



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Algoritmi

Esercizi 3 — Notazione e crescita asintotica

Esercizi svolti sui capitoli 9–10: notazioni asintotiche Theta, O grande, Omega, o piccolo e omega, e confronto degli ordini di crescita. Ogni esercizio ha la soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:

fabiofurini.github.io/algoritmi/
github.com/fabiofurini/algoritmi

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Notazione asintotica	2
10	Crescita asintotica	31



Notazione asintotica

Negli esercizi di questo capitolo le notazioni asintotiche si usano con le definizioni e i criteri del limite del capitolo «Notazione asintotica», riassunti qui sotto. I limiti di funzioni di variabile naturale (successioni) si calcolano con i risultati del corso di *Analisi Matematica 1* (<https://fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/>).

Date due funzioni f e g di variabile naturale,

- scriviamo $f(n) = o(g(n))$ se per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq f(n) < c g(n), \quad \forall n \geq n_1;$$

- scriviamo $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ se esistono $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq f(n) \leq c g(n), \quad \forall n \geq n_1;$$

- scriviamo $f(n) = \Theta(g(n))$ se esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1;$$

- scriviamo $f(n) = \Omega(g(n))$ se esistono $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c g(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq n_1;$$

- scriviamo $f(n) = \omega(g(n))$ se per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq c g(n) < f(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Criterio del limite: date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente positive tali che il limite di $\frac{f(n)}{g(n)}$ esista, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0^+ \iff f(n) = o(g(n)),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } 0^+ \iff f(n) = \mathcal{O}(g(n)),$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} &\iff f(n) = \Theta(g(n)), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } +\infty &\iff f(n) = \Omega(g(n)), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty &\iff f(n) = \omega(g(n)).\end{aligned}$$

Quando il rapporto $\frac{f(n)}{g(n)}$ non ha limite (per esempio quando contiene $\sin n$ o $\cos n$), questi criteri non si possono applicare e si usano le definizioni.

Esercizio 9.1 — Notazione asintotica (E1)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto 5n^4 - 19n^3 + 12n^2$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = \mathcal{O}(n^4)$;
- (b) $5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = \mathcal{O}(n^6)$;
- (c) $5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = \Theta(n^4)$;
- (d) $5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \neq \Theta(n^6)$.

Soluzione

1. (a) Per dimostrare che

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = \mathcal{O}(n^4)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq cn^4, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per prima cosa osserviamo che

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = n^2(5n^2 - 19n + 12) = n^2(5n - 4)(n - 3),$$

quindi

$$0 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2, \quad \forall n \geq 3$$

(per $n = 2$ il valore è $f(2) = -24 < 0$). Con $n \geq 1$, dividendo per n^4 , la disuguaglianza $f(n) \leq cn^4$ è equivalente a

$$5 - \frac{19}{n} + \frac{12}{n^2} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché

$$-\frac{19}{n} + \frac{12}{n^2} = \frac{12 - 19n}{n^2} \leq 0, \quad \forall n \geq 1,$$

si ha

$$5 - \frac{19}{n} + \frac{12}{n^2} \leq 5, \quad \forall n \geq 1.$$

Scegliendo per esempio $c = 5$ e $n_1 = 3$, si ha

$$0 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq 5n^4, \quad \forall n \geq 3.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 - 19n^3 + 12n^2}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{19}{n} + \frac{12}{n^2} \right) = 5 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(b) Per dimostrare che

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = \mathcal{O}(n^6)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq cn^6, \quad \forall n \geq n_1.$$

Dalla parte (a), $0 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq 5n^4$ per ogni $n \geq 3$. Poiché $n^4 \leq n^6$ per $n \geq 1$, si ha anche $5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq 5n^6$. Scegliendo per esempio $c = 5$ e $n_1 = 3$, si ha

$$0 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq 5n^6, \quad \forall n \geq 3.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 - 19n^3 + 12n^2}{n^6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{n^2} - \frac{19}{n^3} + \frac{12}{n^4} \right) = 0^+.$$

(c) Per dimostrare che

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 = \Theta(n^4)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^4 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq c_2 n^4, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la limitazione superiore, per la parte (a), $5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq 5n^4$ per ogni $n \geq 1$. Per la limitazione inferiore osserviamo che

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 - n^4 = 4n^4 - 19n^3 + 12n^2 = n^2(4n - 3)(n - 4),$$

che è non negativa per $n \geq 4$ (per $n = 3$ è uguale a $-81 < 0$). Quindi $n^4 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2$ per ogni $n \geq 4$. Scegliendo per esempio $c_1 = 1$, $c_2 = 5$ e $n_1 = 4$, si ha

$$0 \leq n^4 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \leq 5n^4, \quad \forall n \geq 4.$$

Il limite calcolato nella parte (a) dà lo stesso risultato: è uguale a $5 \in \mathbb{R}_{>0}$.

(d) Per dimostrare che

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \neq \Theta(n^6)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^6 \leq 5n^4 - 19n^3 + 12n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^6 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{5}{n^2} - \frac{19}{n^3} + \frac{12}{n^4}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, otteniamo $0 < c_1 \leq 0$, il che è impossibile. Quindi

$$5n^4 - 19n^3 + 12n^2 \neq \Theta(n^6).$$

In alternativa, il limite calcolato nella parte (b) è uguale a 0^+ , quindi $f(n) = o(n^6)$ per il criterio del limite. Allora, con la costante $c = c_1$ nella definizione di o , avremmo $f(n) < c_1 n^6$ per ogni n sufficientemente grande, contro la limitazione inferiore $c_1 n^6 \leq f(n)$.

Esercizio 9.2 — Notazione asintotica (E2)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto 3n^2 + n^3(2 - \sin n)$$

Domande

1. Dimostrare che:

(a) $3n^2 + n^3(2 - \sin n) = \Theta(n^3)$;

(b) $3n^2 + n^3(2 - \sin n) \neq o(n^3)$;

(c) $3n^2 + n^3(2 - \sin n) \neq \omega(n^3)$.

Soluzione

Il rapporto

$$\frac{3n^2 + n^3(2 - \sin n)}{n^3} = \frac{3}{n} + 2 - \sin n, \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \rightarrow +\infty$, poiché oscilla. Quindi i criteri del limite non si possono applicare, e usiamo le definizioni. Poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$, si ha $1 \leq 2 - \sin n \leq 3$, e quindi $1 + \frac{3}{n} \leq \frac{3}{n} + 2 - \sin n \leq 3 + \frac{3}{n}$. Poiché $0 < \frac{3}{n} \leq 3$ per $n \geq 1$, otteniamo

$$1 \leq \frac{3}{n} + 2 - \sin n \leq 6, \quad \forall n \geq 1.$$

1. (a) Per dimostrare che

$$3n^2 + n^3(2 - \sin n) = \Theta(n^3)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^3 \leq 3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) \leq c_2 n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{3}{n} + 2 - \sin n \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per le limitazioni precedenti, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 6$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{1}{2} n^3 \leq 3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) \leq 6 n^3, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Per dimostrare che

$$3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) \neq o(n^3)$$

ricordiamo che $o(n^3)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq 3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) < c n^3, \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^3 > 0$, $\frac{3}{n} + 2 - \sin n < c$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $\frac{3}{n} + 2 - \sin n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 1$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) \neq o(n^3).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dal basso da 1 e non può convergere a 0.

(c) Per dimostrare che

$$3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) \neq \omega(n^3)$$

ricordiamo che $\omega(n^3)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq c n^3 < 3 n^2 + n^3 (2 - \sin n), \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^3 > 0$, $c < \frac{3}{n} + 2 - \sin n$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $\frac{3}{n} + 2 - \sin n \leq 6$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 6$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$3 n^2 + n^3 (2 - \sin n) \neq \omega(n^3).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dall'alto da 6 e non può divergere a $+\infty$.

Esercizio 9.3 — Notazione asintotica (E3)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto 3 n^3 - 7 n^2 + 2 n$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $3n^3 - 7n^2 + 2n = \mathcal{O}(n^3)$;
- (b) $3n^3 - 7n^2 + 2n = \mathcal{O}(n^5)$;
- (c) $3n^3 - 7n^2 + 2n = \Theta(n^3)$;
- (d) $3n^3 - 7n^2 + 2n \neq \Theta(n^5)$.

Soluzione

1. (a) Per dimostrare che

$$3n^3 - 7n^2 + 2n = \mathcal{O}(n^3)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq cn^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per prima cosa osserviamo che

$$3n^3 - 7n^2 + 2n = n(3n^2 - 7n + 2) = n(3n - 1)(n - 2),$$

quindi

$$0 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n, \quad \forall n \geq 2$$

(per $n = 1$ il valore è $f(1) = -2 < 0$). Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 , la disuguaglianza $f(n) \leq cn^3$ è equivalente a

$$3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché

$$-\frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} = \frac{2 - 7n}{n^2} \leq 0, \quad \forall n \geq 1,$$

si ha

$$3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} \leq 3, \quad \forall n \geq 1.$$

Scegliendo per esempio $c = 3$ e $n_1 = 2$, si ha

$$0 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq 3n^3, \quad \forall n \geq 2.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - 7n^2 + 2n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 3 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(b) Per dimostrare che

$$3n^3 - 7n^2 + 2n = \mathcal{O}(n^5)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq cn^5, \quad \forall n \geq n_1.$$

Dalla parte (a), $0 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq 3n^3$ per ogni $n \geq 2$. Poiché $n^3 \leq n^5$ per $n \geq 1$, si ha anche $3n^3 - 7n^2 + 2n \leq 3n^5$. Scegliendo per esempio $c = 3$ e $n_1 = 2$, si ha

$$0 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq 3n^5, \quad \forall n \geq 2.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - 7n^2 + 2n}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{7}{n^3} + \frac{2}{n^4} \right) = 0^+.$$

(c) Per dimostrare che

$$3n^3 - 7n^2 + 2n = \Theta(n^3)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^3 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq c_2 n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la limitazione superiore, per la parte (a), $3n^3 - 7n^2 + 2n \leq 3n^3$ per ogni $n \geq 1$. Per la limitazione inferiore osserviamo che

$$3n^3 - 7n^2 + 2n - n^3 = 2n^3 - 7n^2 + 2n = n(2n^2 - 7n + 2),$$

dove le radici di $2n^2 - 7n + 2$ sono $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$, cioè circa 0.31 e 3.19; quindi $2n^2 - 7n + 2 > 0$ per ogni intero $n \geq 4$ (per $n = 4$ è uguale a 6, per $n = 3$ è uguale a -1). Quindi $n^3 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n$ per ogni $n \geq 4$. Scegliendo per esempio $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ e $n_1 = 4$, si ha

$$0 \leq n^3 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n \leq 3n^3, \quad \forall n \geq 4.$$

Il limite calcolato nella parte (a) dà lo stesso risultato: è uguale a $3 \in \mathbb{R}_{>0}$.

(d) Per dimostrare che

$$3n^3 - 7n^2 + 2n \neq \Theta(n^5)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^5 \leq 3n^3 - 7n^2 + 2n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^5 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{3}{n^2} - \frac{7}{n^3} + \frac{2}{n^4}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, otteniamo $0 < c_1 \leq 0$, il che è impossibile. Quindi

$$3n^3 - 7n^2 + 2n \neq \Theta(n^5).$$

In alternativa, il limite calcolato nella parte (b) è uguale a 0^+ , quindi $f(n) = o(n^5)$ per il criterio del limite. Allora, con la costante $c = c_1$ nella definizione di o , avremmo $f(n) < c_1 n^5$ per ogni n sufficientemente grande, contro la limitazione inferiore $c_1 n^5 \leq f(n)$.

Esercizio 9.4 — Notazione asintotica (E4)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^2 (3 + \cos n)$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $n^2 (3 + \cos n) = \Theta(n^2)$;
- (b) $n^2 (3 + \cos n) \neq o(n^2)$;
- (c) $n^2 (3 + \cos n) \neq \omega(n^2)$.

Soluzione

Il rapporto

$$\frac{n^2 (3 + \cos n)}{n^2} = 3 + \cos n, \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \rightarrow +\infty$, poiché oscilla. Quindi i criteri del limite non si possono applicare, e usiamo le definizioni. Poiché $-1 \leq \cos n \leq 1$, si ha

$$2 \leq 3 + \cos n \leq 4, \quad \forall n \geq 1.$$

1. (a) Per dimostrare che

$$n^2 (3 + \cos n) = \Theta(n^2)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq n^2 (3 + \cos n) \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq 3 + \cos n \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per le limitazioni precedenti, scegliendo per esempio $c_1 = 2$, $c_2 = 4$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq 2 n^2 \leq n^2 (3 + \cos n) \leq 4 n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Per dimostrare che

$$n^2 (3 + \cos n) \neq o(n^2)$$

ricordiamo che $o(n^2)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq n^2 (3 + \cos n) < c n^2, \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^2 > 0$, $3 + \cos n < c$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $3 + \cos n \geq 2$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 2$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^2 (3 + \cos n) \neq o(n^2).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dal basso da 2 e non può convergere a 0.

(c) Per dimostrare che

$$n^2 (3 + \cos n) \neq \omega(n^2)$$

ricordiamo che $\omega(n^2)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq c n^2 < n^2 (3 + \cos n), \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^2 > 0$, $c < 3 + \cos n$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $3 + \cos n \leq 4$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 4$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^2 (3 + \cos n) \neq \omega(n^2).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dall'alto da 4 e non può divergere a $+\infty$.

Esercizio 9.5 — Notazione asintotica (E5)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3$$

Domande

1. Dimostrare che:

(a) $2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 = \mathcal{O}(n^5)$;

(b) $2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 = \Theta(n^5)$;

(c) $2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \neq \Theta(n^3)$.

Soluzione

1. (a) Per dimostrare che

$$2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 = \mathcal{O}(n^5)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \leq c n^5, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per prima cosa fattorizziamo:

$$2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 = n^3 (2 n^2 - 8 n + 3),$$

dove le radici di $2 n^2 - 8 n + 3$ sono $2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$, cioè circa 0.42 e 3.58. Quindi $f(n) \geq 0$ per ogni intero $n \geq 4$ (per $n = 4$ il fattore $2 n^2 - 8 n + 3$ è uguale a 3; per $n = 3$ si

ha $f(3) = -81 < 0$). Con $n \geq 1$, dividendo per n^5 , la disuguaglianza $f(n) \leq c n^5$ è equivalente a

$$2 - \frac{8}{n} + \frac{3}{n^2} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché

$$-\frac{8}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{3-8n}{n^2} \leq 0, \quad \forall n \geq 1,$$

si ha

$$2 - \frac{8}{n} + \frac{3}{n^2} \leq 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Scegliendo per esempio $c = 2$ e $n_1 = 4$, si ha

$$0 \leq 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \leq 2 n^5, \quad \forall n \geq 4.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{8}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 2 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(b) Per dimostrare che

$$2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 = \Theta(n^5)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^5 \leq 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \leq c_2 n^5, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la limitazione superiore, per la parte (a), $2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \leq 2 n^5$ per ogni $n \geq 1$. Per la limitazione inferiore osserviamo che

$$2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 - n^5 = n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 = n^3 (n^2 - 8n + 3),$$

dove le radici di $n^2 - 8n + 3$ sono $4 \pm \sqrt{13}$, cioè circa 0.39 e 7.61. Quindi $n^5 \leq 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3$ per ogni intero $n \geq 8$ (per $n = 8$ il fattore $n^2 - 8n + 3$ è uguale a 3, per $n = 7$ è uguale a -4). Scegliendo per esempio $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $n_1 = 8$, si ha

$$0 \leq n^5 \leq 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \leq 2 n^5, \quad \forall n \geq 8.$$

Il limite calcolato nella parte (a) dà lo stesso risultato: è uguale a $2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) Per dimostrare che

$$2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \neq \Theta(n^3)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 2 n^5 - 8 n^4 + 3 n^3 \leq c_2 n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 , questo equivale a

$$0 \leq 2 n^2 - 8 n + 3 \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché $2n^2 - 8n + 3 \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, l'espressione centrale non può restare limitata dalla costante c_2 : questo è assurdo.

In alternativa, calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^5 - 8n^4 + 3n^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 - 8n + 3) = +\infty,$$

quindi $f(n) = \omega(n^3)$ per il criterio del limite. Allora, con la costante $c = c_2$ nella definizione di ω , avremmo $f(n) > c_2 n^3$ per ogni n sufficientemente grande, contro la limitazione superiore $f(n) \leq c_2 n^3$. Quindi $f(n) \neq \Theta(n^3)$.

Esercizio 9.6 — Notazione asintotica (E6)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^3 (4 - \sin n) + 5n^2$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $n^3 (4 - \sin n) + 5n^2 = \Theta(n^3)$;
- (b) $n^3 (4 - \sin n) + 5n^2 \neq o(n^3)$;
- (c) $n^3 (4 - \sin n) + 5n^2 \neq \omega(n^3)$.

Soluzione

Il rapporto

$$\frac{n^3 (4 - \sin n) + 5n^2}{n^3} = 4 - \sin n + \frac{5}{n}, \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \rightarrow +\infty$, poiché oscilla. Quindi i criteri del limite non si possono applicare, e usiamo le definizioni. Poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$, si ha $3 \leq 4 - \sin n \leq 5$. Poiché $0 < \frac{5}{n} \leq 5$ per $n \geq 1$, otteniamo

$$3 \leq 4 - \sin n + \frac{5}{n} \leq 10, \quad \forall n \geq 1.$$

1. (a) Per dimostrare che

$$n^3 (4 - \sin n) + 5n^2 = \Theta(n^3)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^3 \leq n^3 (4 - \sin n) + 5n^2 \leq c_2 n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq 4 - \sin n + \frac{5}{n} \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per le limitazioni precedenti, scegliendo per esempio $c_1 = 3$, $c_2 = 10$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq 3n^3 \leq n^3(4 - \sin n) + 5n^2 \leq 10n^3, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Per dimostrare che

$$n^3(4 - \sin n) + 5n^2 \neq o(n^3)$$

ricordiamo che $o(n^3)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq n^3(4 - \sin n) + 5n^2 < cn^3, \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^3 > 0$, $4 - \sin n + \frac{5}{n} < c$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $4 - \sin n + \frac{5}{n} \geq 3$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 3$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^3(4 - \sin n) + 5n^2 \neq o(n^3).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dal basso da 3 e non può convergere a 0.

(c) Per dimostrare che

$$n^3(4 - \sin n) + 5n^2 \neq \omega(n^3)$$

ricordiamo che $\omega(n^3)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq cn^3 < n^3(4 - \sin n) + 5n^2, \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^3 > 0$, $c < 4 - \sin n + \frac{5}{n}$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $4 - \sin n + \frac{5}{n} \leq 10$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 10$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^3(4 - \sin n) + 5n^2 \neq \omega(n^3).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dall'alto da 10 e non può divergere a $+\infty$.

Esercizio 9.7 — Notazione asintotica (E7)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto 4n^4 - n^3 - 6n^2$$

Domande

1. Dimostrare che:

(a) $4n^4 - n^3 - 6n^2 = \mathcal{O}(n^4)$;

(b) $4n^4 - n^3 - 6n^2 = \Theta(n^4)$;

(c) $4n^4 - n^3 - 6n^2 \neq \Theta(n^2)$.

Soluzione

1. (a) Per dimostrare che

$$4n^4 - n^3 - 6n^2 = \mathcal{O}(n^4)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 4n^4 - n^3 - 6n^2 \leq cn^4, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per prima cosa fattorizziamo:

$$4n^4 - n^3 - 6n^2 = n^2(4n^2 - n - 6),$$

dove le radici di $4n^2 - n - 6$ sono $\frac{1 \pm \sqrt{97}}{8}$, cioè circa -1.11 e 1.36 . Quindi $f(n) \geq 0$ per ogni intero $n \geq 2$ (per $n = 2$ il fattore $4n^2 - n - 6$ è uguale a 8; per $n = 1$ si ha $f(1) = -3 < 0$). Con $n \geq 1$, dividendo per n^4 , la disuguaglianza $f(n) \leq cn^4$ è equivalente a

$$4 - \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché

$$-\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} = -\frac{n+6}{n^2} \leq 0, \quad \forall n \geq 1,$$

si ha

$$4 - \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} \leq 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Scegliendo per esempio $c = 4$ e $n_1 = 2$, si ha

$$0 \leq 4n^4 - n^3 - 6n^2 \leq 4n^4, \quad \forall n \geq 2.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^4 - n^3 - 6n^2}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} \right) = 4 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

- (b) Per dimostrare che

$$4n^4 - n^3 - 6n^2 = \Theta(n^4)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^4 \leq 4n^4 - n^3 - 6n^2 \leq c_2 n^4, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la limitazione superiore, per la parte (a), $4n^4 - n^3 - 6n^2 \leq 4n^4$ per ogni $n \geq 1$. Per la limitazione inferiore osserviamo che

$$4n^4 - n^3 - 6n^2 - 3n^4 = n^4 - n^3 - 6n^2 = n^2(n-3)(n+2),$$

che è non negativa per ogni intero $n \geq 3$ (è uguale a 0 per $n = 3$ e positiva per $n \geq 4$). Quindi $3n^4 \leq 4n^4 - n^3 - 6n^2$ per ogni $n \geq 3$; scegliamo $n_1 = 4$, ma andrebbe bene anche $n_1 = 3$. Scegliendo per esempio $c_1 = 3$, $c_2 = 4$ e $n_1 = 4$, si ha

$$0 \leq 3n^4 \leq 4n^4 - n^3 - 6n^2 \leq 4n^4, \quad \forall n \geq 4.$$

Il limite calcolato nella parte (a) dà lo stesso risultato: è uguale a $4 \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) Per dimostrare che

$$4n^4 - n^3 - 6n^2 \neq \Theta(n^2)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 4n^4 - n^3 - 6n^2 \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 , questo equivale a

$$0 \leq 4n^2 - n - 6 \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché $4n^2 - n - 6 \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, l'espressione centrale non può restare limitata dalla costante c_2 : questo è assurdo.

In alternativa, calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^4 - n^3 - 6n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^2 - n - 6) = +\infty,$$

quindi $f(n) = \omega(n^2)$ per il criterio del limite. Allora, con la costante $c = c_2$ nella definizione di ω , avremmo $f(n) > c_2 n^2$ per ogni n sufficientemente grande, contro la limitazione superiore $f(n) \leq c_2 n^2$. Quindi $f(n) \neq \Theta(n^2)$.

Esercizio 9.8 — Notazione asintotica (E8)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^4 (1 + \sin^2 n)$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $n^4 (1 + \sin^2 n) = \Theta(n^4)$;
- (b) $n^4 (1 + \sin^2 n) \neq o(n^4)$;
- (c) $n^4 (1 + \sin^2 n) \neq \omega(n^4)$.

Soluzione

Il rapporto

$$\frac{n^4 (1 + \sin^2 n)}{n^4} = 1 + \sin^2 n, \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \rightarrow +\infty$, poiché oscilla. Quindi i criteri del limite non si possono applicare, e usiamo le definizioni. Poiché $0 \leq \sin^2 n \leq 1$, si ha

$$1 \leq 1 + \sin^2 n \leq 2, \quad \forall n \geq 1.$$

1. (a) Per dimostrare che

$$n^4 (1 + \sin^2 n) = \Theta(n^4)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^4 \leq n^4 (1 + \sin^2 n) \leq c_2 n^4, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^4 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq 1 + \sin^2 n \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per le limitazioni precedenti, scegliendo per esempio $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq 1 n^4 \leq n^4 (1 + \sin^2 n) \leq 2 n^4, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Per dimostrare che

$$n^4 (1 + \sin^2 n) \neq o(n^4)$$

ricordiamo che $o(n^4)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq n^4 (1 + \sin^2 n) < c n^4, \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^4 > 0$, $1 + \sin^2 n < c$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $1 + \sin^2 n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 1$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^4 (1 + \sin^2 n) \neq o(n^4).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dal basso da 1 e non può convergere a 0.

(c) Per dimostrare che

$$n^4 (1 + \sin^2 n) \neq \omega(n^4)$$

ricordiamo che $\omega(n^4)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq c n^4 < n^4 (1 + \sin^2 n), \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^4 > 0$, $c < 1 + \sin^2 n$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $1 + \sin^2 n \leq 2$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 2$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^4 (1 + \sin^2 n) \neq \omega(n^4).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dall'alto da 2 e non può divergere a $+\infty$.

Esercizio 9.9 — Notazione asintotica (E9)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto 6 n^3 - 11 n^2 + 4 n$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $6n^3 - 11n^2 + 4n = \mathcal{O}(n^3)$;
- (b) $6n^3 - 11n^2 + 4n = \mathcal{O}(n^4)$;
- (c) $6n^3 - 11n^2 + 4n = \Theta(n^3)$;
- (d) $6n^3 - 11n^2 + 4n \neq \Theta(n^4)$.

Soluzione

1. (a) Per dimostrare che

$$6n^3 - 11n^2 + 4n = \mathcal{O}(n^3)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq cn^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per prima cosa osserviamo che

$$6n^3 - 11n^2 + 4n = n(6n^2 - 11n + 4) = n(2n - 1)(3n - 4),$$

quindi

$$0 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n, \quad \forall n \geq 2$$

(per $n = 1$ il valore è $f(1) = -1 < 0$). Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 , la disuguaglianza $f(n) \leq cn^3$ è equivalente a

$$6 - \frac{11}{n} + \frac{4}{n^2} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché

$$-\frac{11}{n} + \frac{4}{n^2} = \frac{4 - 11n}{n^2} \leq 0, \quad \forall n \geq 1,$$

si ha

$$6 - \frac{11}{n} + \frac{4}{n^2} \leq 6, \quad \forall n \geq 1.$$

Scegliendo per esempio $c = 6$ e $n_1 = 2$, si ha

$$0 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq 6n^3, \quad \forall n \geq 2.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^3 - 11n^2 + 4n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(6 - \frac{11}{n} + \frac{4}{n^2} \right) = 6 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(b) Per dimostrare che

$$6n^3 - 11n^2 + 4n = \mathcal{O}(n^4)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq cn^4, \quad \forall n \geq n_1.$$

Dalla parte (a), $0 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq 6n^3$ per ogni $n \geq 2$. Poiché $n^3 \leq n^4$ per $n \geq 1$, si ha anche $6n^3 - 11n^2 + 4n \leq 6n^4$. Scegliendo per esempio $c = 6$ e $n_1 = 2$, si ha

$$0 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq 6n^4, \quad \forall n \geq 2.$$

Poiché le funzioni sono asintoticamente positive, un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^3 - 11n^2 + 4n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{11}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right) = 0^+.$$

(c) Per dimostrare che

$$6n^3 - 11n^2 + 4n = \Theta(n^3)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^3 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq c_2 n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la limitazione superiore, per la parte (a), $6n^3 - 11n^2 + 4n \leq 6n^3$ per ogni $n \geq 1$. Per la limitazione inferiore osserviamo che

$$6n^3 - 11n^2 + 4n - 5n^3 = n^3 - 11n^2 + 4n = n(n^2 - 11n + 4),$$

dove le radici di $n^2 - 11n + 4$ sono $\frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$, cioè circa 0.38 e 10.62; quindi $n^2 - 11n + 4 > 0$ per ogni intero $n \geq 11$ (per $n = 11$ è uguale a 4, per $n = 10$ è uguale a -6). Quindi $5n^3 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n$ per ogni $n \geq 11$. Scegliendo per esempio $c_1 = 5$, $c_2 = 6$ e $n_1 = 11$, si ha

$$0 \leq 5n^3 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n \leq 6n^3, \quad \forall n \geq 11.$$

Il limite calcolato nella parte (a) dà lo stesso risultato: è uguale a $6 \in \mathbb{R}_{>0}$.

(d) Per dimostrare che

$$6n^3 - 11n^2 + 4n \neq \Theta(n^4)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^4 \leq 6n^3 - 11n^2 + 4n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^4 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{6}{n} - \frac{11}{n^2} + \frac{4}{n^3}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, otteniamo $0 < c_1 \leq 0$, il che è impossibile. Quindi

$$6n^3 - 11n^2 + 4n \neq \Theta(n^4).$$

In alternativa, il limite calcolato nella parte (b) è uguale a 0^+ , quindi $f(n) = o(n^4)$ per il criterio del limite. Allora, con la costante $c = c_1$ nella definizione di o , avremmo $f(n) < c_1 n^4$ per ogni n sufficientemente grande, contro la limitazione inferiore $c_1 n^4 \leq f(n)$.

Esercizio 9.10 — Notazione asintotica (E10)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^2 (2 + \cos^2 n)$$

Domande

1. Dimostrare che:

- (a) $n^2 (2 + \cos^2 n) = \Theta(n^2)$;
- (b) $n^2 (2 + \cos^2 n) \neq o(n^2)$;
- (c) $n^2 (2 + \cos^2 n) \neq \omega(n^2)$.

Soluzione

Il rapporto

$$\frac{n^2 (2 + \cos^2 n)}{n^2} = 2 + \cos^2 n, \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \rightarrow +\infty$, poiché oscilla. Quindi i criteri del limite non si possono applicare, e usiamo le definizioni. Poiché $0 \leq \cos^2 n \leq 1$, si ha

$$2 \leq 2 + \cos^2 n \leq 3, \quad \forall n \geq 1.$$

1. (a) Per dimostrare che

$$n^2 (2 + \cos^2 n) = \Theta(n^2)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq n^2 (2 + \cos^2 n) \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq 2 + \cos^2 n \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per le limitazioni precedenti, scegliendo per esempio $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq 2 n^2 \leq n^2 (2 + \cos^2 n) \leq 3 n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Per dimostrare che

$$n^2 (2 + \cos^2 n) \neq o(n^2)$$

ricordiamo che $o(n^2)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq n^2 (2 + \cos^2 n) < c n^2, \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^2 > 0$, $2 + \cos^2 n < c$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $2 + \cos^2 n \geq 2$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 2$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^2 (2 + \cos^2 n) \neq o(n^2).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dal basso da 2 e non può convergere a 0.

(c) Per dimostrare che

$$n^2 (2 + \cos^2 n) \neq \omega(n^2)$$

ricordiamo che $\omega(n^2)$ richiede che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esista $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq c n^2 < n^2 (2 + \cos^2 n), \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè, dividendo per $n^2 > 0$, $c < 2 + \cos^2 n$ per ogni $n \geq n_1$. Poiché $2 + \cos^2 n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$, per $c = 3$ non esiste nessun n_1 con questa proprietà. Quindi

$$n^2 (2 + \cos^2 n) \neq \omega(n^2).$$

Equivalentemente, il rapporto è limitato dall'alto da 3 e non può divergere a $+\infty$.

Esercizio 9.11 — Notazione asintotica (E11)

Dati $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e $b \in \mathbb{R}$, consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto a n + b.$$

Domande

1. Dimostrare, usando le definizioni, che per ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$ e $b \in \mathbb{R}$:

- (a) $a n + b = \mathcal{O}(n)$;
- (b) $a n + b = \mathcal{O}(n^2)$;
- (c) $a n + b = \Theta(n)$;
- (d) $a n + b \neq \Theta(n^2)$.

Soluzione

L'osservazione chiave è la seguente: se $n \geq \frac{2|b|}{a}$, allora $|b| \leq \frac{a}{2} n$, e quindi

$$\frac{1}{2} a n = a n - \frac{a}{2} n \leq a n - |b| \leq a n + b \leq a n + |b| \leq a n + \frac{a}{2} n = \frac{3}{2} a n.$$

Per avere anche $n \geq 1$ (così da poter dividere per n), usiamo la soglia

$$n_1 = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{2|b|}{a} \right\rceil \right\}.$$

1. (a) Per dimostrare che $a n + b = \mathcal{O}(n)$, determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq a n + b \leq c n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n , questo equivale a

$$0 \leq a + \frac{b}{n} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per l'osservazione chiave, $\frac{a}{2} \leq a + \frac{b}{n} \leq \frac{3}{2}a$ per ogni $n \geq \frac{2|b|}{a}$ (il valore superiore è raggiunto quando $b > 0$ e $n = \frac{2b}{a}$). Quindi, scegliendo per esempio $c = \frac{3}{2}a > 0$ e $n_1 = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{2|b|}{a} \right\rceil \right\}$, si ha

$$0 \leq a n + b \leq \frac{3}{2} a n, \quad \forall n \geq \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{2|b|}{a} \right\rceil \right\}.$$

(b) Per dimostrare che $a n + b = \mathcal{O}(n^2)$, determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq a n + b \leq c n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 , questo equivale a

$$0 \leq \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la disuguaglianza di sinistra serve $a n + b \geq 0$, cioè $n \geq -\frac{b}{a}$; insieme a $n \geq 1$ ciò dà la soglia $\max \left\{ 1, -\frac{b}{a} \right\}$. Per la disuguaglianza di destra, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \leq \frac{a}{n} + \frac{|b|}{n^2} \leq a + |b|.$$

Quindi, scegliendo per esempio $c = a + |b| > 0$ e $n_1 = \left\lceil \max \left\{ 1, -\frac{b}{a} \right\} \right\rceil$, si ha

$$0 \leq a n + b \leq (a + |b|) n^2, \quad \forall n \geq \left\lceil \max \left\{ 1, -\frac{b}{a} \right\} \right\rceil.$$

(c) Per dimostrare che $a n + b = \Theta(n)$, determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n \leq a n + b \leq c_2 n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq a + \frac{b}{n} \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per l'osservazione chiave, $\frac{a}{2} \leq a + \frac{b}{n} \leq \frac{3}{2}a$ per ogni $n \geq \frac{2|b|}{a}$ (il valore inferiore è raggiunto quando $b < 0$ e $n = \frac{2|b|}{a}$, quello superiore quando $b > 0$ e $n = \frac{2b}{a}$). Quindi, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{2}a > 0$, $c_2 = \frac{3}{2}a > 0$ e $n_1 = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{2|b|}{a} \right\rceil \right\}$, si ha

$$0 \leq \frac{1}{2} a n \leq a n + b \leq \frac{3}{2} a n, \quad \forall n \geq \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{2|b|}{a} \right\rceil \right\}.$$

Un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a n + b}{n} = a + \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{b}{n}}_{\rightarrow 0} = a \in \mathbb{R}_{>0}.$$

- (d) Per dimostrare che $a n + b \neq \Theta(n^2)$, procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq a n + b, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, otteniamo $0 < c_1 \leq 0$, il che è impossibile: la disuguaglianza non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva.

Esercizio 9.12 — Notazione asintotica (E12)

Dati $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente non negativa:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto a n^2 + b n + c.$$

Domande

1. Dimostrare, usando le definizioni, che per ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$:
 - (a) $a n^2 + b n + c = \Theta(n^2)$;
 - (b) $a n^2 + b n + c \neq \Theta(n^3)$.

Soluzione

1. (a) Per dimostrare che $a n^2 + b n + c = \Theta(n^2)$, determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq a n^2 + b n + c \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Limitiamo separatamente i due termini $\frac{b}{n}$ e $\frac{c}{n^2}$.

- Se $n \geq \frac{2|b|}{a}$, allora $\frac{|b|}{n} \leq \frac{a}{2}$, quindi $-\frac{a}{2} \leq \frac{b}{n} \leq \frac{a}{2}$.
- Se $n \geq 2\sqrt{\frac{|c|}{a}}$, allora $n^2 \geq \frac{4|c|}{a}$ e $\frac{|c|}{n^2} \leq \frac{a}{4}$, quindi $-\frac{a}{4} \leq \frac{c}{n^2} \leq \frac{a}{4}$.

Quindi, per ogni $n \geq 2 \max \left\{ \frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}} \right\}$,

$$0 < \underbrace{a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a}_{=\frac{1}{4}a} \leq a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \leq \underbrace{a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a}_{=\frac{7}{4}a}.$$

Quindi, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{4}a > 0$, $c_2 = \frac{7}{4}a > 0$ e

$$n_1 = \max \left\{ 1, \left\lceil 2 \max \left\{ \frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}} \right\} \right\rceil \right\},$$

si ha

$$0 \leq \frac{1}{4}a n^2 \leq a n^2 + b n + c \leq \frac{7}{4}a n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Un modo alternativo è calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a n^2 + b n + c}{n^2} = a + \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{b}{n}}_{\rightarrow 0} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{c}{n^2}}_{\rightarrow 0} = a \in \mathbb{R}_{>0}.$$

- (b) Per dimostrare che $a n^2 + b n + c \neq \Theta(n^3)$, procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^3 \leq a n^2 + b n + c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, otteniamo $0 < c_1 \leq 0$, il che è impossibile: la disuguaglianza non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva.

Esercizio 9.13 — Notazione asintotica (E13)

Consideriamo quattro funzioni f , g , p e q di variabile naturale asintoticamente positive e le seguenti implicazioni:

$$f(n) = \Theta(p(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(q(n)) \implies f(n) \cdot g(n) = \Theta(p(n) \cdot q(n)), \quad (9.1)$$

$$f(n) = \Theta(p(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(q(n)) \implies f(n) + g(n) = \Theta(p(n) + q(n)). \quad (9.2)$$

Domande

1. Dimostrare che l'implicazione (9.1) è vera e scriverne la contronominale.

2. Dimostrare che l'inversa dell'implicazione (9.1) non è vera, cioè

$$f(n) \cdot g(n) = \Theta(p(n) \cdot q(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(p(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(q(n)).$$

3. Dimostrare che l'implicazione (9.2) è vera e scriverne la contronominale.

4. Dimostrare che l'inversa dell'implicazione (9.2) non è vera, cioè

$$f(n) + g(n) = \Theta(p(n) + q(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(p(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(q(n)).$$

Soluzione

1. Se $f(n) = \Theta(p(n))$ e $g(n) = \Theta(q(n))$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c_3, c_4 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 p(n) \leq f(n) \leq c_2 p(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq c_3 q(n) \leq g(n) \leq c_4 q(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché tutti i termini sono non negativi, possiamo moltiplicare termine a termine le due catene di disuguaglianze:

$$0 \leq \underbrace{c_1 c_3}_{>0} p(n) q(n) \leq f(n) \cdot g(n) \leq \underbrace{c_2 c_4}_{>0} p(n) q(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

e, di conseguenza, $f(n) \cdot g(n) = \Theta(p(n) \cdot q(n))$.

Ne segue che « $f(n) = \Theta(p(n))$ e $g(n) = \Theta(q(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) \cdot g(n) = \Theta(p(n) \cdot q(n))$ », e quest'ultima è una condizione necessaria per la prima. Per contrapposizione di (9.1) si ha

$$f(n) \cdot g(n) \neq \Theta(p(n) \cdot q(n)) \implies f(n) \neq \Theta(p(n)) \quad \text{oppure} \quad g(n) \neq \Theta(q(n)).$$

2. Basta un controesempio. Siano

$$f(n) = n^2 + 1, \quad g(n) = n^2 - 1, \quad p(n) = n, \quad q(n) = n^3.$$

Le quattro funzioni sono asintoticamente positive ($g(n) > 0$ per $n \geq 2$). Si ha

$$f(n) \cdot g(n) = (n^2 + 1)(n^2 - 1) = n^4 - 1 \quad \text{e} \quad p(n) \cdot q(n) = n^4,$$

e $n^4 - 1 = \Theta(n^4)$: scegliendo $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$ e $n_1 = 2$, si ha $0 \leq \frac{1}{2} n^4 \leq n^4 - 1 \leq n^4$ per ogni $n \geq 2$ (la limitazione inferiore equivale a $n^4 \geq 2$). D'altra parte,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3} = 0^+,$$

quindi $n^2 + 1 = \omega(n)$ e $n^2 - 1 = o(n^3)$; dunque

$$n^2 + 1 \neq \Theta(n) \quad \text{e} \quad n^2 - 1 \neq \Theta(n^3)$$

(una funzione che è $\omega(n)$ supera $c_2 n$ per ogni costante c_2 , e una funzione che è $o(n^3)$ è minore di $c_1 n^3$ per ogni costante c_1 , per ogni n sufficientemente grande).

3. Se $f(n) = \Theta(p(n))$ e $g(n) = \Theta(q(n))$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c_3, c_4 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 p(n) \leq f(n) \leq c_2 p(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq c_3 q(n) \leq g(n) \leq c_4 q(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Sommando le due catene di disuguaglianze, otteniamo

$$0 \leq c_1 p(n) + c_3 q(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 p(n) + c_4 q(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

Poiché $p(n) \geq 0$ e $q(n) \geq 0$ per questi valori di n , ciò implica

$$0 \leq \underbrace{\min\{c_1, c_3\}}_{>0} (p(n) + q(n)) \leq f(n) + g(n) \leq \underbrace{\max\{c_2, c_4\}}_{>0} (p(n) + q(n)),$$

$$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

e, di conseguenza, $f(n) + g(n) = \Theta(p(n) + q(n))$.

Ne segue che « $f(n) = \Theta(p(n))$ e $g(n) = \Theta(q(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) + g(n) = \Theta(p(n) + q(n))$ », e quest'ultima è una condizione necessaria per la prima. Per contrapposizione di (9.2) si ha

$$f(n) + g(n) \neq \Theta(p(n) + q(n)) \implies f(n) \neq \Theta(p(n)) \text{ oppure } g(n) \neq \Theta(q(n)).$$

4. Basta un controesempio. Siano

$$f(n) = 5n^3, \quad g(n) = 7n, \quad p(n) = n^3, \quad q(n) = n^2.$$

Si ha $5n^3 + 7n = \Theta(n^3 + n^2)$: scegliendo $c_1 = \frac{5}{2}$, $c_2 = 7$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{5}{2} (n^3 + n^2) \leq 5n^3 + 7n \leq 7(n^3 + n^2), \quad \forall n \geq 1,$$

poiché $\frac{5}{2} (n^3 + n^2) \leq \frac{5}{2} \cdot 2n^3 = 5n^3$ e $7n \leq 2n^3 + 7n^2$ per $n \geq 1$. D'altra parte, $5n^3 = \Theta(n^3)$ (con $c_1 = c_2 = 5$), ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n}{n^2} = 0^+,$$

quindi $7n = o(n^2)$ e perciò $7n \neq \Theta(n^2)$.

Esercizio 9.14 — Notazione asintotica (E14)

Consideriamo due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente non negative e le seguenti equivalenze:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n)), \quad (9.3)$$

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n)), \quad (9.4)$$

$$f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n)), \quad (9.5)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n)). \quad (9.6)$$

Domande

1. Dimostrare che l'equivalenza (9.3) è vera.

2. Dimostrare che l'equivalenza (9.4) è vera.
3. Dimostrare che l'equivalenza (9.5) è vera.
4. Dimostrare che l'equivalenza (9.6) è vera.

Soluzione

1. Se $f(n) = \Theta(g(n))$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1,$$

e quindi

$$0 \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)),$$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies f(n) = \Omega(g(n)).$$

Viceversa, se $f(n) = \Omega(g(n))$, esistono $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$ per ogni $n \geq n_1$, e se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, esistono $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ per ogni $n \geq n_2$. Combinando le due disuguaglianze, si ha

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq \max\{n_1, n_2\} \implies f(n) = \Theta(g(n)).$$

Ne segue che « $f(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione necessaria e sufficiente per « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$ ».

2. (a) Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, esistono $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq f(n) \leq c g(n)$ per ogni $n \geq n_1$. Dividendo per $c > 0$,

$$0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies g(n) = \Omega(f(n)),$$

con la costante $\frac{1}{c} > 0$.

- (b) Se $g(n) = \Omega(f(n))$, esistono $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq c f(n) \leq g(n)$ per ogni $n \geq n_1$. Dividendo per $c > 0$,

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{c} g(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)).$$

Ne segue che « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ » è una condizione necessaria e sufficiente per « $g(n) = \Omega(f(n))$ ».

3. (a) Sia $f(n) = o(g(n))$. Per dimostrare che $g(n) = \omega(f(n))$, fissiamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Per la definizione di $f(n) = o(g(n))$ con la costante $\frac{1}{c} > 0$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq f(n) < \frac{1}{c} g(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies 0 \leq c f(n) < g(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché c è arbitraria, $g(n) = \omega(f(n))$.

(b) Sia $g(n) = \omega(f(n))$. Per dimostrare che $f(n) = o(g(n))$, fissiamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Per la definizione di $g(n) = \omega(f(n))$ con la costante $\frac{1}{c} > 0$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq \frac{1}{c} f(n) < g(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies 0 \leq f(n) < c g(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché c è arbitraria, $f(n) = o(g(n))$.

Ne segue che « $f(n) = o(g(n))$ » è una condizione necessaria e sufficiente per « $g(n) = \omega(f(n))$ ».

4. (a) Se $f(n) = \Theta(g(n))$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Dividendo la disuguaglianza di sinistra per c_1 e quella di destra per c_2 , otteniamo

$$0 \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché $\frac{1}{c_2} > 0$ e $\frac{1}{c_1} > 0$, questo dimostra che $g(n) = \Theta(f(n))$.

(b) Se $g(n) = \Theta(f(n))$, lo stesso argomento, con i ruoli di f e g scambiati, dà $f(n) = \Theta(g(n))$.

Ne segue che « $f(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione necessaria e sufficiente per « $g(n) = \Theta(f(n))$ ».

Esercizio 9.15 — Notazione asintotica (E15)

Consideriamo tre funzioni f , g e h di variabile naturale asintoticamente non negative e le seguenti implicazioni (**transitività**):

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(h(n)) \implies f(n) = \Theta(h(n)), \quad (9.7)$$

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ e } g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \implies f(n) = \mathcal{O}(h(n)), \quad (9.8)$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } g(n) = \Omega(h(n)) \implies f(n) = \Omega(h(n)), \quad (9.9)$$

$$f(n) = o(g(n)) \text{ e } g(n) = o(h(n)) \implies f(n) = o(h(n)), \quad (9.10)$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \text{ e } g(n) = \omega(h(n)) \implies f(n) = \omega(h(n)). \quad (9.11)$$

Domande

1. Dimostrare che l'implicazione (9.7) è vera e scriverne la contronominale.
2. Dimostrare che l'implicazione (9.8) è vera e scriverne la contronominale.
3. Dimostrare che l'implicazione (9.9) è vera e scriverne la contronominale.

4. Dimostrare che l'implicazione (9.10) è vera e scriverne la contronominale.
5. Dimostrare che l'implicazione (9.11) è vera e scriverne la contronominale.

Soluzione

1. Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c_3, c_4 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq c_3 h(n) \leq g(n) \leq c_4 h(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Ne segue che, per ogni $n \geq \max\{n_0, n_1\}$,

$$f(n) \geq c_1 g(n) \geq c_1 c_3 h(n) \quad \text{e} \quad f(n) \leq c_2 g(n) \leq c_2 c_4 h(n),$$

quindi

$$0 \leq \underbrace{c_1 c_3}_{>0} h(n) \leq f(n) \leq \underbrace{c_2 c_4}_{>0} h(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

che dimostra $f(n) = \Theta(h(n))$. Per contrapposizione di (9.7):

$$f(n) \neq \Theta(h(n)) \implies f(n) \neq \Theta(g(n)) \quad \text{oppure} \quad g(n) \neq \Theta(h(n)).$$

2. Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$, esistono $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq f(n) \leq c_1 g(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq g(n) \leq c_2 h(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Ne segue che

$$0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \leq \underbrace{c_1 c_2}_{>0} h(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

che dimostra $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$. Per contrapposizione di (9.8):

$$f(n) \neq \mathcal{O}(h(n)) \implies f(n) \neq \mathcal{O}(g(n)) \quad \text{oppure} \quad g(n) \neq \mathcal{O}(h(n)).$$

3. Se $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$, esistono $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq c_2 h(n) \leq g(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Ne segue che

$$0 \leq \underbrace{c_1 c_2}_{>0} h(n) \leq c_1 g(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

che dimostra $f(n) = \Omega(h(n))$. Per contrapposizione di (9.9):

$$f(n) \neq \Omega(h(n)) \implies f(n) \neq \Omega(g(n)) \quad \text{oppure} \quad g(n) \neq \Omega(h(n)).$$

4. Siano $f(n) = o(g(n))$ e $g(n) = o(h(n))$, e sia $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Per la definizione di $f(n) = o(g(n))$ con la costante 1, e per la definizione di $g(n) = o(h(n))$ con la costante c , esistono $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq f(n) < g(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq g(n) < c h(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Ne segue che

$$0 \leq f(n) < g(n) < c h(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

cioè $0 \leq f(n) < c h(n)$. Poiché $c \in \mathbb{R}_{>0}$ è arbitraria, questo dimostra $f(n) = o(h(n))$. Per contrapposizione di (9.10):

$$f(n) \neq o(h(n)) \implies f(n) \neq o(g(n)) \quad \text{oppure} \quad g(n) \neq o(h(n)).$$

5. Siano $f(n) = \omega(g(n))$ e $g(n) = \omega(h(n))$, e sia $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Per la definizione di $f(n) = \omega(g(n))$ con la costante 1, e per la definizione di $g(n) = \omega(h(n))$ con la costante c , esistono $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq g(n) < f(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{e} \quad 0 \leq c h(n) < g(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Ne segue che

$$0 \leq c h(n) < g(n) < f(n), \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

cioè $0 \leq c h(n) < f(n)$. Poiché $c \in \mathbb{R}_{>0}$ è arbitraria, questo dimostra $f(n) = \omega(h(n))$. Per contrapposizione di (9.11):

$$f(n) \neq \omega(h(n)) \implies f(n) \neq \omega(g(n)) \quad \text{oppure} \quad g(n) \neq \omega(h(n)).$$

Esercizio 9.16 — Notazione asintotica (E16)

Consideriamo una funzione f di variabile naturale asintoticamente non negativa e le seguenti proprietà di **riflessività**:

$$f(n) = \Theta(f(n)), \tag{9.12}$$

$$f(n) = \mathcal{O}(f(n)), \tag{9.13}$$

$$f(n) = \Omega(f(n)). \tag{9.14}$$

Domande

1. Dimostrare che la proprietà (9.12) è vera.
2. Dimostrare che la proprietà (9.13) è vera.
3. Dimostrare che la proprietà (9.14) è vera.

Soluzione

Poiché f è asintoticamente non negativa, esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \geq 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$. Nelle tre dimostrazioni usiamo $n_1 = \tilde{n}$.

1. Per dimostrare che $f(n) = \Theta(f(n))$, determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 f(n) \leq f(n) \leq c_2 f(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Per $n \geq \tilde{n}$ la disuguaglianza $0 \leq 1 \cdot f(n) \leq f(n) \leq 1 \cdot f(n)$ vale banalmente. Scegliendo $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $n_1 = \tilde{n}$, si ha

$$0 \leq f(n) \leq f(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq \tilde{n},$$

che dimostra $f(n) = \Theta(f(n))$.

2. Per dimostrare che $f(n) = \mathcal{O}(f(n))$, determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq f(n) \leq c f(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Scegliendo $c = 1$ e $n_1 = \tilde{n}$, si ha $0 \leq f(n) \leq f(n)$ per ogni $n \geq \tilde{n}$, il che dimostra $f(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

3. Per dimostrare che $f(n) = \Omega(f(n))$, determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c f(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Scegliendo $c = 1$ e $n_1 = \tilde{n}$, si ha $0 \leq f(n) \leq f(n)$ per ogni $n \geq \tilde{n}$, il che dimostra $f(n) = \Omega(f(n))$.

Osserviamo che l'ipotesi su f è necessaria: se $f(n) < 0$ per infiniti n , la disuguaglianza $0 \leq f(n)$ richiesta dalle tre definizioni non vale per n arbitrariamente grande, e nessuna delle tre proprietà vale.

Crescita asintotica

Negli esercizi di questo capitolo gli ordini di crescita si confrontano con la notazione asintotica del capitolo 9 «Notazione asintotica» e con i risultati del capitolo «Crescita asintotica», riassunti qui sotto. I limiti di funzioni di variabile naturale (successioni) si calcolano con i risultati del corso di *Analisi Matematica 1* (<https://fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/>).

Criterio del limite. Date due funzioni di variabile naturale asintoticamente positive f e g tali che il limite $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ esista:

- $f(n) = o(g(n))$ se e solo se $L = 0^+$: f ha un **ordine di crescita strettamente minore** di quello di g (f cresce più lentamente di g);
- $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ se e solo se $L = 0^+$ oppure $L \in \mathbb{R}_{>0}$: f ha un **ordine di crescita minore o uguale** a quello di g ;
- $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se $L \in \mathbb{R}_{>0}$: f ha lo **stesso ordine di crescita** di g (f cresce come g);
- $f(n) = \Omega(g(n))$ se e solo se $L \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure $L = +\infty$: f ha un **ordine di crescita maggiore o uguale** a quello di g ;
- $f(n) = \omega(g(n))$ se e solo se $L = +\infty$: f ha un **ordine di crescita strettamente maggiore** di quello di g (f cresce più velocemente di g).

- **Definizione di Θ .** Si ha $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1}.$$

Di conseguenza, se tali costanti non esistono, $f(n) \neq \Theta(g(n))$.

- **Gerarchia.** Per ogni $a, b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\log_a^\beta n = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(b^n), \quad b^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

Esercizio 10.1 — Crescita asintotica (E1)

Dati $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente positiva:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto (n + \lambda)^\alpha$$

Dati $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente positiva:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto b^{\lambda n}$$

Dato $a \in \mathbb{R}_{>1}$, consideriamo la seguente funzione di variabile naturale asintoticamente positiva:

$$f : \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n \log_a n$$

Domande

1. Dimostrare che esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^\alpha \leq (n + \lambda)^\alpha \leq c_2 n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1},$$

cioè che $(n + \lambda)^\alpha = \Theta(n^\alpha)$, e verificare il risultato con il criterio del limite, calcolando il limite del rapporto.

2. Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ con $\lambda \neq 1$, non esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 b^n \leq b^{\lambda n} \leq c_2 b^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1},$$

e di conseguenza che $b^{\lambda n} \neq \Theta(b^n)$.

3. Dimostrare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$, non esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^\alpha \leq n \log_a n \leq c_2 n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1},$$

e di conseguenza che $n \log_a n \neq \Theta(n^\alpha)$.

Soluzione

1. Cerchiamo costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^\alpha \leq (n + \lambda)^\alpha \leq c_2 n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1}.$$

Poiché $\lambda > 0$, si ha

$$0 \leq \frac{n}{2} \leq n + \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n + \lambda \leq 2n \quad \text{se } n \geq \lambda,$$

così che, per ogni $n \geq 2\lambda$ (il che implica $n \geq \lambda$), si ha:

$$0 \leq \frac{n}{2} \leq n + \lambda \leq 2n$$

Poiché $\alpha > 0$, la funzione $x \mapsto x^\alpha$ è crescente su $\mathbb{R}_{\geq 0}$, e possiamo elevare i tre termini alla potenza α senza cambiare le disuguaglianze:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha \leq (n + \lambda)^\alpha \leq (2n)^\alpha \iff \frac{1}{2^\alpha} n^\alpha \leq (n + \lambda)^\alpha \leq 2^\alpha n^\alpha$$

Dunque, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{2^\alpha} > 0$, $c_2 = 2^\alpha > 0$ e $n_1 = \lceil 2\lambda \rceil \geq 1$, si ha:

$$0 \leq \frac{1}{2^\alpha} n^\alpha \leq (n + \lambda)^\alpha \leq 2^\alpha n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq \lceil 2\lambda \rceil}$$

Per la definizione di Θ , queste costanti dimostrano che $(n + \lambda)^\alpha = \Theta(n^\alpha)$. Verifichiamo il risultato con il limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \lambda)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\rightarrow 0}\right)^\alpha = 1 \in \mathbb{R}_{>0}$$

e il criterio del limite dà di nuovo $(n + \lambda)^\alpha = \Theta(n^\alpha)$.

2. Procediamo per assurdo, e supponiamo che esistano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 b^n \leq b^{\lambda n} \leq c_2 b^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1}.$$

Poiché $b^n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (essendo $b \in \mathbb{R}_{>1}$), dividendo per b^n otteniamo le disuguaglianze equivalenti

$$0 < c_1 \leq \underbrace{\frac{b^{\lambda n}}{b^n}}_{=\left(\frac{b^\lambda}{b}\right)^n = (b^{\lambda-1})^n} \leq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1},$$

che non possono valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 e c_2 sono costanti positive e:

- se $\lambda > 1$, allora $b^{\lambda-1} > 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b^{\lambda-1})^n = +\infty$, quindi la disuguaglianza di destra è violata per n abbastanza grande;
- se $0 < \lambda < 1$, allora $0 < b^{\lambda-1} < 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b^{\lambda-1})^n = 0^+$, quindi la disuguaglianza di sinistra è violata per n abbastanza grande.

Ne segue che, per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ con $\lambda \neq 1$, si ha $b^{\lambda n} \neq \Theta(b^n)$, poiché le costanti richieste dalla definizione di Θ non esistono.

3. Procediamo per assurdo, e supponiamo che esistano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^\alpha \leq n \log_a n \leq c_2 n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1}.$$

Poiché $n^\alpha > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dividendo per n^α otteniamo le disuguaglianze equivalenti

$$0 < c_1 \leq \underbrace{\frac{n \log_a n}{n^\alpha}}_{=\frac{\log_a n}{n^{\alpha-1}}} \leq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1},$$

che non possono valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva e, per la gerarchia degli ordini di crescita (essendo $a > 1$ e $\alpha - 1 > 0$):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^{\alpha-1}} = 0^+$$

Ne segue che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ e ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $n \log_a n \neq \Theta(n^\alpha)$: lo stesso limite mostra, per il criterio del limite, che $n \log_a n = o(n^\alpha)$.

Esercizio 10.2 — Crescita asintotica (E2)

Consideriamo la seguente funzione di variabile naturale:

$$f : \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto \ln(\ln n)$$

Domande

1. Dimostrare che la funzione f è asintoticamente positiva e asintoticamente crescente.
2. Dimostrare che $\ln(\ln n) = o(\ln n)$.

Soluzione

1. La funzione $x \mapsto \ln x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}_{>0}$, quindi $n \mapsto \ln(\ln n)$ è strettamente crescente su $\mathbb{N}_{\geq 2}$. Non è positiva su tutto il dominio, poiché $\ln 2 < 1$ e quindi $f(2) = \ln(\ln 2) < 0$; ma $\ln 3 > 1$, dunque

$$f(n) = \ln(\ln n) \geq \ln(\ln 3) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}.$$

La funzione f è quindi asintoticamente positiva (con $n_1 = 3$) e asintoticamente crescente.

2. Entrambe le funzioni sono positive per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Calcoliamo il limite del rapporto estendendo il dominio ai numeri reali, cioè calcolando il limite della funzione di variabile reale $x \mapsto \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ per $x \rightarrow +\infty$: se questo limite esiste, il limite della funzione di variabile naturale è lo stesso. Poiché sia il numeratore sia il denominatore tendono a $+\infty$, possiamo usare il teorema di De l'Hospital (corso di *Analisi Matematica 1*, capitolo *Teorema di De l'Hospital e derivabilità*):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} [\ln(\ln x)]}{\frac{d}{dx} [\ln x]}$$

La derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dx} [\ln(\ln x)] = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x},$$

e la derivata del denominatore è

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Sostituendo, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0^+$$

Ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0^+,$$

cioè, per il criterio del limite, $\ln(\ln n) = o(\ln n)$.

Esercizio 10.3 — Crescita asintotica (E3)

Consideriamo le seguenti dodici funzioni di variabile naturale, definite per $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$\begin{array}{llll} f_1(n) = \log_2(n^5) & f_2(n) = \ln^3 n & f_3(n) = \sqrt{n} & f_4(n) = n \ln n \\ f_5(n) = (n+7)^2 & f_6(n) = 3n^2 + 100n & f_7(n) = n^{10} & f_8(n) = 2^{n/2} \\ f_9(n) = 2^{n+10} & f_{10}(n) = 3^n & f_{11}(n) = n! & f_{12}(n) = n^n \end{array}$$

Domande

1. Ordinare le dodici funzioni per ordine di crescita crescente, raggruppando le funzioni f_i e f_j tali che $f_i(n) = \Theta(f_j(n))$. Giustificare ogni confronto fra due gruppi consecutivi con i risultati del capitolo «Crescita asintotica».
2. Classificare ogni funzione: ha un ordine di crescita sub-lineare, lineare o super-lineare? Quali funzioni hanno un ordine di crescita limitato polilogaritmicamente, e quali un ordine di crescita limitato polinomialmente?
3. L'ordine di crescita descrive il comportamento delle funzioni per valori grandi di n . Verificare che $f_2(4) > f_3(4)$ e che $f_7(n) > f_8(n)$ per $n = 100$, e spiegare perché ciò non contraddice la risposta alla prima domanda.

Soluzione

1. L'ordine è il seguente (le funzioni dello stesso gruppo sono ciascuna Θ dell'altra):

$$f_1 \prec f_2 \prec f_3 \prec f_4 \prec \{f_5, f_6\} \prec f_7 \prec f_8 \prec f_9 \prec f_{10} \prec f_{11} \prec f_{12}$$

dove qui $f \prec g$ è un'abbreviazione di $f(n) = o(g(n))$. Le giustificazioni sono le seguenti.

- $f_1(n) = \log_2(n^5) = 5 \log_2 n = \Theta(\ln n)$ (cambio di base). Inoltre $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{5 \log_2 n}{\ln^3 n} = \frac{5}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\ln^2 n} \rightarrow 0^+$, quindi $f_1 \prec f_2$.
- $f_2 \prec f_3$: polilogaritmi e potenze, con $\beta = 3$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.
- $f_3 \prec f_4$: $\frac{\sqrt{n}}{n \ln n} = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \rightarrow 0^+$.
- $f_4 \prec f_5$: per la proprietà della funzione quasi-lineare e delle potenze (con $\alpha = 2$) e per la traslazione dell'argomento di una potenza,

$$\frac{n \ln n}{(n+7)^2} = \underbrace{\frac{n \ln n}{n^2}}_{\rightarrow 0^+} \cdot \underbrace{\frac{n^2}{(n+7)^2}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0^+.$$

- $f_5(n) = \Theta(f_6(n))$: entrambe sono $\Theta(n^2)$ (traslazione dell'argomento; polinomio con termine di grado massimo $3n^2$), e infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+7)^2}{3n^2 + 100n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{14}{n} + \frac{49}{n^2}}{3 + \frac{100}{n}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

- $f_6 \prec f_7$: $\frac{3n^2+100n}{n^{10}} = \frac{3}{n^8} + \frac{100}{n^9} \rightarrow 0^+$.
- $f_7 \prec f_8$: potenze ed esponenziali, poiché $2^{n/2} = (\sqrt{2})^n$ con base $\sqrt{2} > 1$.
- $f_8 \prec f_9$: $f_9(n) = 2^{n+10} = \Theta(2^n)$ (traslazione dell'esponente), e $2^{n/2} = o(2^n)$ (scalatura dell'esponente con $\lambda = \frac{1}{2}$); direttamente,

$$\frac{2^{n/2}}{2^{n+10}} = \frac{1}{1024} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \rightarrow 0^+.$$

- $f_9 \prec f_{10}$: $\frac{2^{n+10}}{3^n} = 1024 \left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0^+$ (basi diverse).
- $f_{10} \prec f_{11} \prec f_{12}$: esponenziali e fattoriale, fattoriale e autopotenza.

2. Confrontando ogni funzione con n :

- f_1, f_2 e f_3 sono $o(n)$, un ordine di crescita sub-lineare ($f_1 \prec f_2 \prec f_3$ e $\frac{\sqrt{n}}{n} \rightarrow 0^+$);
- nessuna funzione dell'elenco è $\Theta(n)$, un ordine di crescita lineare;
- $f_4, f_5, \dots, f_{12}$ sono $\omega(n)$, un ordine di crescita super-lineare (f_4 è quasi-lineare, e tutte le altre sono ω di f_4).

Le funzioni f_1 (limitata logaritmicamente, con $\beta = 1$) e f_2 (con $\beta = 3$) hanno un ordine di crescita limitato polilogaritmicamente; f_3 no, poiché $f_3(n) = \omega(\ln^\beta n)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$. Le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_7$ hanno un ordine di crescita limitato polinomialmente (per esempio f_4 con $\alpha = 2$, e f_7 con $\alpha = 10$); le funzioni $f_8, f_9, \dots, f_{12}$ no, poiché sono $\omega(n^\alpha)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Fra queste, f_8, f_9 e f_{10} hanno un ordine di crescita limitato esponenzialmente.

3. Per $n = 4$ si ha

$$f_2(4) = \ln^3 4 \approx 2.66 > 2 = \sqrt{4} = f_3(4),$$

e per $n = 100$ si ha

$$f_7(100) = 100^{10} = 10^{20} > 2^{50} \approx 1.1 \cdot 10^{15} = f_8(100).$$

Ciò non contraddice la prima risposta: il confronto fra gli ordini di crescita riguarda il limite del rapporto, cioè il comportamento per n grande. La disuguaglianza $\ln^3 n \geq \sqrt{n}$ vale per ogni n da 4 a 24,128,091, e $\ln^3 n < \sqrt{n}$ per ogni $n \geq 24,128,092$; analogamente, $n^{10} \geq 2^{n/2}$ vale per ogni n da 2 a 143, e $n^{10} < 2^{n/2}$ per ogni $n \geq 144$. Queste soglie sono state calcolate numericamente.

Esercizio 10.4 — Crescita asintotica (E4)

Consideriamo le seguenti coppie di funzioni di variabile naturale (f, g) , definite per $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

- (a) $f(n) = 2^{n/2}$, $g(n) = 2^n$; (b) $f(n) = 2^{3n/2}$, $g(n) = 2^n$;
 (c) $f(n) = 4^n$, $g(n) = 2^{2n}$; (d) $f(n) = \log_2 n$, $g(n) = \log_{10} n$;
 (e) $f(n) = \ln(n^2 + 1)$, $g(n) = \ln n$; (f) $f(n) = n \ln n$, $g(n) = n^{3/2}$.

Domande

- Per ogni coppia, calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ (per la coppia (d), considerare $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dove $g(n) > 0$) e stabilire, con il criterio del limite, se $f(n) = o(g(n))$, $f(n) = \Theta(g(n))$ oppure $f(n) = \omega(g(n))$.
- Per ogni coppia, indicare, quando è possibile, quale proprietà del capitolo «Crescita asintotica» dà la stessa risposta senza calcolare il limite.

Soluzione

1. I limiti sono i seguenti.

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n/2}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = 0^+: f(n) = o(g(n)).$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{3n/2}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty: f(n) = \omega(g(n)).$$

$$(c) 4^n = (2^2)^n = 2^{2n}, \text{ quindi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{2^{2n}} = 1: f(n) = \Theta(g(n)) \text{ (sono la stessa funzione).}$$

$$(d) \text{ Poiché } \log_2 n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2}, \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 n}{\log_{10} n} = \frac{1}{\log_{10} 2} = \log_2 10 \approx 3.32: f(n) = \Theta(g(n)).$$

(e) Poiché $\ln(n^2 + 1) = \ln(n^2(1 + \frac{1}{n^2})) = 2 \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n^2})$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \overbrace{\frac{\ln(1 + \frac{1}{n^2})}{\ln n}}^{\rightarrow 0} \right) = 2 :$$

$$f(n) = \Theta(g(n)).$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln n}{n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = 0^+ : f(n) = o(g(n)).$$

2. Le proprietà sono le seguenti.

- (a), (b) Scalatura dell'esponente di un esponenziale, con $\lambda = \frac{1}{2} < 1$ e $\lambda = \frac{3}{2} > 1$ (oppure basi diverse, $\sqrt{2} < 2$ e $2\sqrt{2} > 2$).
- (c) La scalatura dell'esponente con $\lambda = 2$ direbbe che $2^{2n} = \omega(2^n)$; qui, invece, la base $4 = 2^2$ assorbe già il fattore 2, e le due funzioni coincidono.
- (d) Cambio di base di un logaritmo.
- (e) Nessuna proprietà del capitolo si applica direttamente, poiché l'argomento $n^2 + 1$ non è né della forma $n + \lambda$ né della forma λn . L'identità $\ln(n^2 + 1) = 2 \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n^2})$ della prima risposta svolge lo stesso ruolo della traslazione dell'argomento: il termine $\ln(1 + \frac{1}{n^2})$ tende a 0, e ciò che resta, $2 \ln n$, è $\Theta(\ln n)$.
- (f) Funzione quasi-lineare e potenze, con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.