiemi sono entrambi infiniti, ma uno è più numeroso dell'altro?

Com'è possibile, in generale, confrontare la numerosità degli insiemi infiniti?

- Per dar senso a queste domande, prima ancora che per sapervi rispondere, occorre definire cosa si intenda per uguale numerosità di due insiemi.
- Astruendo dall'esperienza del contare gli elementi di un insieme finito, si è giunti a identificare l'idea di **uguale numerosità** con quella di **corrispondenza biunivoca**:

Definizione 8.1: di uguale cardinalità di due insiemi

Due insiemi A, B si dicono di **uguale cardinalità** (o *potenza*) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro, cioè se esiste una legge che associa ad ogni elemento

di A uno e un solo elemento di B , e viceversa.

- La cardinalità (o potenza) di un insieme traduce l'idea intuitiva di numerosità

Osservazione 8.2

L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità

Dimostrazione. La seguente legge mette in corrispondenza biunivoca i numeri interi e i numeri naturali:

$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...	n	$-n$	...
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...	$2n-1$	$2n$	...

□

- Quindi, anche se dal punto di vista dell'inclusione $\mathbb{Z}$ ha “più elementi” di $\mathbb{N}$ (nel senso che ha tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ più altri), gli insiemi hanno la stessa cardinalità.

Due insiemi che hanno la stessa cardinalità si dicono anche **equipotenti** e vanno pensati come ugualmente numerosi.

Definizione 8.3: di insieme numerabile

Si dice **numerabile** un insieme che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

- Il termine numerabile indica che gli elementi dell'insieme si possono enumerare, ossia disporre in un elenco numerato (posto 1, posto 2, posto 3, ...)

La cardinalità di $\mathbb{N}$ prende il nome di **potenza del numerabile**.

Teorema 8.4

L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile

Dimostrazione. • Cominciamo a dimostrare che l'insieme dei numeri razionali positivi è numerabile.

- Per far questo, rappresentiamo i numeri razionali positivi come frazioni n/m , con n, m interi positivi, e disponiamo queste frazioni in una **tabella triangolare infinita**, al modo seguente:

$\frac{n}{m}$, con $n + m = \dots$				
2	$\frac{1}{1}$			
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$		
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$
...	...			

Si noti che: tutte le frazioni che rappresentano numeri razionali positivi compaiono in questa tabella almeno una volta; alcuni sono ripetuti più volte (ad es. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$). Ogni riga ha lunghezza finita.

- Quindi possiamo mettere in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ con l'insieme dei razionali positivi, percorrendo la tabella, riga dopo riga (e saltando un elemento quando è uguale ad uno già incontrato). Ad esempio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	...

(si noti che abbiamo saltato $\frac{2}{2}$ perché uguale a $\frac{1}{1}$, già incontrato).

- Questo dimostra che l'insieme dei razionali positivi è numerabile.
- Allora anche $\mathbb{Q}$ è numerabile, e questo si può provare con una dimostrazione analoga a quella con cui abbiamo provato che $\mathbb{Z}$ è numerabile: detti $q_1, q_2, q_3, \dots$ i razionali positivi, si pone:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{Q}$	0	q_1	$-q_1$	q_2	$-q_2$	q_3	$-q_3$	...

che realizza una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

□

- Aver scoperto che diversi insiemi infiniti, uno propriamente contenuto nell'altro ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), hanno la stessa cardinalità, potrebbe far pensare che questo sia vero per tutti gli insiemi infiniti. Ciò non è vero, come mostrato nella prossima sezione.

8.2 Potenza del continuo

Teorema 8.5

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile

- La tecnica di dimostrazione prende il nome di **procedimento diagonale di Cantor**

Dimostrazione. • Proveremo che l'intervallo $[0, 1]$ ha una cardinalità non numerabile, da cui ovviamente segue la non numerabilità di $\mathbb{R}$

- Supponiamo dunque **per assurdo** che $[0, 1]$ sia numerabile e disponiamo **tutti** i numeri reali dell'intervallo $[0, 1]$ in un elenco $r_1, r_2, r_3, \dots$
- Scriviamo ogni numero r_i in forma decimale:

$$0.a_1a_2a_3\dots$$

dove gli a_i sono cifre da 0 a 9; se le cifre sono tutte zero si ha $r_i = 0$ e se sono tutte nove si ha $r_i = 0.\overline{9} = 1$):

$$r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

$$r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

...

- Definiamo ora il seguente numero decimale:

$$r = 0.b_1b_2b_3\dots$$

dove le cifre b_i sono definite con la seguente regola:

$$b_i = \begin{cases} 5 & \text{se } a_{ii} \text{ è una cifra } 0, 1, 2, 3 \text{ o } 4 \\ 4 & \text{se } a_{ii} \text{ è una cifra } 5, 6, 7, 8 \text{ o } 9 \end{cases}$$

Con questa definizione risulta $b_i \neq a_{ii}$ per ogni i . Si noti che il numero r è stato costruito ragionando sulla diagonale della tabella infinita che ha per righe i numeri r_i , da cui il nome del procedimento.

□

Dimostrazione. • Osserviamo ora che r è un numero reale appartenente all'intervallo $[0, 1]$ (perché è del tipo $0.b_1b_2b_3\dots$ con tutte le cifre uguali a 4 o 5) e d'altro canto non è uguale a nessuno dei numeri r_i dell'elenco, in quanto:

$\rightarrow r \neq r_1$ la prima cifra di r è diversa dalla prima cifra di r_1 ($b_1 \neq a_{11}$);

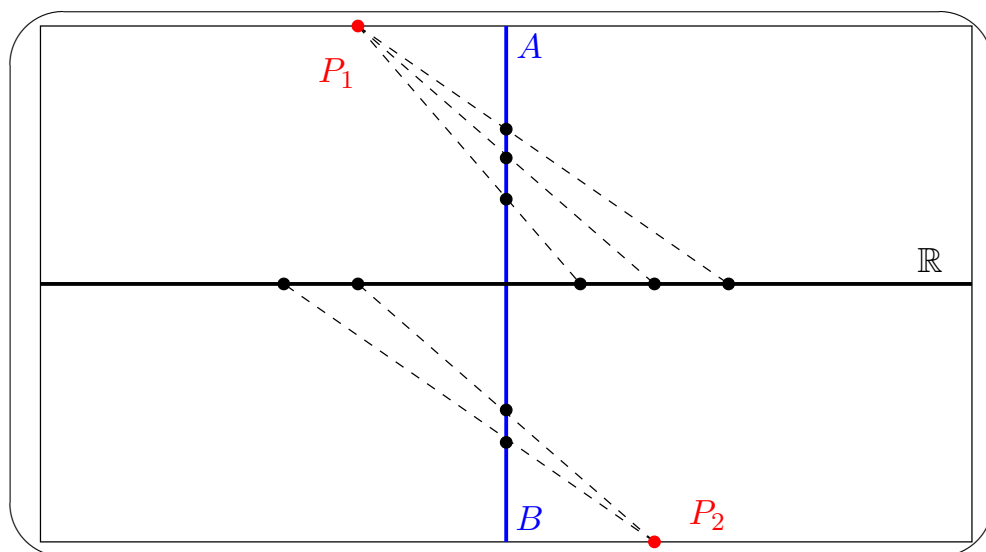
→ $r \neq r_2$ la seconda cifra di r è diversa dalla seconda cifra di r_2 ($b_2 \neq a_{22}$);
 → ...

- Ma questo porta a una **contraddizione**, avevamo supposto che gli r_i esaurissero completamente l'insieme dei numeri reali dell'intervallo $[0, 1]$. Dunque $[0, 1]$ non è numerabile.

□

Poiché $\mathbb{N}$ non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, ma può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$ stesso!), diciamo che $\mathbb{N}$ ha **cardinalità minore** di $\mathbb{R}$.

- Notiamo anche che l'intervallo $[0, 1]$, e qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}$ (aperto o chiuso, limitato o illimitato) ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.
- Questo fatto si può dimostrare ad esempio con una costruzione geometrica elementare, che realizza una corrispondenza biunivoca tra punti della retta e di un segmento $[A, B]$; come mostra la seguente figura, tracciando opportuni segmenti dai due punti fissati P_1 , P_2 alla retta stessa:



- Questo implica che, ad esempio, i punti di una retta hanno la stessa cardinalità dei punti di un segmento.

La cardinalità di $\mathbb{R}$ prende il nome di **potenza del continuo**.

- Non solo ogni intervallo di $\mathbb{R}$ ha questa stessa cardinalità. Si può dimostrare che lo stesso vale per il piano, per lo spazio tridimensionale e per i loro sottoinsiemi "continui": per esempio, un piano e una sfera hanno entrambi la potenza del continuo.

- Abbiamo incontrato fin qui solo due livelli gerarchici di infinito: la potenza del numerabile e quella del continuo. Non si deve credere che esistano solo queste due! Ad esempio, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è ancora più numeroso di $\mathbb{R}$; e con questo procedimento si può sempre costruire un insieme più numeroso di un insieme dato.
- Perciò i livelli gerarchici delle cardinalità infinite sono anch'essi infiniti.

Numeri complessi

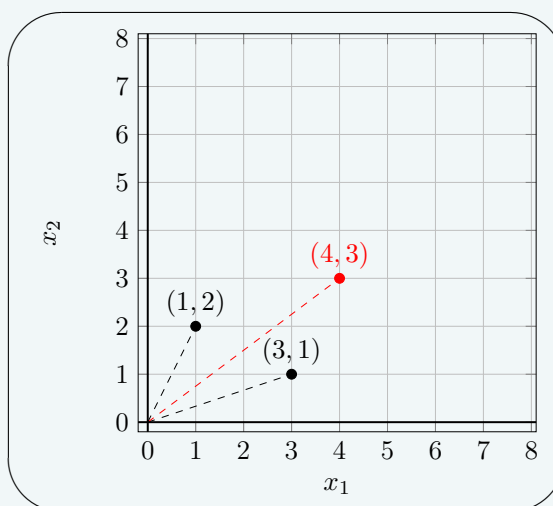
9.1 Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo

- Abbiamo indicato con $\mathbb{R}^2$ (abbreviazione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) l'insieme delle coppie ordinate (a, b) di numeri reali.
- Su queste definiamo direttamente le operazioni di somma e prodotto con le seguenti regole:

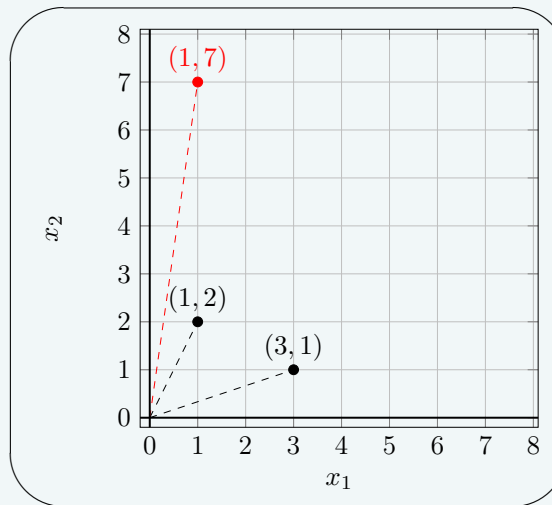
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (9.1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (9.2)$$

Esempio 9.1: somma



Esempio 9.2: prodotto



- Questa “somma” e questo “prodotto” verificano le proprietà **commutativa**, **associativa** e **distributiva**
- Osserviamo anche che, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

dunque la coppia $(0, 0)$ è **elemento neutro per la somma**. E inoltre:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$$

dunque la coppia $(1, 0)$ è **elemento neutro per il prodotto**. Abbiamo:

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

dunque $(-a, -b)$ è l'**opposto** di (a, b) . Inoltre, se $(a, b) \neq (0, 0)$ allora:

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

dunque la coppia $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ è il **reciproco** di (a, b) .

Definizione 9.1: campo dei numeri complessi

Le proprietà R_1 , R_2 sono verificate per la somma e il prodotto così definiti e perciò l'insieme $\mathbb{R}^2$ così strutturato è un campo, che chiameremo **campo dei numeri complessi** e indicheremo con $\mathbb{C}$

- Osserviamo ora che $\mathbb{C}$ contiene il sottoinsieme $\mathbb{C}_0$ delle coppie del tipo $(a, 0)$; esso è un sottocampo di $\mathbb{C}$, poiché somma e prodotto di coppie di questo tipo sono ancora coppie dello stesso tipo; infatti si ha:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{e} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$$

Inoltre $\mathbb{C}_0$ può essere ordinato ponendo $(a, 0) < (b, 0)$ se $a < b$.

- Se allora mettiamo in corrispondenza biunivoca l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}_0$, ponendo

$$(a, 0) \longleftrightarrow a$$

possiamo identificare i numeri reali $a \in \mathbb{R}$ con i numeri complessi del tipo $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$. In questo senso il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un **ampliamento** di quello dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora il numero $(0, 1) \in \mathbb{C}$. Esso ha la singolare proprietà che:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

cioè il suo quadrato coincide col numero reale -1

Definizione 9.2: unità immaginaria

La coppia $(0, 1) \in \mathbb{C}$ è indicata con la lettera “ i ” ed è chiamata **unità immaginaria**

9.2 Forma algebrica dei numeri complessi

Osserviamo che, se scriviamo un qualsiasi numero complesso $(c, 0)$ semplicemente c abbiamo:

$$(a, b) = (a, 0) + \underbrace{(0, 1)}_{=i} \cdot (b, 0) = a + ib$$

Con questa notazione le regole (9.1) e (9.2) sono le ordinarie regole del calcolo letterale, ove si tenga conto che $i^2 = -1$:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad (9.3)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (9.4)$$

Definizione 9.3: di forma algebrica, parte reale e parte immaginaria

La scrittura:

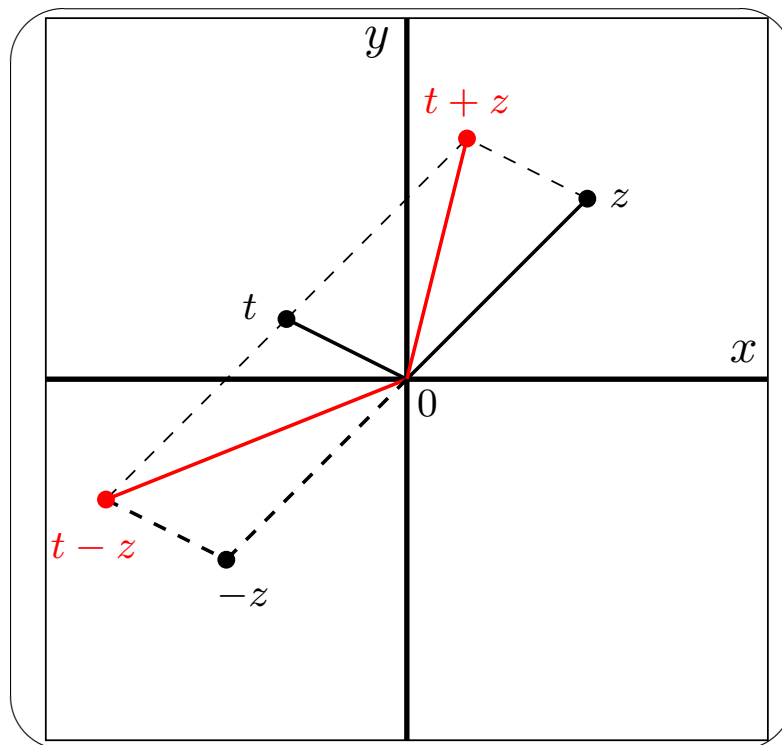
$$z = a + ib \quad (9.5)$$

è detta **forma algebrica dei numeri complessi**; a si chiama **parte reale** di z e si indica con $\Re(z)$ (o $\text{Re}(z)$) mentre b si chiama **parte immaginaria** e si indica con $\Im(z)$ (o $\text{Im}(z)$).

Piano complesso

- In un piano cartesiano, si possono rappresentare i numeri complessi $a + ib$ come punti di coordinate (a, b) . In questo contesto:

- il piano viene detto **piano complesso** o **piano di Gauss**
- gli assi x, y si dicono **asse reale** e **asse immaginario**
- i punti sull'asse reale sono i **numeri reali**
- i punti sull'asse immaginario sono i **numeri immaginari puri** (cioè del tipo ib)
- La **somma di due numeri complessi** è il numero complesso che ha per coordinate la somma delle coordinate: il significato geometrico di questo fatto è che il punto $z + t$ si costruisce a partire dai punti z, t in base alla “**regola del parallelogramma**”, illustrata nella seguente figura:



Osservazione 9.4

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato

Dimostrazione. • Abbiamo visto che $\mathbb{C}$ soddisfa gli assiomi di campo; non soddisfa però quelli di campo ordinato, ovvero non è possibile definire una relazione $\leq$ tra i numeri complessi, in modo che valgano le proprietà $R3$

- Si può dimostrare che dalle proprietà $R3$ segue che il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo, e d'altra parte, se un numero è positivo il suo opposto è negativo. Ora, in $\mathbb{C}$ si ha:

$$1^2 = 1 \quad \text{e} \quad i^2 = -1$$

Abbiamo quindi due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perché sono quadrati), e questo è assurdo (perché tra

a e $-a$ uno dev'essere negativo, se $a \neq 0$). Concludiamo che $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato. $\square$

Definizione 9.5: di coniugato

Il numero complesso $a - ib$ si dice il **complesso coniugato** di $z = a + ib$ e si indica con $\bar{z}$.

Abbiamo:

$$z + \bar{z} = 2a = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \Re(z) \quad (9.6)$$

$$z - \bar{z} = 2ib = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i \Im(z) \quad (9.7)$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - aib + iba - \underbrace{i^2}_{=-1} b^2 = a^2 + b^2 \geq 0 \quad (9.8)$$

- L'operazione di coniugio ha le seguenti elementari proprietà rispetto alla somma e al prodotto:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (9.9)$$

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (9.10)$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (9.11)$$

Definizione 9.6: di modulo

Si chiama **modulo** di $z = a + ib$ il numero reale non negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$, si indica con $|z|$.

- Se $z = a$ è reale, il suo modulo si chiama valore assoluto e si indica sempre con $|a|$ e valgono le seguenti proprietà:

a) $|z| = 0 \iff z = 0$, inoltre $|z| \geq 0$

b) $|z| = |\bar{z}|$

c) $\Re(z) \leq |z|$ $\Im(z) \leq |z|$ $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **disuguaglianza triangolare**

e) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

- Le proprietà a), b), c) si verificano immediatamente.

Dimostrazione. • Proviamo le proprietà d) ed e). Esse sono equivalenti alla seguente:

$$(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

- Ponendo $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ otteniamo:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |(a + ib) + (c + id)|^2 \\ &= |(a + c) + i(b + d)|^2 \\ &= \left(\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \right)^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 \end{aligned}$$

e quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2}_{=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}} &\leq \underbrace{(a + c)^2 + (b + d)^2}_{=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2} \\ &\leq \underbrace{\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2}_{=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}} \end{aligned}$$

Semplificando questa doppia disuguaglianza si riduce a:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \leq ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

che è equivalente alla seguente:

$$|ac + db| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

Elevando al quadrato entrambi i membri si arriva a:

$$\underbrace{(ac + db)^2}_{=a^2c^2+d^2b^2+2acbd} \leq \underbrace{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)}_{=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}$$

ovvero a

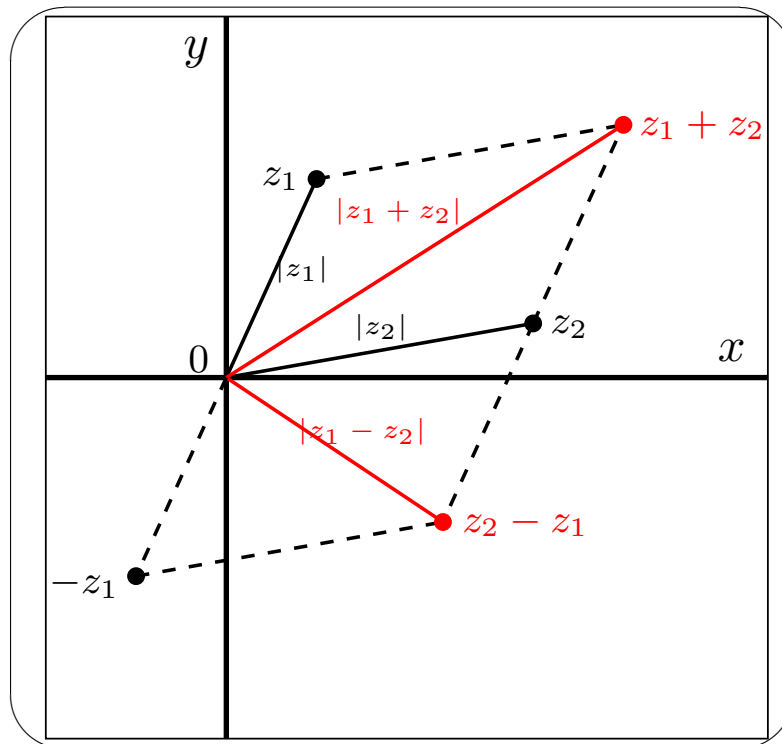
$$0 \leq -2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 = (ad - bc)^2$$

che è vera per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

□

- Geometricamente, $|z|$ rappresenta la distanza del punto (o numero complesso) z dall'origine; $|z_1 - z_2|$ rappresenta la distanza dei due punti z_1 e z_2 ; le disuguaglianze d) e e) traducono il noto teorema sulle **lunghezze dei lati di un triangolo**¹:

¹In un triangolo non degenere, la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo.



- Utilizzando i concetti ora introdotti, possiamo rappresentare in forma algebrica il rapporto fra due numeri complessi:

$$\frac{a + ib}{c + id}$$

basta moltiplicare il numeratore e il denominatore per $c - id$ e otteniamo:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{\underbrace{(c + id)(c - id)}_{=c^2+d^2}} = \frac{ac - aid + ibc - i^2bd}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + i \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

9.2.1 Equazioni nel campo complesso

- Vediamo come si può risolvere un'equazione nel campo complesso, quando questa coinvolge l'incognita $z = x + iy$ anche attraverso $\Re(z)$, $\Im(z)$, z , $|z|$.
- Illustriamo il procedimento di trasformare l'equazione in una incognita complessa in un sistema di due equazioni in due incognite reali con il seguente esempio. Il metodo prevede di passare alla parte reale e immaginaria dell'equazione.

Esempio 9.3: equazioni nel campo complesso (metodo algebrico)

- Vogliamo risolvere:

$$z^2 + i \Im z + 2 \bar{z} = 0$$

Poniamo $z = x + iy$, con x, y incognite reali, e trascriviamo l'equazione:

$$\begin{cases} z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ i \Im z = iy \\ 2\bar{z} = 2(x - iy) = 2x - 2iy \end{cases}$$

Otteniamo quindi sostituendo:

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) + (iy) + (2x - 2iy) = 0$$

- Ora, un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero. Perciò mettiamo in evidenza la parte reale e la parte immaginaria del primo membro:

$$(x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + y - 2y) = 0$$

ed uguagliamo entrambe a zero:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$

Si è così trasformata l'equazione in una incognita complessa in un sistema di due equazioni in due incognite reali.

- Risolviamo il sistema. La seconda equazione dà:

$$y = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2}$$

1. Per $y = 0$ la prima equazione diventa

$$x^2 + 2x = 0 \quad \text{che dà} \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2$$

2. Per $x = \frac{1}{2}$ la prima equazione diventa

$$-y^2 + \frac{5}{4} = 0 \quad \text{che dà} \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

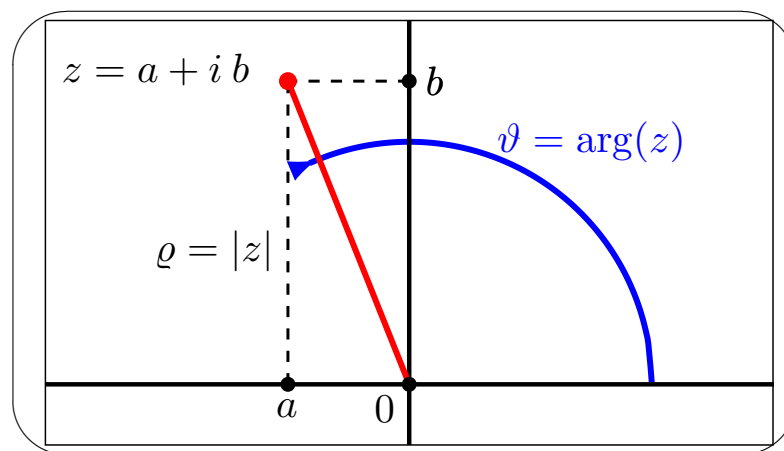
- Quindi l'equazione ha le seguenti 4 soluzioni:

$$z = 0, \quad z = -2, \quad z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Il metodo visto in quest'esempio è applicabile in linea di principio ad ogni equazione in $\mathbb{C}$ ma un generico sistema di due equazioni in due incognite è quasi sempre insolubile per via algebrica.

9.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi

- Come è noto dalla Geometria, i punti del piano possono essere individuati, oltre che dalle loro coordinate cartesiane, anche dalle **coordinate polari**:
 1. $\varrho \rightarrow$ **raggio polare**, cioè distanza del punto dall'origine
 2. $\vartheta \rightarrow$ **angolo polare**, cioè l'angolo che la retta congiungente il punto con l'origine forma con l'asse delle ascisse positive, misurato in senso antiorario.
- È chiaro che una coppia ϱ, ϑ , con $\varrho > 0$, individua un ben determinato punto del piano; invece un punto del piano individua univocamente la coordinata ϱ , ma l'angolo ϑ , misurato in radianti, è determinato solo a meno di multipli di 2π .



- Dato un numero complesso z , il suo modulo $|z|$ coincide col raggio polare ϱ del punto che ne è l'immagine sul piano complesso.
- Chiamiamo **argomento** di z , e lo indicheremo con $\arg(z)$, uno qualsiasi degli angoli ϑ relativi al punto z . In questo modo l'argomento di z non è univocamente determinato. Spesso questa indeterminazione non porta alcun inconveniente. Altre volte invece è preferibile assegnare un ben determinato argomento a un numero complesso. Ciò può ottenersi in infiniti modi, fissando un qualsiasi intervallo, di ampiezza 2π , entro il quale far variare l'angolo ϑ
- Gli intervalli più comunemente usati a questo scopo sono $[0, 2\pi)$ e $(-\pi, \pi]$; allora l'argomento di z viene detto **argomento principale**.

Esempio 9.4: argomenti di numeri complessi

- il numero $-i$ ha come argomento $-\pi/2$ oppure $3\pi/2$ oppure qualunque altro valore della forma $-\pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Il suo argomento principale sarà $3\pi/2$ se si adotta la convenzione che $\vartheta \in [0, 2\pi)$, $-\pi/2$ con la convenzione che $\vartheta \in (-\pi, \pi]$.
- I numeri reali positivi hanno argomento principale 0 e quelli negativi π con entrambe le convenzioni.

Dato il numero $z = a + ib$, dalla trigonometria ricaviamo immediatamente le relazioni tra le coordinate cartesiane a, b e quelle polari ϱ, ϑ :

$$a = \varrho \cos \vartheta \quad \text{e} \quad b = \varrho \sin \vartheta \quad (9.12)$$

Le relazioni inverse sono:

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \sin \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (9.13)$$

Definizione 9.7: di forma trigonometrica

Un numero complesso $z = a + ib$ può anche scriversi nella forma

$$z = \varrho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \quad (9.14)$$

che è detta **forma trigonometrica** dei numeri complessi.

Esempio 9.5: forma trigonometrica

Scriviamo in forma trigonometrica il numero complesso:

$$z = \sqrt{3} + i$$

Abbiamo $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$, quindi:

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

9.3.1 Formule di De Moivre

- La forma trigonometrica è comoda per esprimere prodotti e quozienti di numeri complessi. Se abbiamo infatti:

$$z_1 = \varrho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \quad z_2 = \varrho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

per il **prodotto** otteniamo:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \varrho_1 \varrho_2 \cdot \left\{ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + i (\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2) \right\} \\ &= \varrho_1 \varrho_2 \cdot \left\{ \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right\} \end{aligned} \quad (9.15)$$

per il **quoziente**, se $z_2 \neq 0$, abbiamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2},$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $(\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2)$ e, tenendo conto che $(\cos \vartheta_2)^2 + (\sin \vartheta_2)^2 = 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \left\{ (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \cdot (\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2) \right\} \\ &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \left\{ \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right\}\end{aligned}\quad (9.16)$$

- Pertanto il modulo del prodotto e del quoziente di due numeri complessi è, rispettivamente, il prodotto e il quoziente dei moduli; l'argomento è, rispettivamente, la somma e la differenza degli argomenti:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{e} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (9.17)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{e} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (9.18)$$

- La (9.15) si generalizza al caso di un numero qualsiasi di fattori $z_1, z_2, \dots, z_n$:

$$z_1 z_2 \dots z_n = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n \cdot \left\{ \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n) \right\} \quad (9.19)$$

Se poi i fattori sono tutti uguali, otteniamo:

$$z^n = \varrho^n \cdot \left\{ \cos(n \vartheta) + i \sin(n \vartheta) \right\} \quad (9.20)$$

- Queste relazioni sui prodotti e quozienti di numeri complessi vanno sotto il nome di formule di De Moivre.

Esempio 9.6: potenze di numeri complessi con le formule di De Moivre

Scrivere in forma algebrica:

$$z = (1 + i)^7$$

Determiniamo modulo e argomento di $(1 + i)$ e poi applichiamo la formula di De Moivre.

$$|1 + i| = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \quad \left(\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Quindi abbiamo:

$$|(1 + i)^7| = (\sqrt{2})^7 = 2^{\frac{7}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \arg(1 + i)^7 = \frac{7}{4} \pi$$

Di conseguenza:

$$(1 + i)^7 = 8\sqrt{2} \left(\underbrace{\cos \frac{7}{4} \pi}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin \frac{7}{4} \pi}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 8 - 8i$$

- Le formule di De Moivre permettono di dare un'interpretazione geometrica al prodotto di numeri complessi.
- Sia z , per cominciare, un numero complesso di modulo 1, quindi del tipo $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Allora, moltiplicare un numero per z significa sommare ϑ al suo argomento, cioè eseguire una **rotazione di angolo ϑ** .
- Se z ha modulo ϱ anziché 1, oltre ad eseguire una rotazione si esegue una **dilatazione di coefficiente ϱ** .

Esempio 9.7: interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi

- moltiplicare per i significa eseguire una rotazione di $\frac{\pi}{2}$;
- moltiplicare per -1 significa eseguire una rotazione di π ;
- moltiplicare per $(1 + i)$ significa eseguire una dilatazione di coefficiente $\sqrt{2}$ e una rotazione di $\frac{\pi}{4}$

Esempio 9.8: equazioni nel campo complesso (metodo trigonometrico)

- Vogliamo risolvere:

$$z^3 - |z| = 0$$

Riscriviamo l'equazione nella forma

$$z^3 = |z|$$

e poniamo $z = \varrho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ (forma trigonometrica) e trascriviamo l'equazione:

$$\begin{cases} z^3 = \varrho^3 (\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta) \\ |z| = \varrho \end{cases}$$

Otteniamo quindi sostituendo:

$$\varrho^3 (\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta) = \varrho$$

L'equazione è soddisfatta se e solo se i due membri hanno moduli uguali e argomenti che differiscono per multipli di 2π (il secondo membro ha argomento 0), ovvero:

$$\begin{cases} \varrho^3 = \varrho \\ 3\vartheta = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La prima equazione dà $\varrho = 0$ e $\varrho = 1$ (attenzione: ϱ deve essere ≥ 0 perché è il modulo del numero complesso; perciò $\varrho = -1$ non è accettabile); la seconda dà $\vartheta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Quindi:

$$z = 0, \quad z = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Esplicitamente:

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

9.3.2 Radici n -esime dei numeri complessi**Definizione 9.8:** di radice n -esima di un numero complesso

Dato un numero complesso w , diremo che z è una radice n -esima (complessa) di w se risulta $z^n = w$.

Teorema 9.9

Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e n intero ≥ 1 . Esistono precisamente n radici n -esime complesse $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ di w ; posto

$$w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{e} \quad z_k = \varrho_k (\cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k)$$

abbiamo

$$\begin{cases} \varrho_k = r^{1/n} \\ \vartheta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (9.21)$$

Dimostrazione. • I numeri z_k sono evidentemente radici di w , come risulta calcolando z_k^n mediante la formula di De Moivre. Mostriamo che non ve ne sono altre.

- Se un numero $R(\cos \psi + i \sin \psi)$ è radice n -esima di w , dovrebbe risultare

$$R^n = r \quad \text{e} \quad n\psi = \varphi + 2h\pi \quad \text{con} \quad h \in \mathbb{Z}$$

o equivalentemente:

$$R = r^{1/n} \quad \text{e} \quad \psi = \varphi/n + 2h\pi/n \quad \text{con} \quad h \in \mathbb{Z}$$

- Dando a h i valori $0, 1, \dots, n-1$ troviamo appunto i numeri z_k .
- Dando a h un qualsiasi altro valore $\bar{h}$ diverso dai precedenti, questo può scriversi nella forma $\bar{h} = k + mn$ ($m \in \mathbb{Z}$ è il quoziente e k è il resto della divisione di $\bar{h}$ per n) per cui sarebbe

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \vartheta_k + 2m\pi$$

e ritroveremmo ancora gli stessi z_k precedenti. □

Esempio 9.9: radice quinta di un numero complesso

- Calcoliamo $\sqrt[5]{1+i}$, il numero complesso $(1+i)$ ha come modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$. Le radici quinte saranno quindi:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+i} &= \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right) \right] = \\ &= \sqrt[10]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi \right) \right] \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

- Gli angoli trovati non sono notevoli, ma volendo si possono calcolare seni e coseni in modo approssimato, usando una calcolatrice.

- Per le radici complesse si usa purtroppo una notazione un po' ambigua, la stessa in uso per indicare la radice aritmetica; si indica cioè con $\sqrt[n]{z}$ o $z^{1/n}$ l'insieme delle n radici complesse di z .
- Ciò può creare confusione quando z è reale. Infatti il simbolo $\sqrt{4}$, inteso come radice aritmetica di 4, è 2; inteso come radice complessa di 4 è l'insieme dei due numeri $+2$ e -2 .

Esempio 9.10: radice cubica di un numero complesso

- Calcoliamo $\sqrt[3]{-1}$, il numero complesso (-1) ha come modulo 1 e argomento π . Le radici cubiche saranno quindi:

$$\sqrt[3]{-1} = \underbrace{\sqrt[3]{1}}_{=1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

ovvero i numeri z_k della forma:

$$\cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k \quad \text{con } \vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{e } k = 0, 1, 2$$

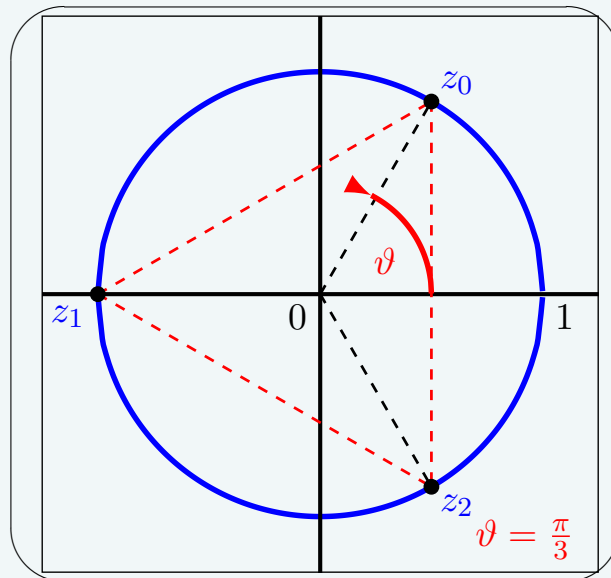
- Esplicitamente abbiamo:

$$\begin{cases} z_0 = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \\ z_1 = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \\ z_2 = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \\ \quad = \cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \end{cases}$$

- La disposizione delle radici dei numeri complessi nel piano di Gauss non è casuale.
- Infatti se $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ le radici n -esime $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ di w si trovano ai vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $r^{1/n}$, con il vertice z_0 posto nel punto di argomento $\vartheta = \varphi/n$.

Esempio 9.11: radici nel piano di Gauss

- Nella figura sono rappresentate le radici cubiche di -1 : z_0, z_1, z_2 dell'esercizio precedente:

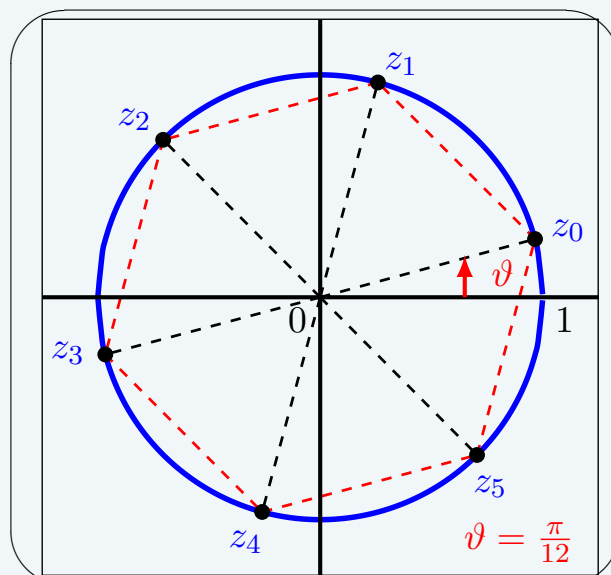


- Nella figura sono rappresentate le radici seste di i : $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$,

$$\sqrt[6]{i} = \underbrace{\sqrt[6]{1}}_{=1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2 \cdot 6} + \frac{2}{6} k \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2 \cdot 6} + \frac{2}{6} k \pi \right) \right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ovvero i numeri z_k della forma:

$$\cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k \quad \text{con } \vartheta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} k \pi \quad \text{e } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

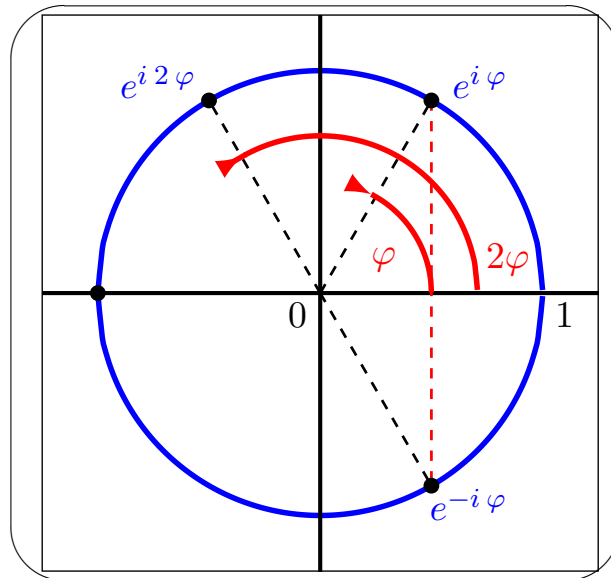


9.3.3 Forma esponenziale dei numeri complessi

- È utile la notazione

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{con } \varphi \in \mathbb{R}$$

dove e è la costante di Nepero.



Con tale notazione la *forma trigonometrica* si riscrive in modo equivalente come:

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg(z) \quad \text{con } z \neq 0$$

Questa notazione si chiama **forma esponenziale** dei numeri complessi.

- Tale forma è utile in quanto abbiamo:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

ovvero è molto semplice fare i prodotti fra numeri complessi.

Le **formule di De Moivre** diventano:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

La notazione esponenziale è largamente usata nelle applicazioni perché facilita notevolmente le manipolazioni che coinvolgono grandezze trigonometriche.

Abbiamo:

$$e^{2k\pi i} = 1 \quad \text{e} \quad e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{inoltre} \quad |e^{i\varphi}| = 1$$

Abbiamo inoltre:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

Riscrivendo otteniamo la **formula di Eulero**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che lega in modo semplice cinque tra le più importanti costanti: 0, 1, i , π , e .

La notazione esponenziale si può generalizzare coerentemente con le proprietà delle potenze, definendo l'**esponenziale complesso**:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$$

- Dalla definizione di forma esponenziale segue che

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

e si ottiene facilmente:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad \text{con } \varphi \in \mathbb{R}$$

Queste formule permettono di esprimere seno e coseno come combinazione di esponenziali complessi.

9.4 Equazioni di secondo grado

- Un'**equazione di secondo grado** o **quadratica** ad un'incognita x **reale** è un'equazione algebrica in cui il grado massimo con cui compare l'incognita è 2, ed è sempre riconducibile alla forma:

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (9.22)$$

dove a, b e c sono numeri reali.

Le soluzioni sono dette anche **radici** o **zeri** dell'equazione.

Osservazione 9.10: formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

Data una equazione di secondo grado $a x^2 + b x + c = 0$ ($a \neq 0$), gli zeri o radici sono:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (9.23)$$

- Un'equazione di secondo grado viene detta "equazione quadratica completa" quando tutti i suoi coefficienti sono diversi da 0. Essa viene risolta con il cosiddetto **metodo del completamento del quadrato**, così chiamato perché si modifica l'equazione fino a ottenere al suo primo membro il quadrato di un binomio.

Dimostrazione. Isolando il termine noto, otteniamo:

$$a x^2 + b x = -c$$

$$\underbrace{4 a^2 x^2}_{=(2 a x)^2} + \underbrace{4 a b x}_{=2 (2 a x) b} = -4 a c$$

$$(2 a x)^2 + 2 (2 a x) b + b^2 = b^2 - 4 a c$$

$$(2 a x + b)^2 = \underbrace{b^2 - 4 a c}_{:=\Delta \text{ (discriminante)}}$$

$$2 a x + b = \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

□

- Se il discriminante Δ è negativo non ci sono soluzioni reali.
- Se $\Delta = 0$, la formula risolutiva diventa:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

pertanto vi è una sola radice di *molteplicità due*.

- Se $\Delta < 0$, infine, l'equazione non ha soluzioni reali. In particolare le soluzioni sono sempre due, ma appartengono al campo dei numeri complessi: esse sono **due numeri complessi coniugati** e si calcolano tramite le due formule:

$$x_+ = \frac{-b}{2a} + i \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right)$$

$$x_- = \frac{-b}{2a} - i \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right)$$

dove i è l'**unità immaginaria** ($i^2 = -1$).

Un'equazione di secondo grado ad un'incognita z **complessa** ha la seguente forma

$$a z^2 + b z + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (9.24)$$

dove a, b e c sono numeri complessi. Si risolve con la stessa formula che con l'incognita reale:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \quad (9.25)$$

dove la radice quadrata è intesa in senso complesso (il segno $\pm$ è superfluo, perché nel campo complesso la radice denota due numeri, uno opposto dell'altro)

Esempio 9.12: equazioni di secondo grado nel campo complesso

- Vogliamo risolvere:

$$z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0 \quad a = 1, b = 2i, c = -\sqrt{3}i$$

abbiamo (passando alla forma trigonometrica per sviluppare la radice):

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2i \pm \sqrt{2^2 i^2 + 2^2 \sqrt{3}i}}{2} = \frac{-2i \pm 2\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}}{2} = -i \pm \sqrt{-1 + \sqrt{3}i} \\ &= -i \pm \sqrt{2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = -i \pm \sqrt{2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)} \\ &= -i \pm \sqrt{2} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(-1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \end{aligned}$$

- Il precedente teorema ci dice che un polinomio del tipo $z^n + a$ (con a complesso) ha in $\mathbb{C}$ esattamente n radici; nel campo reale invece l'equazione $x^n + a = 0$ può avere due, una, o nessuna radice (esempi: $x^2 - 1 = 0, x^3 - 1 = 0, x^2 + 1 = 0$); ora sappiamo che tale equazione ha sempre n radici in $\mathbb{C}$, ma solo occasionalmente una o due di esse stanno in $\mathbb{R}$.
- Il risultato è di portata ben più generale, come afferma il seguente teorema, di cui non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 9.11: fondamentale dell'algebra

Un'equazione polinomiale della forma

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

con coefficienti complessi qualsiasi ha precisamente n radici in $\mathbb{C}$, se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità^a.

^aSe $P(z)$ è un polinomio in z di grado n e z_0 è una sua radice, si dice che z_0 è di molteplicità k (k intero, ≥ 1) se vale la formula $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, dove Q è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$.

Coseni e seni dei principali angoli

