



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi Matematica 1

Volume 1 — Logica e metodi di dimostrazione

Il primo volume: il linguaggio e i metodi con cui si ragiona in analisi. Basi di logica e tecniche di dimostrazione: simboli logici, implicazioni universali, legge della contronominale, condizioni necessarie e sufficienti, dimostrazioni per assurdo, logica e insiemi. Il principio di induzione e le dimostrazioni per induzione. Definizioni, teoremi con dimostrazione, esempi svolti; gli esercizi della parte, con le soluzioni, sono nel volume Esercizi 1.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/
github.com/fabiofurini/analisi-matematica-1

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Basi di logica e tecniche di dimostrazione	2
1.1	Simboli logici	2
1.2	Implicazioni universali e dimostrazioni	2
1.3	Legge della contronominale	5
1.4	Condizioni sufficienti e condizioni necessarie	7
1.5	Dimostrazioni per assurdo	10
1.6	Logica e insiemi	11
2	Principio di induzione	15
2.1	Il principio di induzione	15
2.2	Dimostrazioni basate sul principio di induzione	16



Basi di logica e tecniche di dimostrazione

1.1 Simboli logici

- a) il simbolo " $\forall$ " si chiama *quantificatore universale* e si legge "per ogni", "per tutti" , "per ciascuno"
- b) il simbolo " $\exists$ " si chiama *quantificatore esistenziale* e si legge "esiste", "esistono"
- c) il simbolo " $\Rightarrow$ " si chiama *implicazione logica* e si legge "implica" o "se ... allora"

- a) il simbolo " $:$ " si legge "tale che"
- b) il simbolo " $\in$ " si legge "appartiene"
- c) il simbolo " $\notin$ " si legge "non appartiene"

- a) il simbolo " $\vee$ " si chiama *disgiunzione logica* e si legge "o", "oppure" , "or"
- b) il simbolo " $\wedge$ " si chiama *congiunzione logica* e si legge "e", "and"
- c) il simbolo " $\neg$ " si chiama *negazione logica* e si legge "non", "not".

1.2 Implicazioni universali e dimostrazioni

Predicati (o proprietà) e **proposizioni** (o enunciati)

- Consideriamo la seguente affermazione:

"il numero naturale n è dispari" (1.1)

e chiediamoci se è vera. Ovviamente la risposta è: "dipende da n ". Infatti nella (1.1) il simbolo n rappresenta una variabile che può assumere valori diversi e rendere l'affermazione **vera** o **falsa**.

Una frase di questo tipo si chiama **predicato** (o *proprietà*): la sua verità o falsità dipende dai valori della o delle **variabili** che in essa compaiono.

- Consideriamo ora la seguente affermazione:

“per ogni numero naturale n , se n è dispari allora n^2 è dispari” (1.2)

che possiamo scrivere più formalmente nel modo seguente:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari}) \quad (1.3)$$

Si dice in questo caso che la variabile n non è libera, ma vincolata dal *quantificatore* $\forall$. Come conseguenza si ha che la (1.3) è vera o falsa “una volta per tutte” e prende il nome di **proposizione** (o *enunciato*).

In particolare, i componenti della (1.3) sono l'insieme $\mathbb{N}$, due predicati definiti su $\mathbb{N}$ dati da

$$p(n) : “n \text{ dispari}” \text{ e } q(n) : “n^2 \text{ dispari}”$$

e l'implicazione

$$p(n) \Rightarrow q(n).$$

Definizione 1.1: di implicazione universale

In generale, un enunciato che presenti un **insieme** A , **due predicati** $p(x)$ e $q(x)$ il cui argomento x varia in A e la **struttura logica**:

$$\forall x \in A \ (p(x) \Rightarrow q(x)) \quad (1.4)$$

prende il nome di **implicazione universale**.

La maggior parte dei **teoremi** è costituita da **implicazioni universali**, nelle quali il predicato $p(x)$ fa la parte dell'**ipotesi** e il predicato $q(x)$ fa la parte della **tesi**.

- In particolare la (1.3) è una proposizione (o un enunciato):

Proposizione 1.2

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari}) \quad (1.5)$$

In questo caso ci si convince facilmente che la proposizione sia vera, ma come si fa a dimostrarlo rigorosamente?

- Per esempio, è sufficiente osservare che 3 è dispari e $3^2 = 9$ è dispari per affermare che la proposizione sia vera? Certamente no, poiché la proposizione pretende che l'implicazione universale valga per ogni numero naturale. Tuttavia, i numeri dispari sono infiniti: come facciamo a provare un'implicazione universale per infiniti numeri?
- Il procedimento chiave è questo: si considera il generico n che soddisfa l'ipotesi (essere dispari) e si dimostra che n soddisfa la tesi (il suo quadrato è dispari).

Vediamo come si opera per dimostrare la precedente proposizione:

Dimostrazione. Sia n dispari e proviamo che allora n^2 è dispari.

Qualunque numero dispari si può scrivere nella forma $2k + 1$, con un opportuno $k \in \mathbb{N}$. Osserviamo inoltre che $2k$ è un numero pari per qualunque $k \in \mathbb{N}$.

Sia dunque $n = 2k + 1$ un numero dispari ($k \in \mathbb{N}$), occorre quindi poter scrivere n^2 come un numero intero pari più uno. Si ha:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Poiché $2(2k^2 + 2k)$ è un intero pari, allora n^2 è dispari. □

Per dimostrare la correttezza di un'implicazione universale come la (1.4), si considera il generico x che soddisfi l'ipotesi $p(x)$ e si cerca di dimostrare che la tesi $q(x)$ sia vera.

- Proviamo ora una simile relazione per i numeri pari:

Proposizione 1.3

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ pari} \Rightarrow n^2 \text{ pari}) \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Sia n pari e proviamo che allora n^2 è pari.

Sia dunque $n = 2k$ un numero pari ($k \in \mathbb{N}$), occorre quindi poter scrivere n^2 come un numero intero pari. Si ha:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Poiché $2(2k^2)$ è un intero pari, allora n^2 è pari. □

1.2.1 Controesempi

I **controesempi** sono una tecnica importante per dimostrare la **falsità** di un'implicazione universale.

- Chiediamoci, per esempio, se la seguente implicazione universale sia vera o falsa:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ primo} \Rightarrow n \text{ dispari}) \quad (1.7)$$

Un attimo di riflessione mostra che **questa proposizione è falsa**. Infatti, il numero 2 è primo ma è pari.

Per poter affermare che un'implicazione universale sia vera è necessaria una dimostrazione (un esempio non è sufficiente), mentre per dimostrare che un'implicazione universale sia falsa basta un esempio contrario.

- L'implicazione universale pretende che ogni x che soddisfi l'ipotesi soddisfi anche la tesi: perciò, se troviamo anche un solo esempio di x che soddisfi l'ipotesi ma non la tesi, questo significa che l'implicazione universale sia falsa. Non “falsa in un caso”, ma semplicemente “falsa”, perché l'implicazione universale è vera o falsa una volta per tutte.

Definizione 1.4: di controesempio

*In generale, un esempio che soddisfi l'ipotesi ma non la tesi di una implicazione universale, e che quindi ne dimostri la falsità, si chiama **controesempio**.*

- La dimostrazione formale che la precedente implicazione universale sia falsa è la seguente:

Dimostrazione. Il numero 2 è un controesempio per l'implicazione universale: “Per ogni numero naturale n , se n è primo allora n è dispari”.

□

La negazione della proposizione

“per ogni $x \in A$, se vale $p(x)$ allora vale $q(x)$ ”

$$\forall x \in A \quad (p(x) \Rightarrow q(x))$$

è la proposizione

“esiste $x \in A$, per cui vale $p(x)$ e non vale $q(x)$ ”

$$\exists x \in A \quad (p(x) \wedge \neg q(x))$$

Questo x particolare costituisce un **controesempio**.

1.3 Legge della contronominale

- È una tecnica di dimostrazione indiretta

L'implicazione universale

$$\forall x \in A \quad (p(x) \Rightarrow q(x)) \tag{1.8}$$

è logicamente equivalente a

$$\forall x \in A \quad (\text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x)) \tag{1.9}$$

La seconda implicazione si dice la **contronominale** della prima.

- Ad esempio: poiché sappiamo che vale l'implicazione universale (proposizione 1.5)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari})$$

vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.5

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}) \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Sia n^2 pari e proviamo che allora n è pari. Dimostriamo la (1.10) basandoci sulla veridicità della (1.5).

Se n non è pari allora è dispari e quindi n^2 è dispari per la (1.5). Questo caso contraddice l'ipotesi che n^2 sia pari (quindi non può accadere).

Di conseguenza n è pari e la (1.10) è dimostrata. □

- Il ragionamento fatto nella precedente dimostrazione ha una validità generale, e mostra appunto che se è vera la (1.8) allora è vera la (1.9); Inoltre, se è vera la seconda allora è vera la prima (perché “non non $p(x)$ ” è logicamente equivalente a $p(x)$), per cui le due sono logicamente equivalenti.

L'equivalenza tra (1.8) e (1.9) è detta **legge della contronominale**. È un metodo di *dimostrazione indiretta* che consiste nel provare la (1.9) per mostrare che la (1.8) sia vera (prevede di dimostrare che la negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi).

Nell'usare la legge della contronominale occorre saper costruire la **corretta negazione** di una proposizione o proprietà data.

- Dati $p(x)$ e $q(x)$, due predicati o proprietà qualsiasi, riportiamo schematicamente alcune **regole** con cui si costruisce la **negazione** di una proposizione o proprietà.

La negazione di

“per ogni $x \in A$ vale $p(x)$ ”

$$\forall x \in A \quad (p(x))$$

è

“esiste $x \in A$ per cui non vale $p(x)$ ”

$$\exists x \in A \quad (\neg p(x))$$

La negazione di

“esiste $x \in A$ per cui vale $p(x)$ ”

è

$$\exists x \in A \quad (p(x))$$

“per ogni $x \in A$ non vale $p(x)$ ”

$$\forall x \in A \quad (\neg p(x))$$

La negazione di

“vale $p(x)$ e vale $q(x)$ ”

$$(p(x) \wedge q(x))$$

è

“non vale $p(x)$ o non vale $q(x)$ ”

$$(\neg p(x) \vee \neg q(x))$$

La negazione di

“vale $p(x)$ o vale $q(x)$ ”

$$(p(x) \vee q(x))$$

è

“non vale $p(x)$ e non vale $q(x)$ ”

$$(\neg p(x) \wedge \neg q(x))$$

1.4 Condizioni sufficienti e condizioni necessarie

Definizione 1.6: di condizione sufficiente

Una **condizione sufficiente** è quella che, se soddisfatta, garantisce la verità della proposizione.

Definizione 1.7: di condizione necessaria

Una **condizione necessaria** è quella che deve essere soddisfatta affinché la proposizione sia vera.

Dati $p(x)$ e $q(x)$, due predicati o proprietà qualsiasi. Se $p(x)$ implica $q(x)$, formalmente:

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

allora:

- $p(x)$ è **condizione sufficiente** a $q(x)$
- $q(x)$ è **condizione necessaria** a $p(x)$

- Abbiamo visto che la seguente implicazione universale è vera (proposizione (1.5)):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari})$$

Quindi “ n dispari” è condizione sufficiente a “ n^2 dispari” e “ n^2 dispari” è condizione necessaria per “ n dispari”.

- Proviamo ora che anche la seguente proposizione sia vera:

Proposizione 1.8

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n^2 \text{ dispari} \Rightarrow n \text{ dispari}) \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Sia n^2 dispari e proviamo che allora n sia dispari.

Sia dunque $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ un numero dispari ($k \in \mathbb{N}$), dato che $2(2k^2 + 2k)$ è un numero pari). Occorre quindi poter scrivere n come un numero intero pari più uno. Si ha:

$$n = \sqrt{2(2k^2 + 2k) + 1} = \sqrt{4k^2 + 4k + 1} = \sqrt{(2k + 1)^2} = 2k + 1.$$

Poiché $2k + 1$ è un intero dispari, allora n è dispari.

□

In questo modo abbiamo provato che “ n^2 dispari” è condizione necessaria e sufficiente per “ n dispari” e anche che “ n dispari” è condizione necessaria e sufficiente per “ n^2 dispari”:

Proposizione 1.9

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ dispari} \iff n^2 \text{ dispari}) \quad (1.12)$$

- Abbiamo visto che la seguente implicazione universale è vera (proposizione (1.6)):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ pari} \Rightarrow n^2 \text{ pari})$$

Quindi “ n pari” è condizione sufficiente a “ n^2 pari” e “ n^2 pari” è condizione necessaria per “ n pari”.

- Proviamo ora che anche la seguente proposizione sia vera (dimostrazione diretta, senza usare la legge della contronominale come visto in precedenza (1.10)):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari})$$

Dimostrazione. Sia n^2 pari e proviamo che allora n è pari.

Sia dunque $n^2 = 2 (2 k^2)$ un numero pari ($k \in \mathbb{N}$), occorre quindi poter scrivere n come un numero intero pari. Si ha:

$$n = \sqrt{2 (2 k^2)} = \sqrt{4 k^2} = 2 k.$$

Poiché $2 k$ è un intero pari, allora n è pari. □

In questo modo abbiamo provato che “ n^2 pari” è condizione necessaria e sufficiente per “ n pari” e anche che “ n pari” è condizione necessaria e sufficiente per “ n^2 pari”:

Proposizione 1.10

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ pari} \iff n^2 \text{ pari}) \quad (1.13)$$

Esempio 1.1: condizioni necessarie e sufficienti

Ad esempio, per una matrice quadrata di numeri reali, il fatto che il suo determinante sia diverso da zero è condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia invertibile.

Proposizione 1.11

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ primo} > 2 \Rightarrow n \text{ dispari}) \quad (1.14)$$

Dimostrazione. Sia $n > 2$ un numero primo e proviamo che allora n è dispari.

Se n non è dispari, è pari. Ma nessun numero pari maggiore di due è primo, fatto che contraddice l’ipotesi che n sia primo e maggiore di due (quindi questo caso non può accadere).

Di conseguenza n è dispari. □

- Quindi “ n dispari” è condizione necessaria per “ n primo > 2 ” e “ n primo > 2 ” è condizione sufficiente a “ n dispari”.
- Però “ n dispari” non implica “ n primo > 2 ”, dato che per esempio il numero 9 non è primo (controesempio). Ovvero:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ dispari} \not\Rightarrow n \text{ numero primo maggiore di } 2)$$

Quindi “ n dispari” è condizione necessaria ma non sufficiente per “ n primo > 2 ” e “ n primo > 2 ” è condizione sufficiente ma non necessaria a “ n dispari”.

Proposizione 1.12

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ divisibile per } 6 \Rightarrow n \text{ pari}) \quad (1.15)$$

Dimostrazione. Sia n un numero divisibile per sei e proviamo che allora n è pari.

Se n non è pari, è dispari. Ma nessun numero dispari è divisibile per sei, fatto che contraddice l'ipotesi che n sia divisibile per sei (quindi questo caso non può accadere).

Di conseguenza n è pari. □

- Quindi “ n pari” è condizione necessaria per “ n divisibile per 6” e “ n divisibile per 6” è condizione sufficiente a “ n pari”.
- Però “ n pari” non implica “ n divisibile per 6”, dato che per esempio il numero 2 è pari ma non è divisibile per sei (controesempio). Ovvero:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ pari} \not\Rightarrow n \text{ divisibile per } 6)$$

Quindi “ n pari” è condizione necessaria ma non sufficiente per “ n divisibile per 6” e “ n divisibile per 6” è condizione sufficiente ma non necessaria a “ n pari”.

Esempio 1.2: condizioni necessarie/sufficienti ma non sufficienti/necessarie

Essere un quadrato implica essere un rettangolo:

$$\text{essere un quadrato} \Rightarrow \text{essere un rettangolo}$$

dato che tutti i quadrati sono rettangoli.

Quindi “essere un rettangolo” è condizione necessaria per “essere un quadrato” ed “essere un quadrato” è condizione sufficiente ad “essere un rettangolo”.

Ma essere un rettangolo non implica essere un quadrato

$$\text{essere un rettangolo} \not\Rightarrow \text{essere un quadrato}$$

perché esistono dei rettangoli che non sono dei quadrati.

Quindi “essere un rettangolo” non è condizione sufficiente (ma è necessaria) per “essere un quadrato” ed “essere un quadrato” non è condizione necessaria (ma è sufficiente) per “essere un rettangolo”.

1.5 Dimostrazioni per assurdo

- È una tecnica di dimostrazione indiretta

Definizione 1.13: di dimostrazione per assurdo

In generale, la **dimostrazione per assurdo** consiste nel supporre vera l'ipotesi del teorema e la negazione della tesi, e dedurre da questi fatti una contraddizione di qualsiasi tipo.

- Esempifichiamo la **dimostrazione per assurdo**, col seguente teorema.

Teorema 1.14

Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$.

Possiamo scrivere $r = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

Inoltre, possiamo supporre che la frazione $\frac{n}{m}$ sia già ridotta ai minimi termini, ossia “semplificata” (in altre parole: n, m non contengono fattori comuni).

Abbiamo dunque la catena di implicazioni:

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

$$n^2 = 2 m^2$$

per cui n^2 è pari; ma allora per la (1.13) anche n è pari e possiamo scrivere $n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Quindi la relazione $n^2 = 2 m^2$ si può riscrivere come:

$$(2k)^2 = 2 m^2$$

$$4 k^2 = 2 m^2$$

$$m^2 = 2 k^2.$$

Per cui m^2 è pari. Ma allora per la (1.13) anche m è pari.

Dunque sia n che m sono pari, e questo è **assurdo**, perché avevamo supposto che la frazione $\frac{n}{m}$ fosse già stata semplificata.

La dimostrazione si trova negli Elementi di Euclide (circa 300 a. C.).

□

1.6 Logica e insiemi

Gli insiemi sono trattati in dettaglio nel capitolo “**Insiemi**” della Parte 2 (volume 2); qui ne usiamo solo le nozioni di base.

Il linguaggio logico e il linguaggio insiemistico sono due facce della stessa medaglia.

1.6.1 Implicazione logica e inclusione insiemistica

- Esiste un parallelismo tra la relazione di inclusione insiemistica e l'implicazione logica. Per spiegarlo, consideriamo l'implicazione universale:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ divisibile per } 4 \Rightarrow n \text{ divisibile per } 2) \quad (1.16)$$

Se indichiamo con:

$$D_4 = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ è divisibile per } 4 \} \quad \text{e} \quad D_2 = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ è divisibile per } 2 \}$$

possiamo osservare che l'implicazione universale scritta sopra è equivalente all'affermazione:

$$D_4 \subseteq D_2$$

Infatti, questa inclusione significa che ogni elemento appartenente a D_4 appartiene anche a D_2 , cioè che ogni numero naturale divisibile per 4 è anche divisibile per 2.

L'implicazione universale:

$$\text{“per ogni } x \in A, \text{ se vale } p(x) \text{ allora vale } q(x)\text{”}$$

è equivalente all'inclusione insiemistica:

$$\{ x \in A : p(x) \text{ è vera} \} \subseteq \{ x \in A : q(x) \text{ è vera} \}.$$

1.6.2 Uguaglianza fra insiemi e implicazioni universali

- Dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi, i.e., $A = B$, comporta dimostrare due implicazioni universali. Formalmente:

$$\forall x \quad (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{e} \quad \forall x \quad (x \in B \Rightarrow x \in A). \quad (1.17)$$

- Affermare che $A \subsetneq B$ significa affermare che “Ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B ed esiste un elemento di B che non appartiene ad A ”. Formalmente:

$$\forall x \quad (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{e} \quad \exists x \in B : x \notin A. \quad (1.18)$$

1.6.3 Operazioni tra insiemi e operazioni logiche

Esiste una relazione tra operazioni sugli insiemi e operazioni logiche. Precisamente:

1. L'**intersezione insiemistica** è definita mediante la “e” (**congiunzione logica**).
2. L'**unione insiemistica** è definita mediante la “o” (**disgiunzione logica**).

3. La **differenza insiemistica** e l'**operazione di complementazione** sono definite mediante il “non” (**negazione logica**).

- Le proprietà distributive dell'unione e dell'intersezione degli insiemi:

Osservazione 1.15: proprietà distributive (insiemi)

Dati tre insiemi A, B e C abbiamo:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Si possono riscrivere in termini di predicati osservando che il simbolo dell'intersezione $\cap$ equivale alla congiunzione $\wedge$ (“and”) e che il simbolo dell'unione $\cup$ equivale alla disgiunzione $\vee$ (“or”).

Osservazione 1.16: proprietà distributive (predicati)

Dati tre predicati $p(x), q(x)$ e $r(x)$ abbiamo:

$$p(x) \wedge (q(x) \vee r(x)) = (p(x) \wedge q(x)) \vee (p(x) \wedge r(x))$$

$$p(x) \vee (q(x) \wedge r(x)) = (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x)).$$

- Le leggi di DeMorgan:

Proposizione 1.17: Leggi di DeMorgan (insiemi)

Dati gli insiemi $B, C \subseteq U$, abbiamo

$$\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$$

$$\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$$

- Si possono riscrivere in termini di predicati osservando che l'operazione di complementazione equivale alla negazione $\neg$ (“not”).

Proposizione 1.18: leggi di DeMorgan (predicati)

Dati due predicati $q(x)$ e $r(x)$ abbiamo:

$$\neg(q(x) \wedge r(x)) = \neg q(x) \vee \neg r(x)$$

$$\neg(q(x) \vee r(x)) = \neg q(x) \wedge \neg r(x)$$

Principio di induzione

2.1 Il principio di induzione

- Presentiamo ora un metodo dimostrativo, detto dimostrazione per induzione. Questo procedimento si può applicare a teoremi con la struttura seguente:

“ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, vale la proprietà $p(n)$ ”

- Il numero n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera; se $n_0 = 0$ il teorema afferma semplicemente che la proprietà è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione per induzione consiste nei due passi seguenti:

1. Si dimostra che $p(n)$ sia vero per $n = n_0$ (**primo passo dell'induzione**).
2. Si dimostra che, se n è un generico numero naturale $\geq n_0$, dal fatto che $p(n)$ sia vero segue che $p(n + 1)$ sia vero (**passo induttivo**).

Si può allora concludere che per ogni $n \geq n_0$, $p(n)$ è vero.

- La validità di questo metodo dimostrativo, *intuitivamente*, si basa su questo fatto:
 1. Per il punto 1, sappiamo che $p(n_0)$ è vera. Supponiamo ad esempio $n_0 = 1$: sappiamo quindi che $p(1)$ è vera (questo va dimostrato esplicitamente).
 2. Per il punto 2, poiché è vera $p(1)$, sarà vera $p(2)$: infatti abbiamo dimostrato che qualunque sia n , se è vera $p(n)$ è vera anche $p(n + 1)$. Ma allora, poiché è vera $p(2)$, sarà vera $p(3)$; ma allora è vera $p(4)$, ... e così via, dunque è vera $p(n)$ per ogni $n \geq 1$.
- Concretamente, la dimostrazione si articola in due fasi.
 1. Dimostrare direttamente $p(n_0)$;
 2. Assumere come ipotesi $p(n)$ (**ipotesi induttiva**) e provare $p(n + 1)$.

- È questo il punto delicato, spesso soggetto a equivoci. “Assumere per ipotesi” $p(n)$ non significa assumere come ipotesi la tesi. Quello che si deve provare è che:

“ per ogni $n \geq n_0$, se è vera $p(n)$ allora è vera anche $p(n+1)$ ”

e non

“ se per ogni n è vera $p(n)$, allora è vera anche $p(n+1)$ ”

2.2 Dimostrazioni basate sul principio di induzione

2.2.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Osservazione 2.1: disuguaglianza di Bernoulli

Per ogni intero $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, vale:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa:

$$(1+x)^0 \geq 1+0x \quad \text{cioè} \quad 1 \geq 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

e inoltre abbiamo

$$(1+x) \geq 0 \quad \text{dato che} \quad x \geq -1.$$

Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\ &\geq (1+x) \cdot (1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è sfruttato il fatto che $nx^2 \geq 0$.

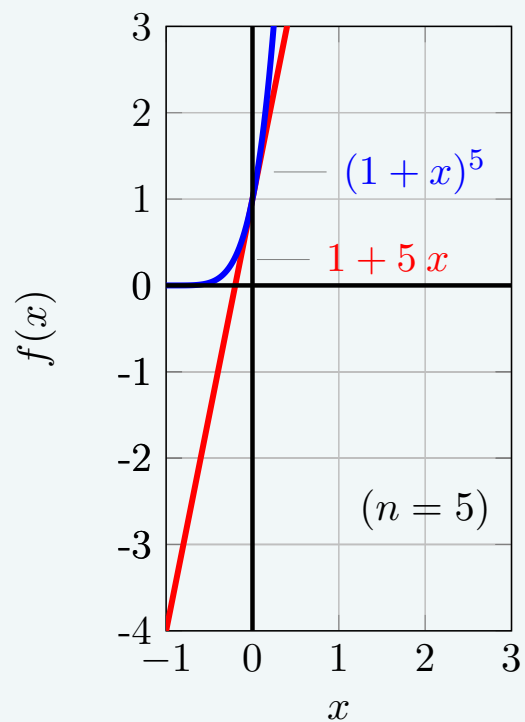
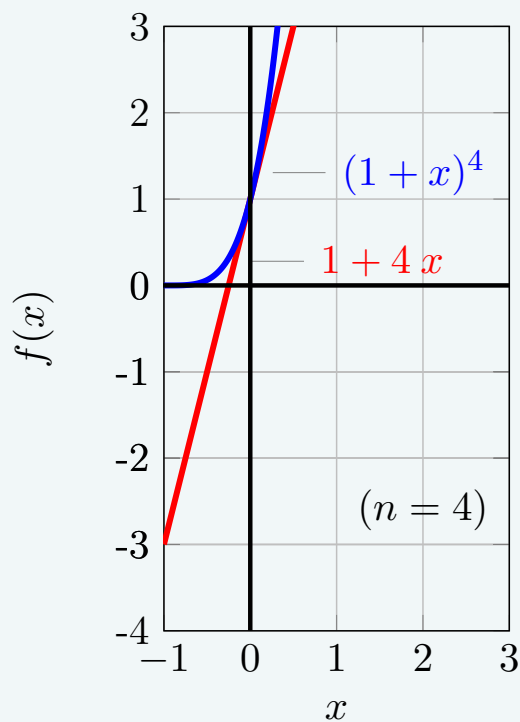
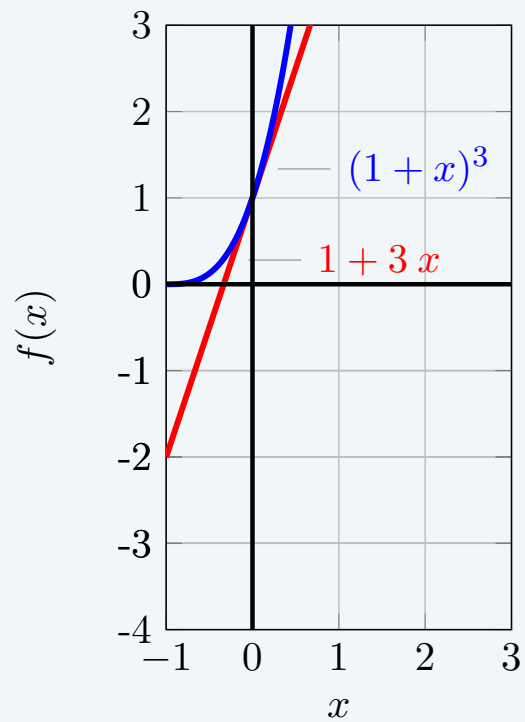
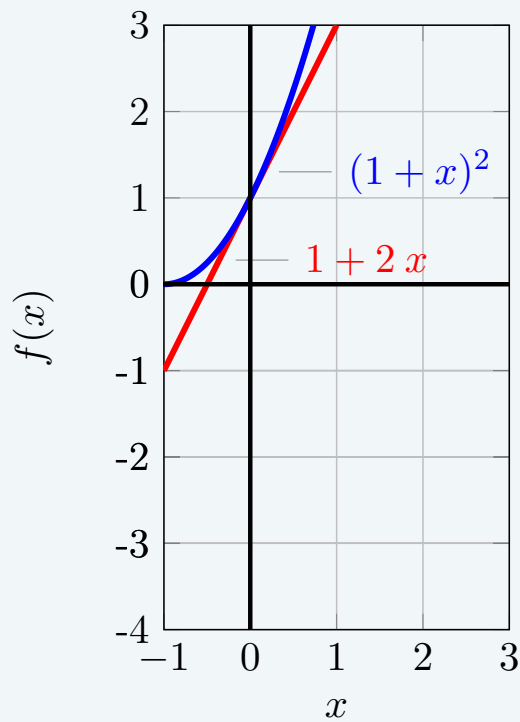
La catena di disuguaglianze mostra che, per $n+1$, abbiamo

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

□

Esempio 2.1: Disuguaglianza di Bernoulli



2.2.2 Alcune sommatorie importanti

Osservazione 2.2: somma dei primi n numeri naturali

Per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

□

Osservazione 2.3: somma dei primi n numeri dispari

Per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2 \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=0}^0 (2k+1) = 1^2 \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n+1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) + 2n+1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

La seconda sommatoria coincide con la prima, con una traslazione dell'indice ($k \rightarrow k+1$):

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2(k+1)-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$$

□

Osservazione 2.4: somma dei primi n numeri pari

Per ogni intero $n \geq 1$, vale:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 2k = 1 \cdot 2 \quad \text{cioè} \quad 2 = 2$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n + 1)$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^n 2k + 2(n + 1) = n^2 + n + 2(n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n + 1)^2 + (n + 1) = (n + 1)((n + 1) + 1) \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.

□

2.2.3 Somma dei termini della progressione geometrica

Osservazione 2.5: somma dei primi n termini della progressione geometrica ($a = 1$)

Dato $q \in \mathbb{R}$, per ogni intero $n \geq 1$ vale (con la convenzione $0^0 = 1$ per il caso $q = 0$):

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{se } q \neq 1 \\ n & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$\sum_{k=1}^1 q^{k-1} = \frac{q^1 - 1}{q - 1} \quad \text{cioè} \quad 1 = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} &= \sum_{k=1}^n q^{k-1} + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n \\ &= \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.

□

2.2.4 Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

Osservazione 2.6: disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

Per ogni intero $n \geq 2$ e per ogni vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, vale:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \quad (2.3)$$

- La disuguaglianza (2.3) afferma che la *media aritmetica* è maggiore o uguale alla *media geometrica*.
- Se $a_i = a$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, abbiamo:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = \frac{n a}{n} = a \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

e la media aritmetica e la media geometrica sono uguali (è l'unico caso in cui vale l'uguaglianza).

Dimostrazione. Per induzione su n .

- **Primo passo dell'induzione**

Sia $n = 2$. Poiché entrambi i membri sono non negativi, possiamo elevarli al

quadrato:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} &\iff \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 a_2 \\
 &\iff \frac{a_1^2 + 2 a_1 a_2 + a_2^2}{4} \geq a_1 a_2 \\
 &\iff a_1^2 - 2 a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0 \\
 &\iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

che è evidentemente vero.

• Passo induttivo

Supponiamo che sia vero per n , e proviamolo per $(n + 1)$. Per ipotesi induttiva, la media aritmetica di n numeri reali non negativi è maggiore o uguale alla loro media geometrica. Dobbiamo dimostrare che:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \quad (\text{A})$$

Sia α la media aritmetica degli $n + 1$ numeri reali non negativi:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} \quad (\text{B})$$

Se $a_i = \alpha$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, allora (A) vale con il segno di uguaglianza. Altrimenti esiste almeno un valore maggiore di α e almeno un valore minore di α . Senza perdita di generalità, riordiniamo i valori in modo da avere:

$$a_n > \alpha \quad \text{e} \quad a_{n+1} < \alpha$$

Allora abbiamo:

$$a_n - \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \alpha - a_{n+1} > 0 \implies (a_n - \alpha)(\alpha - a_{n+1}) > 0 \quad (\text{C})$$

Da (B) abbiamo:

$$(n+1) \alpha = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \iff n \alpha = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \underbrace{a_n + a_{n+1} - \alpha}_{=y} \iff \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i + y}{n}$$

dove $y = a_n + a_{n+1} - \alpha \geq a_n - \alpha > 0$, dato che $a_{n+1} \geq 0$. Quindi α è anche la media aritmetica degli n numeri non negativi $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ e y . Per ipotesi induttiva, $\alpha^n \geq \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) y$, e quindi:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n \alpha \geq \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) y \alpha \quad (\text{D})$$

Da (C) segue che:

$$(a_n - \alpha)(\alpha - a_{n+1}) = \underbrace{(a_n + a_{n+1} - \alpha)}_{=y} \alpha - a_n a_{n+1} > 0$$

e quindi:

$$y \alpha > a_n a_{n+1} \quad (E)$$

Sostituendo (E) in (D) (il prodotto $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ è non negativo), otteniamo:

$$\alpha^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} a_i \iff \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

cioè (A), che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$.

□

2.2.5 Successione di Fibonacci

- La **successione di Fibonacci** è definita dai due valori iniziali e dalla relazione di ricorrenza seguenti:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per ogni intero } n \geq 2. \quad (2.4)$$

- I primi termini sono 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...: ogni termine è la somma dei due che lo precedono.
- Le due soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ si chiamano **sezione aurea** ϕ e **coniugato della sezione aurea** $\hat{\phi}$:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Essendo soluzioni di $x^2 = x + 1$, valgono le due uguaglianze:

$$\phi^2 = \phi + 1 \quad \text{e} \quad \hat{\phi}^2 = \hat{\phi} + 1 \quad (2.5)$$

- La proposizione seguente dà una formula chiusa per F_n : il termine n -esimo si calcola direttamente, senza passare per tutti i termini precedenti.

Osservazione 2.7: formula chiusa della successione di Fibonacci

Per ogni intero $n \geq 0$, vale:

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Per induzione su n . Poiché la relazione di ricorrenza lega F_{n+1} ai **due** termini precedenti, il primo passo dell'induzione verifica l'asserto per $n = 0$ e per $n = 1$, e il passo induttivo lo suppone vero per n e per $n - 1$.

- **Primo passo dell'induzione**

Siano $n = 0$ e $n = 1$. Allora l'asserto diventa:

$$F_0 = \frac{\phi^0 - \hat{\phi}^0}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{e} \quad F_1 = \frac{\phi^1 - \hat{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

che è evidentemente vero.

- **Passo induttivo**

Supponiamo che sia vero per n e per $n - 1$, con $n \geq 1$, e proviamolo per $(n + 1)$. Per definizione della successione di Fibonacci abbiamo $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, mentre per ipotesi induttiva abbiamo:

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{n-1} = \frac{\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\phi^n + \phi^{n-1}) - (\hat{\phi}^n + \hat{\phi}^{n-1})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-1}(\phi + 1) - \hat{\phi}^{n-1}(\hat{\phi} + 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{n-1} \phi^2 - \hat{\phi}^{n-1} \hat{\phi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza si sono usate le relazioni (2.5). Questo è esattamente l'asserto voluto, per $n + 1$.

□

- La successione di Fibonacci è studiata più in dettaglio nel capitolo «[Successione di Fibonacci](#)» della Parte 2.