



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Algoritmi

Volume 3 — Notazione e crescita asintotica

Come si confrontano le funzioni di variabile naturale che contano i passi di un algoritmo: le notazioni asintotiche Theta, O grande, Omega, o piccolo e omega, le loro proprietà e il criterio del limite; poi le famiglie di funzioni crescenti (logaritmi, potenze, esponenziali, fattoriale), la gerarchia degli infiniti e il confronto degli ordini di crescita scritto con i simboli. Limiti e funzioni di variabile naturale si danno per noti dal corso di Analisi Matematica 1.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:

fabiofurini.github.io/algoritmi/
github.com/fabiofurini/algoritmi

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Notazione asintotica	2
	Introduzione	2
9.1	Notazioni Θ , $\mathcal{O}$ e Ω	3
9.2	Notazioni o e ω	14
9.3	Limiti e notazioni asintotiche	18
9.4	Proprietà relazionali delle notazioni asintotiche	27
9.5	Notazione asintotica nell'analisi degli algoritmi	31
	Riepilogo	32
10	Crescita asintotica	33
	Introduzione	33
10.1	Famiglie di funzioni crescenti di variabile naturale	34
10.2	La gerarchia degli infiniti	36
10.3	Confronto fra ordini di crescita	38

Notazione asintotica

Introduzione

Il numero di passi eseguiti da un algoritmo è una funzione di un numero naturale: la dimensione del suo input. Due algoritmi che risolvono lo stesso problema si confrontano guardando quanto velocemente crescono queste funzioni al crescere dell'input, trascurando i fattori costanti e i valori su poche piccole istanze. In questo capitolo diamo il linguaggio preciso con cui si esprimono questi confronti: le **notazioni asintotiche** Θ , $\mathcal{O}$, Ω , o e ω .

Prerequisiti. Le funzioni di variabile naturale sono le **successioni** del corso di *Analisi Matematica 1* (<https://fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/>, versione inglese <https://fabiofurini.github.io/mathematical-analysis-1/>). I loro limiti, e i teoremi usati per calcolarli, non vengono rispiegati in questo capitolo: usiamo la definizione di limite e le regole di calcolo dei limiti della parte *Limiti di successioni* di quel corso.

Il capitolo è organizzato così.

- Nella Sezione 9.1 definiamo le notazioni Θ , $\mathcal{O}$ e Ω , le interpretiamo graficamente e dimostriamo che Θ equivale a $\mathcal{O}$ e Ω insieme. Studiamo anche la somma e il massimo di due funzioni.
- Nella Sezione 9.2 definiamo le notazioni o e ω , che esprimono limitazioni che **non** sono asintoticamente strette.
- Nella Sezione 9.3 collegiamo le cinque notazioni al limite del rapporto $\frac{f(n)}{g(n)}$. Quando il limite esiste, il suo valore decide quali delle cinque notazioni valgono (Proposizione 9.18, il **criterio del limite**); quando non esiste, si usano le definizioni.
- Nella Sezione 9.4 dimostriamo le proprietà relazionali delle notazioni (transitività, riflessività, simmetria e simmetria trasposta), che rendono il confronto asintotico di due funzioni simile al confronto di due numeri reali, con una differenza importante.
- Nella Sezione 9.5 vediamo come si usa la notazione nell'analisi degli algoritmi dei capitoli «Dimensione dell'input» e «Tempo di esecuzione».

Ogni costante (c , c_1 , c_2 , n_1) usata negli esempi del capitolo è stata controllata numericamente con uno script, per tutti i valori di n dalla soglia n_1 fino ad almeno $2 \cdot 10^5$.

In tutto il capitolo usiamo la seguente terminologia.

Definizione 9.1: funzioni asintoticamente non negative e asintoticamente positive

Una funzione f di variabile naturale è **asintoticamente non negativa** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \geq 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$. È **asintoticamente positiva** se esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) > 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$.

9.1 Notazioni Θ , $\mathcal{O}$ e Ω

9.1.1 Definizioni

Definizione 9.2: notazione Θ

Date due funzioni f e g di variabile naturale, scriviamo $f(n) = \Theta(g(n))$ se esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1. \quad (9.1)$$

- Se $f(n) = \Theta(g(n))$, allora, per valori sufficientemente grandi di n , la funzione f è limitata dall'alto e dal basso dalla funzione g moltiplicata per due costanti positive.
- In questo caso diciamo che la funzione g è una **limitazione asintotica stretta** per la funzione f .
- Scriviamo $f(n) = \Theta(1)$ per dire che i valori $f(n)$ sono, per n sufficientemente grande, limitati dall'alto e dal basso da due costanti positive (qui g è la funzione costante $g(n) = 1$).

Definizione 9.3: notazione $\mathcal{O}$

Date due funzioni f e g di variabile naturale, scriviamo $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ se esistono $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq f(n) \leq c g(n), \quad \forall n \geq n_1. \quad (9.2)$$

- Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, allora, per valori sufficientemente grandi di n , la funzione f è limitata dall'alto dalla funzione g moltiplicata per una costante positiva.
- In questo caso diciamo che la funzione g è una **limitazione superiore asintotica** per la funzione f .

Definizione 9.4: notazione Ω

Date due funzioni f e g di variabile naturale, scriviamo $f(n) = \Omega(g(n))$ se esistono

$c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c g(n) \leq f(n), \quad \forall n \geq n_1. \quad (9.3)$$

- Se $f(n) = \Omega(g(n))$, allora, per valori sufficientemente grandi di n , la funzione f è limitata dal basso dalla funzione g moltiplicata per una costante positiva.
- In questo caso diciamo che la funzione g è una **limitazione inferiore asintotica** per la funzione f .

Se $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ oppure $f(n) = \Omega(g(n))$ allora, poiché le costanti c_1 e c sono positive, si ha $g(n) \geq 0$ e $f(n) \geq 0$ per ogni $n \geq n_1$ (per $\mathcal{O}$, la disuguaglianza $0 \leq f(n) \leq c g(n)$ dà anche $g(n) \geq 0$). Quindi le due funzioni f e g sono **asintoticamente non negative**.

- Per dimostrare una di queste affermazioni **determiniamo** le costanti (c , oppure c_1 e c_2) e la soglia n_1 . In generale la soglia n_1 non è la più piccola possibile e le costanti non sono uniche: anche qualunque soglia più grande, qualunque c_1 più piccola e qualunque c_2 più grande (o c nella definizione di $\mathcal{O}$) funzionano.
- Per dimostrare che un'affermazione è falsa procediamo per assurdo: supponiamo che le costanti esistano e ricaviamo una disuguaglianza che non può valere per n arbitrariamente grande.

9.1.2 Esempi di limitazioni asintotiche strette

Esempio 9.1: limitazione asintotica stretta

- Per dimostrare che

$$-3n + \frac{1}{2}n^2 = \Theta(n^2)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq -3n + \frac{1}{2}n^2 \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

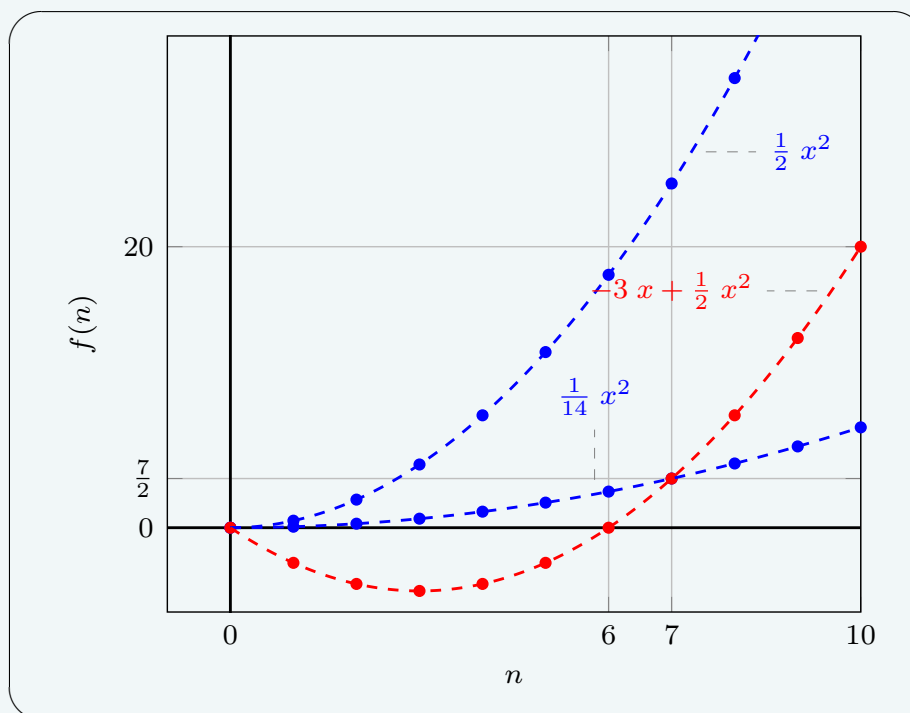
Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Il termine centrale cresce con n ed è sempre minore di $\frac{1}{2}$. Quindi, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{14}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ e $n_1 = 7$ (abbiamo scelto $\frac{1}{14}$ poiché $\frac{1}{14} = \frac{1}{2} - \frac{3}{7}$), si ha

$$0 \leq \frac{1}{14}n^2 \leq -3n + \frac{1}{2}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2, \quad \forall n \geq 7.$$

Per $n = 6$ la limitazione inferiore non vale, poiché $-18 + 18 = 0 < \frac{36}{14}$.



- La dimostrazione precedente dimostra anche che

$$-3n + \frac{1}{2}n^2 = \mathcal{O}(n^2) \quad \text{e} \quad -3n + \frac{1}{2}n^2 = \Omega(n^2).$$

Esempio 9.2: limitazione asintotica stretta

- Per dimostrare che

$$n^2 (2 - \sin n) = \Theta(n^2)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

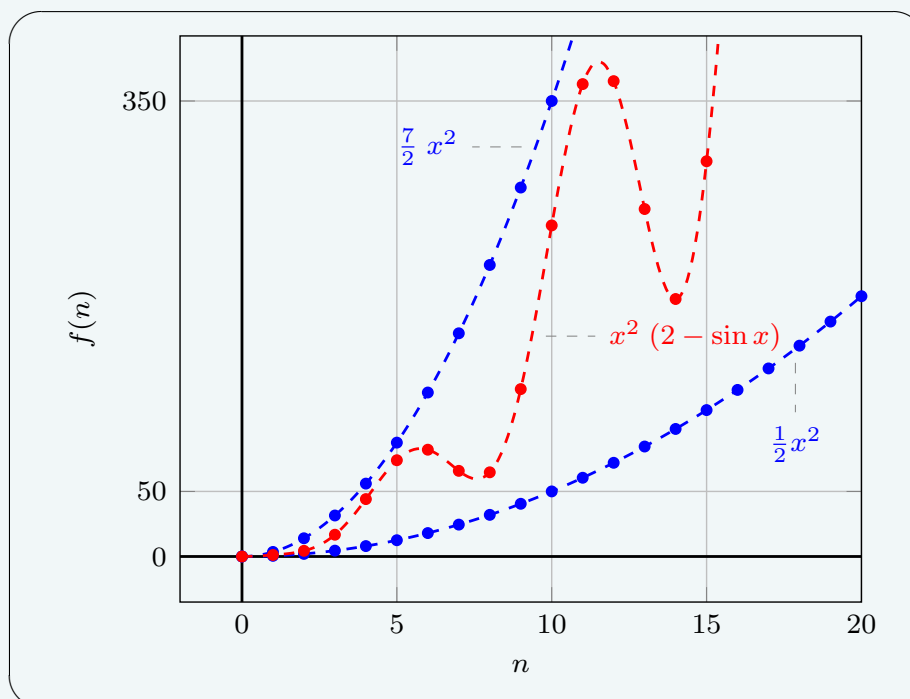
$$0 \leq c_1 n^2 \leq n^2 (2 - \sin n) \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq 2 - \sin n \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$, si ha $1 \leq 2 - \sin n \leq 3$. Quindi, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{7}{2}$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{1}{2} n^2 \leq n^2 (2 - \sin n) \leq \frac{7}{2} n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

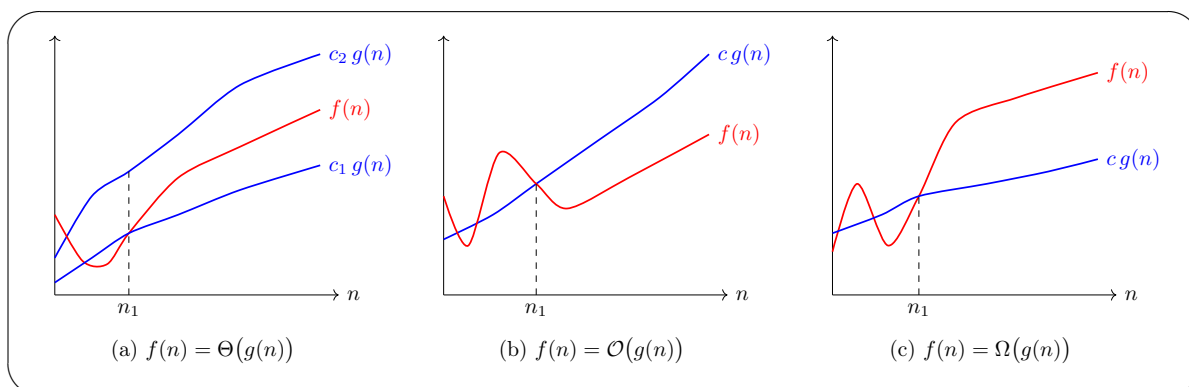


- La dimostrazione precedente dimostra anche che

$$n^2 (2 - \sin n) = \mathcal{O}(n^2) \quad \text{e} \quad n^2 (2 - \sin n) = \Omega(n^2).$$

9.1.3 Interpretazione grafica

La figura seguente dà un'interpretazione grafica delle tre notazioni.



- In (a), da n_1 in poi, i valori di f stanno fra $c_1 g(n)$ e $c_2 g(n)$; in (b) stanno sotto $c g(n)$; in (c) stanno sopra $c g(n)$. Prima di n_1 non si richiede nulla.
- Nella figura n_1 è la soglia più piccola possibile, ma anche qualunque valore più grande andrebbe bene. La figura illustra inoltre una possibile scelta delle costanti c_1, c_2 e c , ma esistono altre scelte valide.

9.1.4 Θ rispetto a $\mathcal{O}$ e Ω

Osservazione 9.5: Θ equivale a $\mathcal{O}$ e Ω

Date due funzioni f e g di variabile naturale, si ha

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n)). \quad (9.4)$$

In particolare,

$$f(n) = \Theta(g(n)) \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad \text{e} \quad f(n) = \Theta(g(n)) \implies f(n) = \Omega(g(n)). \quad (9.5)$$

Dimostrazione. Se $f(n) = \Theta(g(n))$, le due disuguaglianze $0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ e $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$ contenute in (9.1) danno $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ (con $c = c_2$) e $f(n) = \Omega(g(n))$ (con $c = c_1$), con la stessa soglia n_1 .

Viceversa, sia $0 \leq f(n) \leq c' g(n)$ per ogni $n \geq n'_1$, e $0 \leq c'' g(n) \leq f(n)$ per ogni $n \geq n''_1$. Scegliendo $c_1 = c''$, $c_2 = c'$ e $n_1 = \max\{n'_1, n''_1\}$, otteniamo

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè $f(n) = \Theta(g(n))$. □

- Ne segue che « $f(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ », e « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ » è una condizione necessaria per « $f(n) = \Theta(g(n))$ ». Per contrapposizione si ha anche

$$f(n) \neq \mathcal{O}(g(n)) \implies f(n) \neq \Theta(g(n)).$$

L'implicazione non vale nell'altro verso (si vedano i due esempi seguenti), cioè

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)).$$

- Allo stesso modo, « $f(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \Omega(g(n))$ », e « $f(n) = \Omega(g(n))$ » è una condizione necessaria per « $f(n) = \Theta(g(n))$ ». Per contrapposizione si ha anche

$$f(n) \neq \Omega(g(n)) \implies f(n) \neq \Theta(g(n)),$$

e l'implicazione non vale nell'altro verso (si veda il terzo esempio più avanti):

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)).$$

Esempio 9.3: limitazione superiore asintotica non stretta

- Per dimostrare che

$$3n^2 = \mathcal{O}(n^3)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 3n^2 \leq cn^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

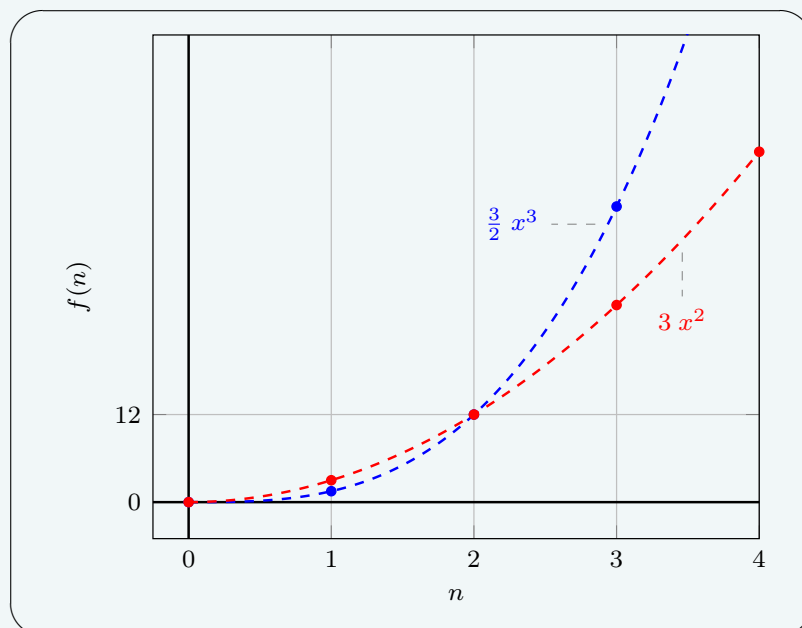
Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 , questo equivale a

$$0 \leq \frac{3}{n} \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Quindi, scegliendo per esempio $c = \frac{3}{2}$ e $n_1 = 2$, si ha

$$0 \leq 3n^2 \leq \frac{3}{2}n^3, \quad \forall n \geq 2.$$

(Per $n = 1$ la disuguaglianza non vale, poiché $3 > \frac{3}{2}$.)



- Per dimostrare che

$$3n^2 \neq \Theta(n^3)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^3 \leq 3n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{3}{n}, \quad \forall n \geq n_1,$$

che non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva (non vale per ogni $n > \frac{3}{c_1}$).

Esempio 9.4: limitazione superiore asintotica non stretta

- Per dimostrare che

$$n^2 \sin^2 n = \mathcal{O}(n^2)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

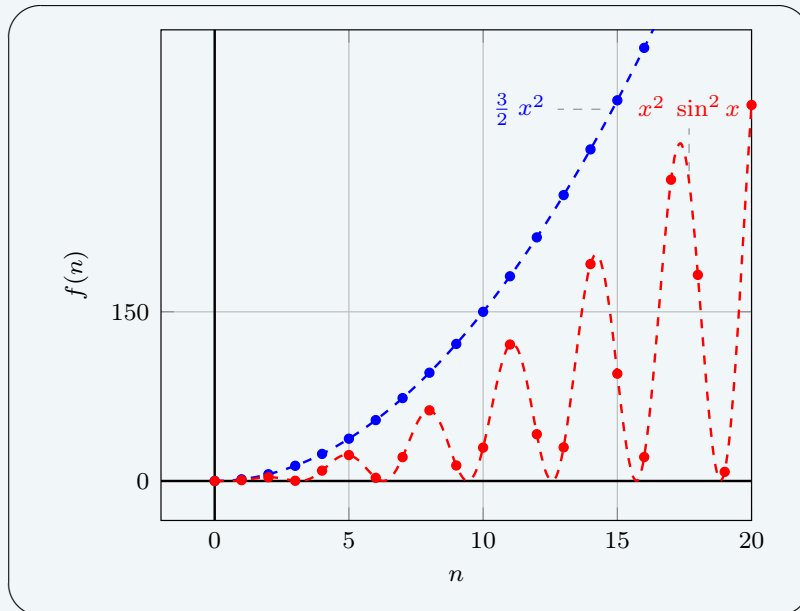
$$0 \leq n^2 \sin^2 n \leq c n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 , questo equivale a

$$0 \leq \sin^2 n \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché $0 \leq \sin^2 n \leq 1$, scegliendo per esempio $c = \frac{3}{2}$ e $n_1 = 1$ si ha

$$0 \leq n^2 \sin^2 n \leq \frac{3}{2} n^2, \quad \forall n \geq 1.$$



- Per dimostrare che

$$n^2 \sin^2 n \neq \Theta(n^2)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq n^2 \sin^2 n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \sin^2 n, \quad \forall n \geq n_1,$$

che non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva.^a

^aPoiché π è irrazionale, i valori $n \bmod \pi$, $n \in \mathbb{N}$, sono densi in $[0, \pi]$. Quindi, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esistono interi n arbitrariamente grandi tali che $|\sin n| < \varepsilon$. Scegliendo $\varepsilon = \frac{\sqrt{c_1}}{2}$, otteniamo $\sin^2 n < \frac{c_1}{4} < c_1$, il che contraddice $c_1 \leq \sin^2 n$ per ogni n sufficientemente grande.

Esempio 9.5: limitazione inferiore asintotica non stretta

- Per dimostrare che

$$2n^3 = \Omega(n^2)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

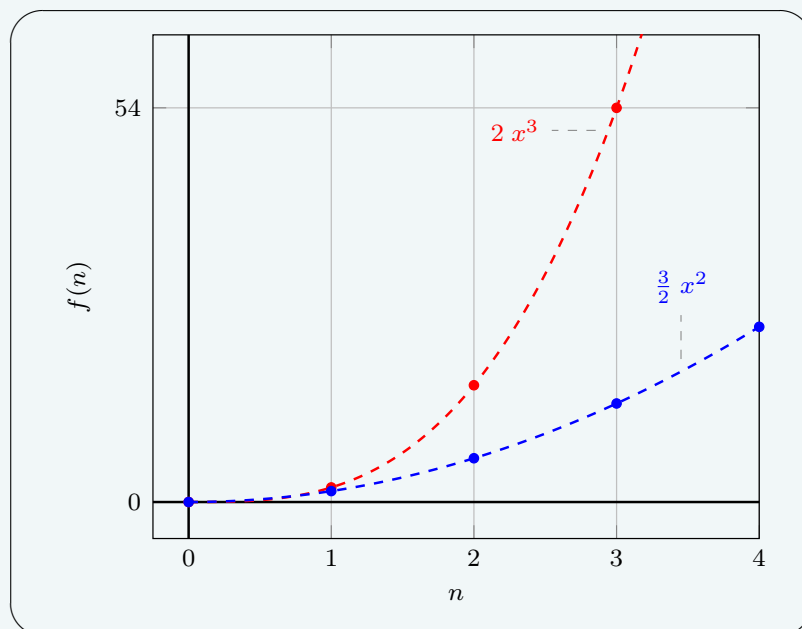
$$0 \leq c n^2 \leq 2n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c > 0$, questo equivale a

$$0 < c \leq 2n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Quindi, scegliendo per esempio $c = \frac{3}{2}$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{3}{2} n^2 \leq 2n^3, \quad \forall n \geq 1.$$



- Per dimostrare che

$$2n^3 \neq \Theta(n^2)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 2n^3 \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 , questo equivale a

$$0 \leq 2n \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1,$$

che non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_2 è una costante (non vale per ogni $n > \frac{c_2}{2}$).

9.1.5 Somma e massimo di due funzioni

Osservazione 9.6: aggiungere la limitazione alla funzione

Date due funzioni f e g di variabile naturale, si ha

$$f(n) = \Theta(g(n)) \implies f(n) + g(n) = \Theta(g(n)). \quad (9.6)$$

Dimostrazione. Se $f(n) = \Theta(g(n))$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \quad \forall n \geq n_1.$$

Inoltre, poiché $c_1 > 0$, si ha $g(n) \geq 0$ per ogni $n \geq n_1$. Allora, sommando $g(n)$, otteniamo

$$0 \leq \underbrace{c_1 g(n) + g(n)}_{=\underbrace{(c_1 + 1)}_{>0} g(n)} \leq f(n) + g(n) \leq \underbrace{c_2 g(n) + g(n)}_{=\underbrace{(c_2 + 1)}_{>0} g(n)}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Di conseguenza $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$, con le costanti $c_1 + 1$ e $c_2 + 1$ e la stessa soglia n_1 . $\square$

Esempio 9.6: limitazione asintotica stretta di una somma

- Nell'Esempio 9.1 abbiamo dimostrato che

$$-3n + \frac{1}{2}n^2 = \Theta(n^2)$$

con $c_1 = \frac{1}{14}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ e $n_1 = 7$. Allora, per (9.6), si ha

$$-3n + \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \Theta(n^2),$$

con le costanti $c_1 + 1 = \frac{15}{14}$, $c_2 + 1 = \frac{3}{2}$ e $n_1 = 7$.

- Nell'Esempio 9.2 abbiamo dimostrato che

$$n^2 (2 - \sin n) = \Theta(n^2)$$

con $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{7}{2}$ e $n_1 = 1$. Allora, per (9.6), si ha

$$n^2 (2 - \sin n) + n^2 = \Theta(n^2),$$

con le costanti $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$ e $n_1 = 1$.

- Per l'implicazione (9.6), l'affermazione « $f(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$ », e « $f(n) + g(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione necessaria per « $f(n) = \Theta(g(n))$ ». Per contrapposizione di (9.6) si ha anche

$$f(n) + g(n) \neq \Theta(g(n)) \implies f(n) \neq \Theta(g(n)).$$

L'implicazione (9.6) non vale nell'altro verso (si veda il controesempio seguente), cioè

$$f(n) + g(n) = \Theta(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)).$$

Esempio 9.7: l'inverso dell'Osservazione 9.6 è falso

Siano $f(n) = 10n$ e $g(n) = \frac{1}{10}n^2$.

- Per dimostrare che

$$f(n) + g(n) = 10n + \frac{1}{10}n^2 = \Theta\left(\frac{1}{10}n^2\right) = \Theta(g(n))$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

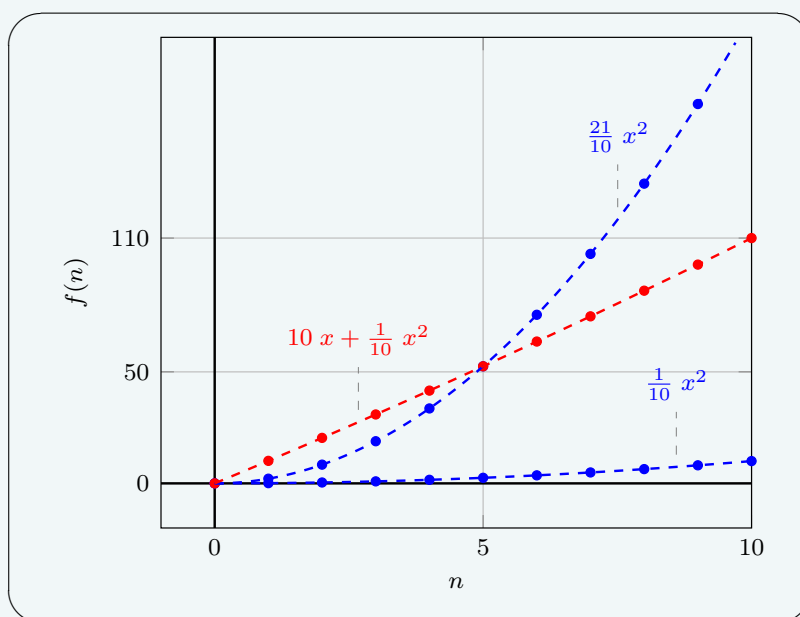
$$0 \leq c_1 \frac{1}{10}n^2 \leq 10n + \frac{1}{10}n^2 \leq c_2 \frac{1}{10}n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per $\frac{1}{10}n^2$ e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{100}{n} + 1 \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Il termine centrale decresce con n ed è sempre maggiore di 1; per $n = 5$ è uguale a 21. Quindi, scegliendo per esempio $c_1 = 1$, $c_2 = 21$ e $n_1 = 5$, si ha

$$0 \leq \frac{1}{10}n^2 \leq 10n + \frac{1}{10}n^2 \leq \frac{21}{10}n^2, \quad \forall n \geq 5.$$



- Per dimostrare che

$$f(n) = 10n \neq \Theta\left(\frac{1}{10}n^2\right) = \Theta(g(n))$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 \frac{1}{10}n^2 \leq 10n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per $\frac{1}{10} n^2$ e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{100}{n}, \quad \forall n \geq n_1,$$

che non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva.

Quando sommiamo due funzioni, il comportamento asintotico della somma è determinato dalla maggiore delle due. Le due osservazioni seguenti lo precisano.

Osservazione 9.7: somma e massimo (1)

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente non negative, si ha

$$f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\}).$$

Dimostrazione. Poiché f e g sono asintoticamente non negative, esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \geq 0$ e $g(n) \geq 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$. Allora la somma è almeno il maggiore dei due termini e al più il doppio del maggiore dei due termini:

$$0 \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2 \max\{f(n), g(n)\}, \quad \forall n \geq \tilde{n}.$$

Questo mostra che le costanti $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $n_1 = \tilde{n}$ soddisfano

$$0 \leq c_1 \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq c_2 \max\{f(n), g(n)\}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Quindi $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$. □

Osservazione 9.8: somma e massimo (2)

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente non negative, si ha

$$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n)).$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) \geq 0$ e $g(n) \geq 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$. Il maggiore di due numeri non negativi è almeno la loro media e al più la loro somma:

$$0 \leq \frac{1}{2} (f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n), \quad \forall n \geq \tilde{n}.$$

Questo mostra che le costanti $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$ e $n_1 = \tilde{n}$ soddisfano

$$0 \leq c_1 (f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq c_2 (f(n) + g(n)), \quad \forall n \geq n_1.$$

Quindi $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$. □

Esempio 9.8: somma e massimo

Per le Osservazioni 9.7 e 9.8 si ha

$$\frac{1}{2}n^2 + 2^n = \Theta\left(\max\left\{\frac{1}{2}n^2, 2^n\right\}\right) \quad \text{e} \quad \max\left\{\frac{1}{2}n^2, 2^n\right\} = \Theta\left(\frac{1}{2}n^2 + 2^n\right).$$

In questo caso $\max\left\{\frac{1}{2}n^2, 2^n\right\} = 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, così che $\frac{1}{2}n^2 + 2^n = \Theta(2^n)$, con $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $n_1 = 0$.

9.2 Notazioni o e ω

Le limitazioni asintotiche espresse dalle notazioni $\mathcal{O}$ e Ω possono essere o non essere asintoticamente strette. Usiamo la notazione o per indicare una limitazione superiore asintotica che **non è asintoticamente stretta**, e la notazione ω per indicare una limitazione inferiore asintotica che **non è asintoticamente stretta**.

Esempio 9.9: limitazioni superiori asintoticamente strette e non strette

- Si ha $3n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ e $3n^3 = \Theta(n^3)$: n^3 è una limitazione superiore asintotica per $3n^3$, ed è anche una limitazione asintoticamente stretta.
- Si ha $3n^3 = \mathcal{O}(n^4)$ ma $3n^3 \neq \Theta(n^4)$: n^4 è una limitazione superiore asintotica per $3n^3$, ma non è una limitazione asintoticamente stretta.

Definizione 9.9: notazione o

Date due funzioni f e g di variabile naturale, scriviamo $f(n) = o(g(n))$ se per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq f(n) < c g(n), \quad \forall n \geq n_1. \quad (9.7)$$

- Se $f(n) = o(g(n))$, allora, per valori sufficientemente grandi di n , la funzione f è limitata dall'alto dalla funzione g moltiplicata per **qualunque** costante positiva, cioè la funzione f diventa trascurabile rispetto alla funzione g .
- In questo caso diciamo che la funzione g è una **limitazione superiore asintotica non stretta** per la funzione f .
- La differenza con la notazione $\mathcal{O}$ sta nel quantificatore sulla costante: per $\mathcal{O}$ la disuguaglianza deve valere per **una** costante c , per o deve valere per **ogni** costante c . La soglia n_1 dipende da c : più piccola è c , più grande è, in generale, n_1 .

Definizione 9.10: notazione ω

Date due funzioni f e g di variabile naturale, scriviamo $f(n) = \omega(g(n))$ se per ogni

$c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq c g(n) < f(n), \quad \forall n \geq n_1. \quad (9.8)$$

- Se $f(n) = \omega(g(n))$, allora, per valori sufficientemente grandi di n , la funzione f è limitata dal basso dalla funzione g moltiplicata per **qualsunque** costante positiva, cioè la funzione f diventa arbitrariamente grande rispetto alla funzione g .
- In questo caso diciamo che la funzione g è una **limitazione inferiore asintotica non stretta** per la funzione f .

Se $f(n) = o(g(n))$ oppure $f(n) = \omega(g(n))$ allora, poiché $c > 0$, si ha $g(n) \geq 0$ e $f(n) \geq 0$ per ogni $n \geq n_1$. Quindi le due funzioni f e g sono **asintoticamente non negative**.

Esempio 9.10: limitazione superiore asintotica non stretta

- Per dimostrare che

$$3n = o(n^2)$$

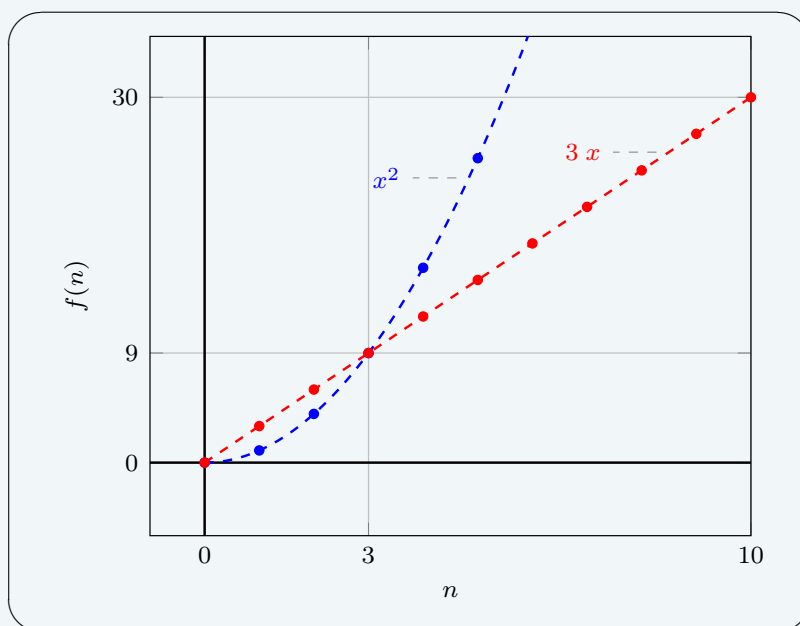
dobbiamo verificare che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq 3n < c n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per $n \geq 1$, dividendo per n^2 , la condizione equivale a

$$0 \leq \frac{3}{n} < c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Questo vale ogni volta che $n > \frac{3}{c}$, quindi possiamo scegliere qualunque $n_1 > \frac{3}{c}$, per esempio $n_1 = \lfloor \frac{3}{c} \rfloor + 1$. Per esempio, $c = 1$ dà $n_1 = 4$, $c = \frac{1}{2}$ dà $n_1 = 7$ e $c = \frac{1}{10}$ dà $n_1 = 31$.



- La dimostrazione precedente dimostra anche che

$$3n = \mathcal{O}(n^2)$$

(basta prendere un valore di c , per esempio $c = 1$ con $n_1 = 4$).

- Per dimostrare che

$$3n \neq \Theta(n^2)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq 3n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^2 e poiché $c_1 > 0$, questo equivale a

$$0 < c_1 \leq \frac{3}{n}, \quad \forall n \geq n_1,$$

che non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_1 è una costante positiva.

Esempio 9.11: limitazione inferiore asintotica non stretta

- Per dimostrare che

$$\frac{1}{5}n^2 = \omega(n)$$

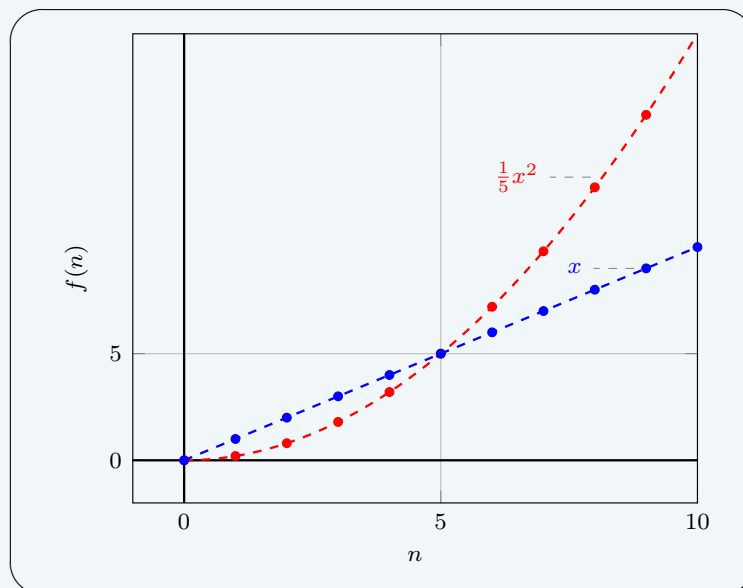
dobbiamo verificare che per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq cn < \frac{1}{5}n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per $n \geq 1$, dividendo per n , la condizione equivale a

$$0 < c < \frac{1}{5}n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Questo vale ogni volta che $n > 5c$, quindi possiamo scegliere qualunque $n_1 > 5c$, per esempio $n_1 = \lfloor 5c \rfloor + 1$. Per esempio, $c = 1$ dà $n_1 = 6$ e $c = 10$ dà $n_1 = 51$.



- La dimostrazione precedente dimostra anche che

$$\frac{1}{5} n^2 = \Omega(n).$$

- Per dimostrare che

$$\frac{1}{5} n^2 \neq \Theta(n)$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq \frac{1}{5} n^2 \leq c_2 n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n , questo equivale a

$$0 \leq \frac{n}{5} \leq c_2, \quad \forall n \geq n_1,$$

che non può valere per n arbitrariamente grande, poiché c_2 è una costante.

9.3 Limiti e notazioni asintotiche

Quando il rapporto $\frac{f(n)}{g(n)}$ ha un limite, il suo valore ci dice subito quali notazioni valgono. In questa sezione le funzioni f e g sono **asintoticamente positive**, così che il rapporto è definito per ogni n sufficientemente grande. I limiti si calcolano con le regole di Analisi Matematica 1.

9.3.1 Limiti e notazioni o e ω

Osservazione 9.11: limite uguale a zero

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente positive, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0^+ \iff f(n) = o(g(n)). \quad (9.9)$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) > 0$ e $g(n) > 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$.

- Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0^+$, allora per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, che possiamo prendere con $n(\varepsilon) \geq \tilde{n}$, tale che

$$0 \leq \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\varepsilon) \implies 0 \leq f(n) < \varepsilon g(n), \quad \forall n \geq n(\varepsilon),$$

dove abbiamo moltiplicato per $g(n) > 0$. Scegliendo $c = \varepsilon$ e $n_1 = n(\varepsilon)$, questa è la definizione (9.7), quindi $f(n) = o(g(n))$.

- Se $f(n) = o(g(n))$, allora per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$, che possiamo prendere con $n_1 \geq \tilde{n}$, tale che

$$0 \leq f(n) < c g(n), \quad \forall n \geq n_1 \implies 0 \leq \frac{f(n)}{g(n)} < c, \quad \forall n \geq n_1,$$

dove abbiamo diviso per $g(n) > 0$. Poiché c è arbitrario, questa è la definizione di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0^+.$$

□

- Se le funzioni f e g sono asintoticamente positive, « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0^+$ » è una condizione necessaria e sufficiente per « $f(n) = o(g(n))$ ».

Osservazione 9.12: o implica $\mathcal{O}$

Date due funzioni f e g di variabile naturale, si ha

$$f(n) = o(g(n)) \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)). \quad (9.10)$$

Dimostrazione. La definizione (9.7) vale per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$; in particolare vale per $c = 1$: esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq f(n) < g(n) \leq 1 \cdot g(n)$ per ogni $n \geq n_1$. Questa è la definizione (9.2) con $c = 1$. $\square$

- Ne segue che « $f(n) = o(g(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ », e « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ » è una condizione necessaria per « $f(n) = o(g(n))$ ». Per contrapposizione di (9.10) si ha anche

$$f(n) \neq \mathcal{O}(g(n)) \implies f(n) \neq o(g(n)).$$

L'implicazione non vale nell'altro verso (si veda il controesempio seguente), cioè

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = o(g(n)).$$

Esempio 9.12: una limitazione superiore che non è un o

- Per dimostrare che

$$3n^3 = \mathcal{O}(n^3)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq 3n^3 \leq cn^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 , questo equivale a

$$0 \leq 3 \leq c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Quindi, scegliendo per esempio $c = \frac{7}{2}$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq 3n^3 \leq \frac{7}{2}n^3, \quad \forall n \geq 1.$$

- Per dimostrare che

$$3n^3 \neq o(n^3)$$

calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3}{n^3} = 3 \neq 0^+$$

e applichiamo (9.9).

Osservazione 9.13: limite uguale a $+\infty$

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente positive, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \iff f(n) = \omega(g(n)). \quad (9.11)$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) > 0$ e $g(n) > 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$.

- Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n(\lambda) \in \mathbb{N}$, che possiamo prendere con $n(\lambda) \geq \tilde{n}$, tale che

$$\frac{f(n)}{g(n)} > \lambda, \quad \forall n \geq n(\lambda) \quad \implies \quad 0 \leq \lambda g(n) < f(n), \quad \forall n \geq n(\lambda).$$

Scegliendo $c = \lambda$ e $n_1 = n(\lambda)$, questa è la definizione (9.8), quindi $f(n) = \omega(g(n))$.

- Se $f(n) = \omega(g(n))$, allora per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$, che possiamo prendere con $n_1 \geq \tilde{n}$, tale che

$$0 \leq c g(n) < f(n), \quad \forall n \geq n_1 \quad \implies \quad \frac{f(n)}{g(n)} > c, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché c è arbitrario, questa è la definizione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$.

□

- Se le funzioni f e g sono asintoticamente positive, « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ » è una condizione necessaria e sufficiente per « $f(n) = \omega(g(n))$ ».

Osservazione 9.14: ω implica Ω

Date due funzioni f e g di variabile naturale, si ha

$$f(n) = \omega(g(n)) \implies f(n) = \Omega(g(n)). \quad (9.12)$$

Dimostrazione. La definizione (9.8) vale per ogni $c \in \mathbb{R}_{>0}$; in particolare vale per $c = 1$: esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq 1 \cdot g(n) < f(n)$ per ogni $n \geq n_1$. Questa è la definizione (9.3) con $c = 1$. □

- Ne segue che « $f(n) = \omega(g(n))$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \Omega(g(n))$ », e « $f(n) = \Omega(g(n))$ » è una condizione necessaria per « $f(n) = \omega(g(n))$ ». Per contrapposizione di (9.12) si ha anche

$$f(n) \neq \Omega(g(n)) \implies f(n) \neq \omega(g(n)).$$

L'implicazione non vale nell'altro verso (si veda il controesempio seguente), cioè

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \omega(g(n)).$$

Esempio 9.13: una limitazione inferiore che non è un ω

- Per dimostrare che

$$3n^3 = \Omega(n^3)$$

determiniamo $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq cn^3 \leq 3n^3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Con $n \geq 1$, dividendo per n^3 e poiché $c > 0$, questo equivale a

$$0 < c \leq 3, \quad \forall n \geq n_1.$$

Quindi, scegliendo per esempio $c = \frac{5}{2}$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{5}{2}n^3 \leq 3n^3, \quad \forall n \geq 1.$$

- Per dimostrare che

$$3n^3 \neq \omega(n^3)$$

calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3}{n^3} = 3 \neq +\infty$$

e applichiamo (9.11).

9.3.2 Limiti e notazioni Θ , $\mathcal{O}$ e Ω **Osservazione 9.15: limite finito positivo**

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente positive, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \implies f(n) = \Theta(g(n)). \quad (9.13)$$

Dimostrazione. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0}$, allora per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $g(n) > 0$ e

$$\ell - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \ell + \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Poiché $\ell > 0$, possiamo scegliere ε abbastanza piccolo da avere $\ell - \varepsilon > 0$, per esempio $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. Ponendo $c_1 = \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ e $c_2 = \ell + \varepsilon = \frac{3\ell}{2} > 0$, e moltiplicando per $g(n) > 0$, si ha

$$0 < c_1 g(n) < f(n) < c_2 g(n), \quad \forall n \geq n(\varepsilon),$$

e, di conseguenza, $f(n) = \Theta(g(n))$ con $n_1 = n(\varepsilon)$. □

- Ne segue che « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0}$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \Theta(g(n))$ », e « $f(n) = \Theta(g(n))$ » è una condizione necessaria per « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0}$ ».

$\mathbb{R}_{>0}$ ». Per contrapposizione di (9.13) si ha anche

$$f(n) \neq \Theta(g(n)) \implies \text{il limite di } \frac{f(n)}{g(n)} \text{ non è un numero } \ell \in \mathbb{R}_{>0}.$$

L'implicazione non vale nell'altro verso. Un controesempio è dato dall'Esempio 9.2:

$$n^2 (2 - \sin n) = \Theta(n^2), \quad \text{ma} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 (2 - \sin n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \sin n) \text{ non esiste.}$$

Di conseguenza, si ha

$$f(n) = \Theta(g(n)) \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0}.$$

È possibile che $f(n) = \Theta(g(n))$ anche se $\frac{f(n)}{g(n)}$ non converge a un limite. In questo caso il criterio del limite non si può applicare, e si usa la definizione.

Esempio 9.14: limitazione asintotica stretta senza limite

Per dimostrare che

$$(2 + (-1)^n) n^2 = \Theta(n^2)$$

determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

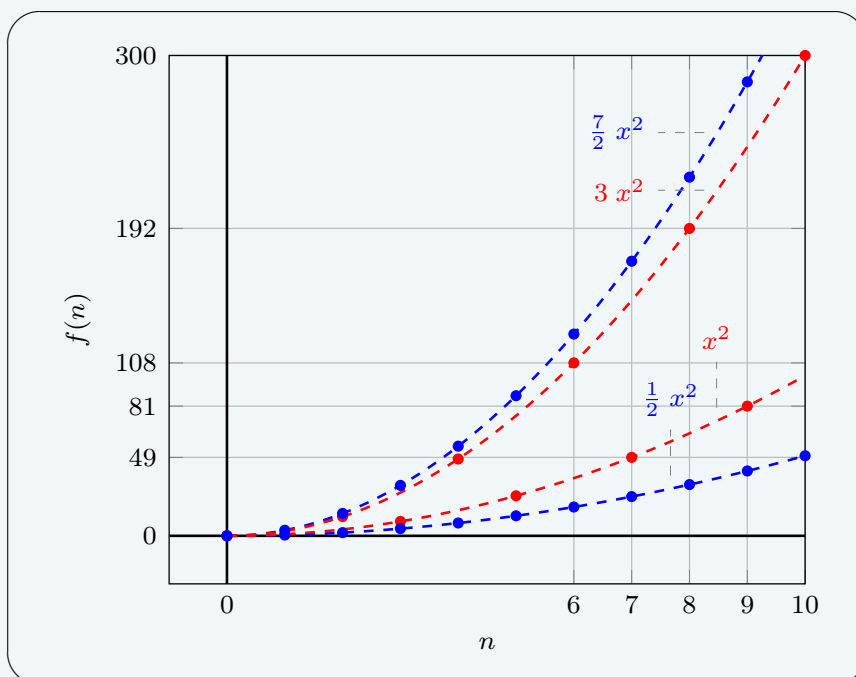
$$0 \leq c_1 n^2 \leq (2 + (-1)^n) n^2 \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Poiché

$$2 + (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 3 & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases} \quad \text{abbiamo} \quad (2 + (-1)^n) n^2 = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 3 n^2 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Quindi, scegliendo per esempio $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{7}{2}$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{1}{2} n^2 \leq (2 + (-1)^n) n^2 \leq \frac{7}{2} n^2, \quad \forall n \geq 1.$$



D'altra parte,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2 + (-1)^n) n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + (-1)^n) \text{ non esiste,}$$

poiché il rapporto vale 1 per ogni n dispari e 3 per ogni n pari.

Osservazione 9.16: criterio del limite per $\mathcal{O}$

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente positive, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } 0^+ \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)). \quad (9.14)$$

Dimostrazione. Per le Osservazioni 9.15, 9.5, 9.11 e 9.12, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \implies f(n) = \Theta(g(n)) \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0^+ \iff f(n) = o(g(n)) \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n)).$$

In entrambi i casi $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$. □

- Ne segue che « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure 0^+ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ». Per contrapposizione di (9.14) si ha anche

$$f(n) \neq \mathcal{O}(g(n)) \implies \text{il limite di } \frac{f(n)}{g(n)} \text{ non è né un numero } \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ né } 0^+.$$

L'implicazione non vale nell'altro verso. Un controesempio è dato dall'Esempio 9.4:

$$n^2 \sin^2 n = \mathcal{O}(n^2), \quad \text{ma} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \sin^2 n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2 n \text{ non esiste.}$$

Di conseguenza, si ha

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } 0^+.$$

È possibile che $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ anche se $\frac{f(n)}{g(n)}$ non converge a un limite.

Osservazione 9.17: criterio del limite per Ω

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente positive, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } +\infty \implies f(n) = \Omega(g(n)). \quad (9.15)$$

Dimostrazione. Per le Osservazioni 9.15, 9.5, 9.13 e 9.14, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} &\implies f(n) = \Theta(g(n)) \implies f(n) = \Omega(g(n)), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty &\iff f(n) = \omega(g(n)) \implies f(n) = \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

In entrambi i casi $f(n) = \Omega(g(n))$. □

- Ne segue che « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure $+\infty$ » è una condizione sufficiente per « $f(n) = \Omega(g(n))$ ». Per contrapposizione di (9.15) si ha anche

$$f(n) \neq \Omega(g(n)) \implies \text{il limite di } \frac{f(n)}{g(n)} \text{ non è né un numero } \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ né } +\infty.$$

L'implicazione non vale nell'altro verso. Un controesempio è dato dall'Esempio 9.14: poiché $(2 + (-1)^n) n^2 = \Theta(n^2)$, per l'Osservazione 9.5 si ha

$$(2 + (-1)^n) n^2 = \Omega(n^2), \quad \text{ma} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2 + (-1)^n) n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + (-1)^n) \text{ non esiste.}$$

Di conseguenza, si ha

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } +\infty.$$

È possibile che $f(n) = \Omega(g(n))$ anche se $\frac{f(n)}{g(n)}$ non converge a un limite.

Esempio 9.15: limitazioni asintotiche dai limiti

- Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n - n^3 + 2n^4}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{6}{n^3}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} + 2 \right) = 2 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Allora, per (9.14), si ha $6n - n^3 + 2n^4 = \mathcal{O}(n^4)$ e, per (9.15), si ha $6n - n^3 + 2n^4 = \Omega(n^4)$. Infine, per (9.13), si ha anche $6n - n^3 + 2n^4 = \Theta(n^4)$.

- Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 3n^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\rightarrow 0} \right) = 0^+.$$

Allora, per (9.9), si ha $n + 3n^3 = o(n^4)$. Inoltre, per (9.10) o per (9.14), si ha $n + 3n^3 = \mathcal{O}(n^4)$.

- Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 3n^4}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} + 3n \right) = +\infty.$$

Allora, per (9.11), si ha $n + 3n^4 = \omega(n^3)$. Inoltre, per (9.12) o per (9.15), si ha $n + 3n^4 = \Omega(n^3)$.

9.3.3 Il criterio del limite

Quando il limite del rapporto esiste, le osservazioni precedenti si possono invertire: il valore del limite dice esattamente quali delle cinque notazioni valgono e quali no.

Proposizione 9.18: criterio del limite

Siano f e g due funzioni di variabile naturale asintoticamente positive tali che il limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

esista (uguale a 0^+ , a un numero $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, oppure a $+\infty$). Allora:

$$f(n) = o(g(n)) \iff L = 0^+, \quad (9.16)$$

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \iff L = 0^+ \text{ oppure } L \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (9.17)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff L \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (9.18)$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \iff L \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } L = +\infty, \quad (9.19)$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \iff L = +\infty. \quad (9.20)$$

Dimostrazione. Le implicazioni da destra a sinistra sono (9.9), (9.14), (9.13), (9.15) e (9.11), e (9.16) e (9.20) sono (9.9) e (9.11). Per le altre implicazioni osserviamo prima che $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \omega(g(n))$ non possono valere insieme. Infatti, se $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ per ogni $n \geq n'_1$, la definizione (9.8) con la stessa costante c dà n''_1 tale che $cg(n) < f(n)$ per ogni $n \geq n''_1$, e per $n \geq \max\{n'_1, n''_1\}$ avremmo $cg(n) < f(n) \leq cg(n)$, il che è impossibile. Allo stesso modo, $f(n) = \Omega(g(n))$ e $f(n) = o(g(n))$ non possono valere insieme, perché darebbero $cg(n) \leq f(n) < cg(n)$. Poiché il limite esiste, vale esattamente uno dei tre casi $L = 0^+$, $L \in \mathbb{R}_{>0}$ e $L = +\infty$.

- Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, allora $L \neq +\infty$, perché altrimenti $f(n) = \omega(g(n))$ per (9.11). Quindi $L = 0^+$ oppure $L \in \mathbb{R}_{>0}$.
- Se $f(n) = \Omega(g(n))$, allora $L \neq 0^+$, perché altrimenti $f(n) = o(g(n))$ per (9.9). Quindi $L \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure $L = +\infty$.
- Se $f(n) = \Theta(g(n))$, allora $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$ per l'Osservazione 9.5, e per i due punti precedenti $L \in \mathbb{R}_{>0}$.

□

Per due funzioni asintoticamente positive f e g il cui rapporto ha un limite L , il criterio del limite dice:

- se $L = 0^+$, allora $f(n) = o(g(n))$ e $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, e le altre tre notazioni non valgono;
- se $L \in \mathbb{R}_{>0}$, allora $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$, mentre $f(n) \neq o(g(n))$ e $f(n) \neq \omega(g(n))$;
- se $L = +\infty$, allora $f(n) = \omega(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$, e le altre tre notazioni non valgono.

Se il rapporto non ha limite, il criterio non si può applicare, e si usano le definizioni (Esempi 9.2 e 9.14).

Esempio 9.16: il criterio del limite

- Nel corso di *Analisi Matematica 1* (capitolo *Gerarchie degli infiniti e criterio del rapporto*) si dimostra che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0^+.$$

Per la Proposizione 9.18, si ha $\ln n = o(n)$ e $\ln n = \mathcal{O}(n)$, mentre $\ln n \neq \Theta(n)$, $\ln n \neq \Omega(n)$ e $\ln n \neq \omega(n)$.

- Nello stesso capitolo di quel corso si dimostra che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0^+$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + n^2}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{\rightarrow 0^+} \right) = 1 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Per la Proposizione 9.18, si ha $2^n + n^2 = \Theta(2^n)$, $2^n + n^2 = \mathcal{O}(2^n)$ e $2^n + n^2 = \Omega(2^n)$, mentre $2^n + n^2 \neq o(2^n)$ e $2^n + n^2 \neq \omega(2^n)$.

9.4 Proprietà relazionali delle notazioni asintotiche

Proposizione 9.19: proprietà relazionali

Date tre funzioni f , g e h di variabile naturale, valgono le seguenti proprietà.

1. Transitività:

$$\begin{aligned} f(n) = o(g(n)) \text{ e } g(n) = o(h(n)) &\implies f(n) = o(h(n)), \\ f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ e } g(n) = \mathcal{O}(h(n)) &\implies f(n) = \mathcal{O}(h(n)), \\ f(n) = \Theta(g(n)) \text{ e } g(n) = \Theta(h(n)) &\implies f(n) = \Theta(h(n)), \\ f(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } g(n) = \Omega(h(n)) &\implies f(n) = \Omega(h(n)), \\ f(n) = \omega(g(n)) \text{ e } g(n) = \omega(h(n)) &\implies f(n) = \omega(h(n)). \end{aligned}$$

2. Riflessività (per una funzione f asintoticamente non negativa):

$$f(n) = \Theta(f(n)), \quad f(n) = \mathcal{O}(f(n)), \quad f(n) = \Omega(f(n)).$$

3. Simmetria:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n)).$$

4. Simmetria trasposta:

$$\begin{aligned} f(n) = \mathcal{O}(g(n)) &\iff g(n) = \Omega(f(n)), \\ f(n) = o(g(n)) &\iff g(n) = \omega(f(n)). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Transitività. Sia $0 \leq f(n) \leq c' g(n)$ per $n \geq n'_1$ e $0 \leq g(n) \leq c'' h(n)$ per $n \geq n''_1$. Allora $0 \leq f(n) \leq c' c'' h(n)$ per ogni $n \geq \max\{n'_1, n''_1\}$, e $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$ con $c = c' c'' > 0$. Le dimostrazioni per Ω e Θ sono uguali, con i prodotti delle costanti. Per o , sia $c \in \mathbb{R}_{>0}$: la definizione di $f(n) = o(g(n))$ con la costante 1 e la definizione di $g(n) = o(h(n))$ con la costante c danno due soglie n'_1 e n''_1 tali che

$$0 \leq f(n) < g(n) < c h(n), \quad \forall n \geq \max\{n'_1, n''_1\}.$$

Poiché c è arbitraria, $f(n) = o(h(n))$. La dimostrazione per ω è la stessa, con $0 \leq c h(n) < g(n) < f(n)$.

Riflessività. Sia $\tilde{n}$ tale che $f(n) \geq 0$ per ogni $n \geq \tilde{n}$. Allora $0 \leq 1 \cdot f(n) \leq f(n) \leq 1 \cdot f(n)$ per ogni $n \geq \tilde{n}$: le definizioni di Θ , $\mathcal{O}$ e Ω valgono con tutte le costanti uguali a 1 e $n_1 = \tilde{n}$.

Simmetria. Se $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ per ogni $n \geq n_1$, dividendo la disuguaglianza di sinistra per c_1 e quella di destra per c_2 otteniamo

$$0 \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n), \quad \forall n \geq n_1,$$

cioè $g(n) = \Theta(f(n))$. Scambiando i ruoli di f e g otteniamo l'altro verso.

Simmetria trasposta. Si ha $0 \leq f(n) \leq c g(n)$ se e solo se $0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n)$: la prima disuguaglianza definisce $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ con la costante c , la seconda definisce $g(n) = \Omega(f(n))$ con la costante $\frac{1}{c}$, e la soglia è la stessa. Per o e ω , sia $f(n) = o(g(n))$ e sia $c \in \mathbb{R}_{>0}$. La definizione di $f(n) = o(g(n))$ con la costante $\frac{1}{c}$ dà n_1 tale che $0 \leq f(n) < \frac{1}{c} g(n)$, cioè $0 \leq c f(n) < g(n)$, per ogni $n \geq n_1$. Poiché c è arbitraria, $g(n) = \omega(f(n))$. L'altro verso si dimostra allo stesso modo. $\square$

Poiché queste proprietà relazionali valgono per le notazioni asintotiche, possiamo stabilire un'analogia fra il **confronto asintotico** di due funzioni e il confronto di due numeri reali a e b :

$$f(n) = o(g(n)) \quad \text{è come} \quad a < b,$$

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad \text{è come} \quad a \leq b,$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad \text{è come} \quad a = b,$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \text{è come} \quad a \geq b,$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \quad \text{è come} \quad a > b.$$

- Per due numeri reali qualsiasi a e b , vale esattamente uno dei tre casi seguenti:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b \quad (\text{proprietà di tricotomia}).$$

- La proprietà analoga **non vale** per il confronto asintotico di due funzioni: esistono due funzioni f e g tali che nessuna delle cinque notazioni vale, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 9.17: due funzioni che non si possono confrontare

Consideriamo la funzione asintoticamente positiva

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^{1+\sin n}$$

e la funzione $g(n) = n$. Per ogni $n \geq 1$ si ha $\frac{f(n)}{g(n)} = n^{\sin n}$. Poiché π è irrazionale, i valori $n \bmod 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$, sono densi in $[0, 2\pi]$. Quindi esistono interi n arbitrariamente grandi con $\sin n > \frac{1}{2}$, per i quali

$$n^{\sin n} \geq n^{1/2} = \sqrt{n},$$

e interi m arbitrariamente grandi con $\sin m < -\frac{1}{2}$, per i quali

$$m^{\sin m} \leq m^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

- Per dimostrare che

$$n^{1+\sin n} \neq \mathcal{O}(n),$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq n^{1+\sin n} \leq cn$, cioè $n^{\sin n} \leq c$, per ogni $n \geq n_1$. Questo è falso per gli interi n arbitrariamente grandi con $\sin n > \frac{1}{2}$ e $\sqrt{n} > c$.

- Per dimostrare che

$$n^{1+\sin n} \neq \Omega(n),$$

procediamo per assurdo e supponiamo che esistano $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $0 \leq cn \leq n^{1+\sin n}$, cioè $c \leq n^{\sin n}$, per ogni $n \geq n_1$. Questo è falso per gli interi n arbitrariamente grandi con $\sin m < -\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{m}} < c$.

- Per l'Osservazione 9.5, ne segue che

$$n^{1+\sin n} \neq \Theta(n).$$

- Per le contrapposizioni di (9.10) e (9.12), ne segue anche che

$$n^{1+\sin n} \neq o(n) \quad \text{e} \quad n^{1+\sin n} \neq \omega(n).$$

La stessa conclusione segue dal limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\sin n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\sin n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sin n \ln n},$$

che non esiste (lungo gli interi n con $\sin n > \frac{1}{2}$ il rapporto tende a $+\infty$, lungo gli interi m con $\sin m < -\frac{1}{2}$ tende a 0^+): il limite non è né 0^+ né $+\infty$, e applichiamo (9.9) e (9.11).

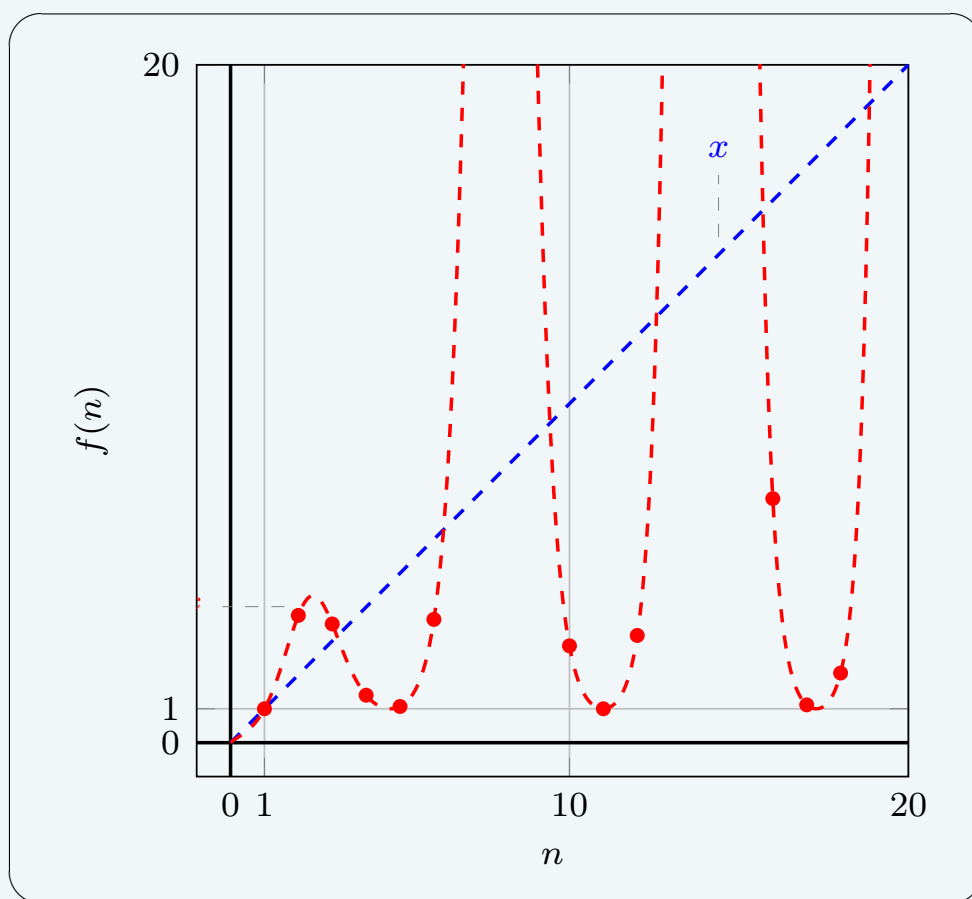
Quindi nessuna delle cinque notazioni vale fra $n^{1+\sin n}$ e n . Osserviamo che questo è un fallimento più forte del fallimento della tricotomia: non valgono nemmeno gli analoghi di $a \leq b$ o $a \geq b$.

Esempio 9.18: il grafico di $n^{1+\sin n}$

Questo è il grafico della funzione

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^{1+\sin n},$$

insieme al grafico della funzione $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, g : x \mapsto x$. I valori $f(n)$ stanno alternativamente sopra e sotto la retta g , sempre più lontani da essa.



9.5 Notazione asintotica nell'analisi degli algoritmi

Nei capitoli «Dimensione dell'input» e «Tempo di esecuzione» misuriamo la dimensione $|I|$ dell'input di un algoritmo e contiamo il numero di passi $S(n)$ che l'algoritmo esegue nel caso peggiore, in funzione di un parametro naturale n . L'espressione esatta di $S(n)$ dipende dalle convenzioni usate per contare i passi, e il tempo di un passo dipende dal calcolatore. La notazione asintotica conserva solo ciò che non dipende da questi dettagli: l'**ordine di crescita**.

- **I fattori costanti non contano.** Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, allora $\lambda f(n) = \Theta(g(n))$, con le costanti λc_1 e λc_2 e la stessa soglia. Per esempio, un algoritmo che esegue $4n$ passi e un algoritmo che esegue n passi hanno entrambi un numero di passi $\Theta(n)$.
- **I termini di ordine inferiore non contano.** Lo precisa l'osservazione seguente, che discende dall'Osservazione 9.7.

Osservazione 9.20: trascurare i termini di ordine inferiore

Date due funzioni f e g di variabile naturale asintoticamente non negative, si ha

$$g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \implies f(n) + g(n) = \Theta(f(n)).$$

Dimostrazione. Sia $0 \leq g(n) \leq c f(n)$ per ogni $n \geq n'_1$, e sia $f(n) \geq 0$ per ogni $n \geq n''_1$. Allora, per ogni $n \geq n_1 = \max\{n'_1, n''_1\}$,

$$0 \leq 1 \cdot f(n) \leq f(n) + g(n) \leq f(n) + c f(n) = (1 + c) f(n),$$

cioè $f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$ con le costanti $c_1 = 1$ e $c_2 = 1 + c$. □

Esempio 9.19: il numero di passi di due algoritmi

Nel capitolo «Tempo di esecuzione» contiamo i passi di due algoritmi su un array di n componenti.

- **FindMaximum** esegue $S(n) = 4n$ passi. Scegliendo $c_1 = c_2 = 4$ e $n_1 = 1$ si ha $0 \leq 4n \leq S(n) \leq 4n$ per ogni $n \geq 1$, quindi $S(n) = \Theta(n)$: il numero di passi è **lineare** in n .
- **InsertionSort** esegue, nel caso peggiore,

$$S(n) = \frac{3n^2 + 9n - 8}{2}$$

passi. Per dimostrare che $S(n) = \Theta(n^2)$ determiniamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{3n^2 + 9n - 8}{2} \leq c_2 n^2, \quad \forall n \geq n_1.$$

Per la limitazione inferiore, $9n - 8 \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, quindi $\frac{3n^2 + 9n - 8}{2} \geq \frac{3}{2}n^2$. Per la limitazione superiore, $9n - 8 \leq 9n \leq 9n^2$ per ogni $n \geq 1$, quindi $\frac{3n^2 + 9n - 8}{2} \leq \frac{12n^2}{2} = 6n^2$.

$6n^2$. Scegliendo $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = 6$ e $n_1 = 1$, si ha

$$0 \leq \frac{3}{2}n^2 \leq \frac{3n^2 + 9n - 8}{2} \leq 6n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Lo stesso risultato segue dal limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 9n - 8}{2n^2} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$ e da (9.13). Il numero di passi è **quadratico** in n .

- Poiché $n = o(n^2)$, per array grandi **InsertionSort** esegue, nel caso peggiore, molti più passi di **FindMaximum**: per l'Osservazione 9.11, il rapporto $\frac{4n}{(3n^2 + 9n - 8)/2}$ tende a 0^+ .

- Le tre notazioni $\mathcal{O}$, Ω e Θ dicono cose diverse sul numero di passi $S(n)$ nel caso peggiore. Se $S(n) = \mathcal{O}(g(n))$, allora, per ogni $n \geq n_1$, l'algoritmo esegue al più $cg(n)$ passi su **ogni** input con parametro n . Se $S(n) = \Omega(g(n))$, allora, per ogni $n \geq n_1$, esiste **almeno un** input con parametro n su cui l'algoritmo esegue almeno $cg(n)$ passi. L'affermazione $S(n) = \Theta(g(n))$ li fornisce entrambi, ed è la più informativa.
- Nel capitolo «Tempo di esecuzione» l'ordine di crescita di $S(n)$ viene poi espresso in funzione della dimensione dell'input $|I|$, usando l'ordine di crescita di $|I|$ ottenuto nel capitolo «Dimensione dell'input».

Riepilogo

- $f(n) = \Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$, $\Omega(g(n))$: esistono costanti positive (c_1 e c_2 , oppure c) e una soglia n_1 tali che, per ogni $n \geq n_1$, $f(n)$ sta fra $c_1g(n)$ e $c_2g(n)$, sotto $cg(n)$, sopra $cg(n)$. Per dimostrare queste affermazioni si determinano le costanti.
- $f(n) = o(g(n))$, $\omega(g(n))$: la disuguaglianza $f(n) < cg(n)$, oppure $cg(n) < f(n)$, vale per **ogni** $c > 0$ da una soglia n_1 che dipende da c .
- Θ equivale a $\mathcal{O}$ e Ω insieme; o implica $\mathcal{O}$ e ω implica Ω . Nessuna di queste implicazioni si può invertire.
- Criterio del limite: per funzioni asintoticamente positive il cui rapporto $\frac{f(n)}{g(n)}$ ha un limite, decide il limite: 0^+ dà o e $\mathcal{O}$, un numero $\ell > 0$ dà Θ , $\mathcal{O}$ e Ω , $+\infty$ dà ω e Ω , e in ogni caso le altre notazioni non valgono. Quando il limite non esiste, come per $2 - \sin n$ o $2 + (-1)^n$, si usano le definizioni.
- Le notazioni sono transitive; Θ , $\mathcal{O}$, Ω sono riflessive; Θ è simmetrica; $\mathcal{O}$ e Ω , e o e ω , sono a simmetria trasposta. A differenza dei numeri reali, due funzioni possono non essere affatto confrontabili, come $n^{1+\sin n}$ e n .
- Nell'analisi degli algoritmi, la notazione trascura i fattori costanti e i termini di ordine inferiore e conserva l'ordine di crescita del numero di passi.

Crescita asintotica

Introduzione

Il numero di passi eseguiti da un algoritmo è una funzione di un numero naturale: la dimensione del suo input. Due algoritmi che risolvono lo stesso problema si confrontano guardando quanto velocemente crescono queste funzioni al crescere dell'input, e non i loro valori su poche piccole istanze. In questo capitolo studiamo le funzioni di variabile naturale che compaiono nell'analisi degli algoritmi e ne confrontiamo gli **ordini di crescita** con le notazioni asintotiche o , $\mathcal{O}$, Θ , Ω e ω introdotte nel capitolo 9 «Notazione asintotica».

Il capitolo è organizzato così.

- Nella Sezione 10.1 introduciamo le cinque famiglie di funzioni crescenti di variabile naturale usate nel corso: le funzioni logaritmiche, potenza, esponenziali, fattoriale e autopotenza.
- Nella Sezione 10.2 richiamiamo i quattro limiti che mettono in ordine queste famiglie (la **gerarchia degli infiniti**).
- Nella Sezione 10.3 esprimiamo il confronto fra due ordini di crescita con la notazione asintotica, attraverso il criterio del limite del capitolo 9 «Notazione asintotica». Ricaviamo poi la gerarchia degli ordini di crescita, una classificazione degli ordini di crescita e le proprietà delle funzioni logaritmiche, potenza, polinomiali ed esponenziali che si usano nell'analisi degli algoritmi.

Prerequisiti. Le funzioni di variabile naturale sono le **successioni** del corso di *Analisi Matematica 1* (<https://fabiofurini.github.io/analisi-matematica-1/>, versione inglese <https://fabiofurini.github.io/mathematical-analysis-1/>). I loro limiti, e i teoremi usati per calcolarli, non vengono rispiegati in questo capitolo: li usiamo, e rimandiamo alla parte *Limiti di successioni* di quel corso, in particolare ai capitoli *Calcolo dei limiti delle successioni* (teorema del confronto), *Il numero di Nepero* e *Gerarchie degli infiniti e criterio del rapporto*.

10.1 Famiglie di funzioni crescenti di variabile naturale

Una funzione di variabile naturale è definita su un insieme di numeri naturali della forma $\mathbb{N}_{\geq n_0} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$, e nell'analisi degli algoritmi conta solo il suo comportamento per valori grandi di n . Nel capitolo 9 «Notazione asintotica» abbiamo chiamato **asintoticamente positiva** una funzione tale che $f(n) > 0$ per ogni n da un certo valore in poi: nel corso di *Analisi Matematica 1* si dice che proprietà come questa valgono *definitivamente*. La definizione seguente descrive un'altra proprietà dello stesso tipo.

Definizione 10.1: funzione asintoticamente crescente

Una funzione di variabile naturale $f : \mathbb{N}_{\geq n_0} \rightarrow \mathbb{R}$ è **asintoticamente crescente** se esiste $n_1 \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ tale che:

$$f(n) < f(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1} \quad (10.1)$$

- Le principali famiglie di funzioni di variabile naturale asintoticamente crescenti sono le seguenti.

1. Le funzioni **logaritmiche** di variabile naturale:

$$f : \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto \log_a n \quad \forall a \in \mathbb{R}_{>1} \quad (10.2)$$

2. Le funzioni **potenza** di variabile naturale:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \quad (10.3)$$

3. Le funzioni **esponenziali** di variabile naturale:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto b^n \quad \forall b \in \mathbb{R}_{>1} \quad (10.4)$$

4. La funzione **fattoriale** di variabile naturale:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n! \quad (10.5)$$

5. La funzione **autopotenza** di variabile naturale:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto n^n \quad (10.6)$$

dove, per convenzione, poniamo $0^0 = 1$.

- Tutte queste funzioni sono asintoticamente positive, e tutte divergono a $+\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Le funzioni fattoriale e autopotenza non sono crescenti su tutto il dominio, poiché $0! = 1! = 1$ e $0^0 = 1^1 = 1$, ma sono strettamente crescenti da $n = 1$ in poi: per questo parliamo di funzioni *asintoticamente* crescenti.
- In queste note $\ln n = \log_e n$ indica il logaritmo naturale, dove e è il numero di Nepero.

Esempio 10.1: funzioni crescenti di variabile naturale

La tabella riporta i valori di alcune funzioni crescenti di variabile naturale, calcolati aumentando n di un ordine di grandezza alla volta, da 1 a 100 milioni. I valori di $\ln n$ e i fattori iniziali di 2^n e $n!$ sono arrotondati a una cifra decimale; i valori di n^2 e n^n sono esatti.

n	$\ln n$	n^2	2^n	$n!$	n^n
$1 = 10^0$	0	1	2	1	1
$10 = 10^1$	≈ 2.3	10^2	$\approx 1.0 \cdot 10^3$	$\approx 3.6 \cdot 10^6$	10^{10}
$100 = 10^2$	≈ 4.6	10^4	$\approx 1.3 \cdot 10^{30}$	$\approx 9.3 \cdot 10^{157}$	10^{200}
$1,000 = 10^3$	≈ 6.9	10^6	$\approx 1.1 \cdot 10^{301}$	$\approx 4.0 \cdot 10^{2,567}$	$10^{3,000}$
$10,000 = 10^4$	≈ 9.2	10^8	$\approx 2.0 \cdot 10^{3,010}$	$\approx 2.8 \cdot 10^{35,659}$	$10^{40,000}$
$100,000 = 10^5$	≈ 11.5	10^{10}	$\approx 1.0 \cdot 10^{30,103}$	$\approx 2.8 \cdot 10^{456,573}$	$10^{500,000}$
10^6	≈ 13.8	10^{12}	$\approx 9.9 \cdot 10^{301,029}$	$\approx 8.3 \cdot 10^{5,565,708}$	$10^{6,000,000}$
10^7	≈ 16.1	10^{14}	$\approx 9.0 \cdot 10^{3,010,299}$	$\approx 1.2 \cdot 10^{65,657,059}$	$10^{70,000,000}$
10^8	≈ 18.4	10^{16}	$\approx 3.7 \cdot 10^{30,102,999}$	$\approx 1.6 \cdot 10^{756,570,556}$	$10^{800,000,000}$

Per apprezzare questi numeri, ricordiamo che il numero di atomi dell'universo osservabile è stimato in circa 10^{82} , e che un personal computer del 2024 esegue circa $10 \cdot 10^9 = 10^{10}$ operazioni al secondo (10 GFLOPS). Un algoritmo che esegue 2^n operazioni su un input con $n = 100$ impiega

$$\frac{2^{100}}{10^{10}} \text{ secondi} \approx 1.3 \cdot 10^{20} \text{ secondi} \approx 4.0 \cdot 10^{12} \text{ anni},$$

mentre un algoritmo che esegue n^2 operazioni ne impiega $10^4/10^{10} = 10^{-6}$ secondi.

- La Figura 10.1 mostra i primi valori delle stesse funzioni. Poiché i valori crescono molto velocemente, l'asse verticale è in scala logaritmica: ogni linea orizzontale della griglia corrisponde a una moltiplicazione per 100.

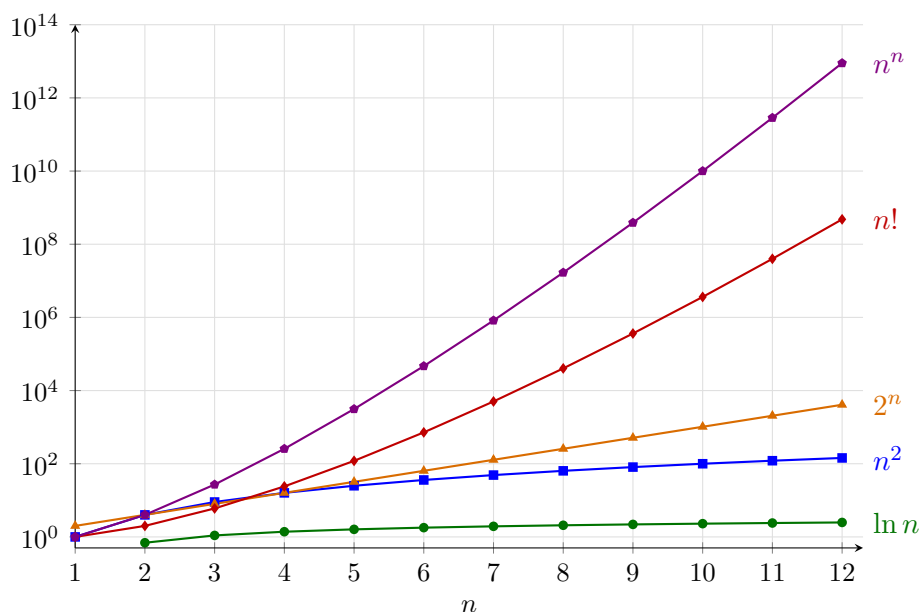


Figura 10.1: I valori di $\ln n$, n^2 , 2^n , $n!$ e n^n per $n \in \{1, 2, \dots, 12\}$ (asse verticale in scala logaritmica; i punti sono uniti da segmenti solo per leggibilità). Per piccoli valori di n l'ordine delle funzioni può essere diverso da quello finale: $2^3 = 8 < 9 = 3^2$, e $2^n > n!$ per $n \in \{1, 2, 3\}$.

10.2 La gerarchia degli infiniti

Le cinque famiglie della Sezione 10.1 divergono tutte a $+\infty$. Per decidere quale diverge più velocemente, calcoliamo il limite del rapporto di due di esse. I limiti di questa sezione sono la *gerarchia degli infiniti* per le successioni del corso di *Analisi Matematica 1* (capitolo *Gerarchie degli infiniti e criterio del rapporto*), dove sono dimostrati; qui li richiamiamo, insieme all'idea delle dimostrazioni, ed estendiamo il primo alle potenze dei logaritmi.

- Dati $a \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, la funzione di variabile naturale asintoticamente crescente

$$f : \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : n \mapsto \log_a^\beta n = (\log_a n)^\beta \quad (10.7)$$

è detta funzione **polilogaritmica** di variabile naturale.

Proposizione 10.2: logaritmi e potenze

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta n}{n^\alpha} = 0^+ \quad (10.8)$$

Dimostrazione. Per $\beta = 1$ questa è la gerarchia degli infiniti (parte I) del corso di *Analisi Matematica 1*:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0^+, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_{>1}.$$

Si dimostra con la disuguaglianza $\log_a x < x \log_a 2$, valida per ogni $x \in \mathbb{R}_{>0}$ (conseguenza della disuguaglianza di Bernoulli), applicata a $x = n^{\alpha/2}$, e con il teorema del confronto.

Per ogni $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, poiché $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\log_a n}{n^{\alpha/\beta}}}_{\rightarrow 0^+} \right)^\beta = 0^+$$

□

Proposizione 10.3: potenze ed esponenziali

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0^+ \quad (10.9)$$

- Questa è la gerarchia degli infiniti (parte II). Segue dalla Proposizione 10.2 sostituendo n con 2^n , il che dà $\frac{n}{(2^\mu)^n} \rightarrow 0^+$ per ogni $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, quindi $\frac{n}{b^n} \rightarrow 0^+$ per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ (si sceglie μ tale che $2^\mu = b$); il caso generale segue dall'identità

$$\frac{n^\alpha}{b^n} = \left(\frac{n}{(b^{1/\alpha})^n} \right)^\alpha, \quad b^{1/\alpha} \in \mathbb{R}_{>1}.$$

Proposizione 10.4: esponenziali e fattoriale

Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0^+ \quad (10.10)$$

- Questa è la gerarchia degli infiniti (parte III). Segue dal criterio del rapporto, poiché

$$\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \rightarrow 0^+ < 1.$$

Proposizione 10.5: fattoriale e autopotenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0^+ \quad (10.11)$$

- Questa è la gerarchia degli infiniti (parte IV). Segue dal criterio del rapporto, poiché

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Le funzioni polilogaritmiche (con base maggiore di uno) divergono più lentamente delle funzioni potenza (con esponente positivo), che divergono più lentamente delle funzioni esponenziali (con base maggiore di uno), che divergono più lentamente della funzione fattoriale, che diverge più lentamente della funzione autopotenza.

10.3 Confronto fra ordini di crescita

- L'**ordine di crescita** di una funzione di variabile naturale asintoticamente crescente descrive quanto rapidamente crescono i suoi valori rispetto ai valori di un'altra funzione di variabile naturale asintoticamente crescente.
- Confrontiamo gli ordini di crescita con le notazioni asintotiche o , $\mathcal{O}$, Θ , Ω e ω del capitolo 9 «Notazione asintotica». Per le funzioni di questo capitolo il rapporto $\frac{f(n)}{g(n)}$ ha sempre un limite, e le notazioni che valgono sono decise dal **criterio del limite** dimostrato là, che richiamiamo.

Proposizione 10.6: criterio del limite

Siano f e g due funzioni di variabile naturale asintoticamente positive tali che il limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

esista ($L = 0^+$, $L \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure $L = +\infty$). Allora:

$$\begin{aligned} f(n) = o(g(n)) &\iff L = 0^+, \\ f(n) = \mathcal{O}(g(n)) &\iff L = 0^+ \text{ oppure } L \in \mathbb{R}_{>0}, \\ f(n) = \Theta(g(n)) &\iff L \in \mathbb{R}_{>0}, \\ f(n) = \Omega(g(n)) &\iff L \in \mathbb{R}_{>0} \text{ oppure } L = +\infty, \\ f(n) = \omega(g(n)) &\iff L = +\infty. \end{aligned}$$

- La dimostrazione è nel capitolo 9 «Notazione asintotica» (Proposizione «criterio del limite»), dove le cinque notazioni sono definite attraverso costanti positive e una soglia. In questo capitolo calcoliamo il limite del rapporto e applichiamo la Proposizione 10.6.

Date due funzioni di variabile naturale asintoticamente crescenti f e g :

- se $f(n) = o(g(n))$, f ha un **ordine di crescita strettamente minore** di quello di g , $\rightsquigarrow$ la funzione f **cresce più lentamente** della funzione g ;
- se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, f ha un **ordine di crescita minore o uguale** a quello di g , $\rightsquigarrow$ la funzione f **cresce al più quanto** la funzione g ;
- se $f(n) = \Theta(g(n))$, f ha lo **stesso ordine di crescita** di g , $\rightsquigarrow$ la funzione f **cresce come** la funzione g ;

- se $f(n) = \Omega(g(n))$, f ha un **ordine di crescita maggiore o uguale** a quello di g , $\rightsquigarrow$ la funzione f **cresce almeno quanto** la funzione g ;
- se $f(n) = \omega(g(n))$, f ha un **ordine di crescita strettamente maggiore** di quello di g , $\rightsquigarrow$ la funzione f **cresce più velocemente** della funzione g .

- Le notazioni non dipendono dai valori di f e g su un numero finito di numeri naturali: cambiarli non cambia né il limite del rapporto né, con una soglia più grande, le disuguaglianze delle definizioni.
- Per le proprietà relazionali del capitolo 9 «Notazione asintotica» (simmetria e simmetria trasposta), scambiare le due funzioni scambia o con ω e $\mathcal{O}$ con Ω , mentre Θ non cambia:

$$f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n)), \quad f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n)).$$

Tutte e cinque le notazioni sono anche transitive: per esempio, $f(n) = o(g(n))$ e $g(n) = o(h(n))$ danno $f(n) = o(h(n))$.

Esempio 10.2: il limite del rapporto

Confrontiamo tre coppie di funzioni; i tre rapporti sono disegnati in Figura 10.2.

- Si ha $\ln n = o(\sqrt{n})$, poiché per la Proposizione 10.2 (con $a = e$, $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0^+$$

- Si ha $2n^2 + 3n = \Theta(n^2)$, poiché:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\rightarrow 0} \right) = 2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

- Si ha $n \ln n = \omega(n)$, poiché:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

Il primo rapporto non è monotono: cresce fino al suo valore massimo, circa 0.74, raggiunto per $n = 7$, e solo dopo decresce verso 0.

- La Proposizione 10.6 richiede che il limite del rapporto esista. Per esempio, per $f(n) = n$ se n è pari e $f(n) = 2n$ se n è dispari, il rapporto $\frac{f(n)}{n}$ assume alternativamente i valori 1 e 2 e non ha limite; ciò nonostante $f(n) = \Theta(n)$, per la definizione del capitolo 9 «Notazione asintotica» con $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $n_1 = 0$, poiché $0 \leq n \leq f(n) \leq 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tutti i confronti di questo capitolo sono fatti fra funzioni il cui rapporto ha limite.

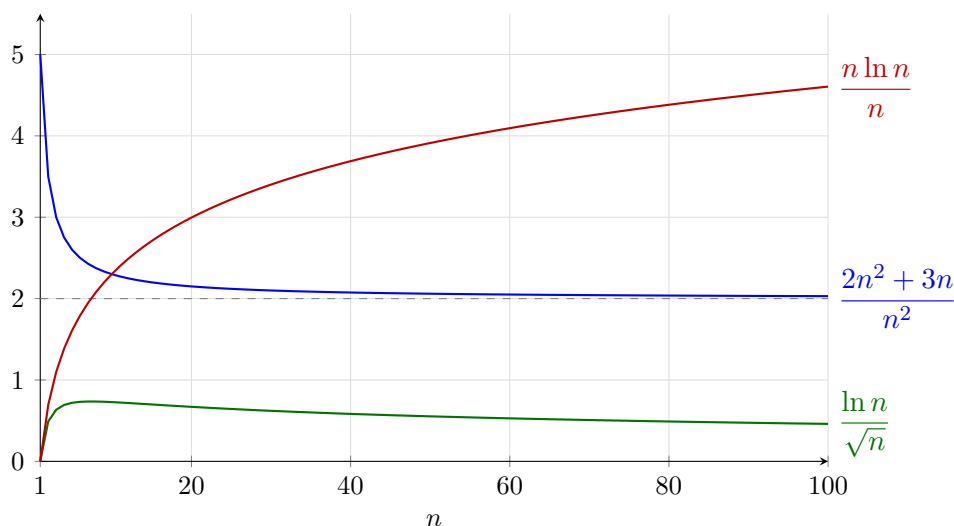


Figura 10.2: I tre rapporti dell'Esempio 10.2 per $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ (i punti sono uniti da segmenti). Il primo tende a 0, il secondo a 2 (retta tratteggiata), il terzo diverge a $+\infty$.

10.3.1 Gerarchia degli ordini di crescita

Per la Proposizione 10.6, i limiti della Sezione 10.2 si traducono direttamente in relazioni o fra le famiglie.

- Ogni funzione polilogaritmica di variabile naturale con base strettamente maggiore di uno è o di ogni funzione potenza di variabile naturale con esponente positivo.

Osservazione 10.7: polilogaritmi e potenze

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $\log_a^\beta n = o(n^\alpha)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 10.2, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta n}{n^\alpha} = 0^+$$

e la tesi segue dalla Proposizione 10.6. □

- Ogni funzione potenza di variabile naturale con esponente positivo è o di ogni funzione esponenziale di variabile naturale con base strettamente maggiore di uno.

Osservazione 10.8: potenze ed esponenziali

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $n^\alpha = o(b^n)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 10.3, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0^+$$

e la tesi segue dalla Proposizione 10.6. □

Esempio 10.3: confronto fra ordini di crescita

- Si ha $\ln^6 n + 2 + 2^{1/n} + 3^{-n} + 9n^2 = o(n^3)$, poiché:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^6 n + 2 + 2^{1/n} + 3^{-n} + 9n^2}{n^3} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\ln^6 n}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{2^{1/n}}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{3^{-n}}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{9}{n}}_{\rightarrow 0^+} \right) = 0^+ \end{aligned}$$

- Si ha $3n^2 + \sqrt{n} + \ln n + 5 + 4^{-n} + 10n^{1/3} = o(n^3)$, poiché:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + \sqrt{n} + \ln n + 5 + 4^{-n} + 10n^{1/3}}{n^3} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{3}{n}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{1}{n^{5/2}}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{\ln n}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{5}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{4^{-n}}{n^3}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{10}{n^{8/3}}}_{\rightarrow 0^+} \right) = 0^+ \end{aligned}$$

- Si ha $n^{1/4} + \ln^2 n + \frac{7}{\sqrt{n}} + e^{-n} + 20n^{1/2} = o(n^2)$, poiché:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/4} + \ln^2 n + \frac{7}{\sqrt{n}} + e^{-n} + 20n^{1/2}}{n^2} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^{7/4}}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{\ln^2 n}{n^2}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{7}{n^{5/2}}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{e^{-n}}{n^2}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{20}{n^{3/2}}}_{\rightarrow 0^+} \right) = 0^+ \end{aligned}$$

In ciascun caso i termini con un logaritmo tendono a 0^+ per la Proposizione 10.2, gli altri termini per limiti elementari, e la tesi segue dalla Proposizione 10.6.

- Ogni funzione esponenziale di variabile naturale con base strettamente maggiore di uno è o della funzione fattoriale di variabile naturale.

Osservazione 10.9: esponenziali e fattoriale

Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $b^n = o(n!)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 10.4, per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0^+$$

e la tesi segue dalla Proposizione 10.6. $\square$

- La funzione fattoriale di variabile naturale è o della funzione autopotenza di variabile naturale.

Osservazione 10.10: fattoriale e autopotenza

Si ha $n! = o(n^n)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 10.5, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0^+$$

e la tesi segue dalla Proposizione 10.6. $\square$

Esempio 10.4: confronto con la funzione autopotenza

Si ha $n! + 2^n + \sqrt{n} + \ln^3 n + n^{n-1} + \frac{1}{n} = o(n^n)$, poiché:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 2^n + \sqrt{n} + \ln^3 n + n^{n-1} + \frac{1}{n}}{n^n} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{2^n}{n^n}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^n}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{\ln^3 n}{n^n}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0^+} + \underbrace{\frac{1}{n^{n+1}}}_{\rightarrow 0^+} \right) = 0^+ \end{aligned}$$

Per esempio, $\frac{2^n}{n^n} = \frac{2^n}{n!} \frac{n!}{n^n}$ è il prodotto di due funzioni che tendono a 0^+ , per le Proposizioni 10.4 e 10.5.

Gerarchia degli ordini di crescita. Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$, $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $b \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha

$$\log_a^\beta n = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(b^n), \quad b^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

Per la transitività di o (capitolo 9 «Notazione asintotica»), ogni funzione della catena è o di tutte le funzioni che la seguono, per esempio $\log_a^\beta n = o(n!)$.

10.3.2 Classificazione degli ordini di crescita

Le famiglie della gerarchia si usano come metri di paragone per classificare l'ordine di crescita di qualunque altra funzione.

Definizione 10.11: ordini di crescita limitati

Una funzione di variabile naturale asintoticamente crescente f ha:

- un **ordine di crescita limitato polilogaritmicamente**, se esiste $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che $f(n) = \mathcal{O}(\ln^\beta n)$; e un **ordine di crescita limitato logaritmicamente**, se $f(n) = \mathcal{O}(\ln n)$;
- un **ordine di crescita limitato polinomialmente**, se esiste $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$;
- un **ordine di crescita limitato esponenzialmente**, se esiste $b \in \mathbb{R}_{>1}$ tale che $f(n) = \mathcal{O}(b^n)$;
- un **ordine di crescita limitato fattorialmente**, se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$.

Definizione 10.12: ordine di crescita lineare, sub-lineare e super-lineare

Una funzione di variabile naturale asintoticamente crescente f ha:

- un **ordine di crescita sub-lineare**, se $f(n) = o(n)$;
- un **ordine di crescita lineare**, se $f(n) = \Theta(n)$;
- un **ordine di crescita super-lineare**, se $f(n) = \omega(n)$.

- Per la gerarchia degli ordini di crescita, una funzione con ordine di crescita limitato polilogaritmicamente ha anche un ordine di crescita limitato polinomialmente, che a sua volta è anche limitato esponenzialmente e fattorialmente. Per esempio, $f(n) = \mathcal{O}(\ln^\beta n)$ e $\ln^\beta n = o(n)$ danno $f(n) = \mathcal{O}(n)$, perché o implica $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}$ è transitiva (capitolo 9 «Notazione asintotica»).

Esempio 10.5: classificazione degli ordini di crescita

Classifichiamo quattro funzioni, disegnate in Figura 10.3.

- $\sqrt{n} = o(n)$, poiché $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0^+$: un ordine di crescita sub-lineare. Ha un ordine di crescita limitato polinomialmente, poiché $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n^{1/2})$, ma non limitato polilogaritmicamente: poiché $\frac{\ln^\beta n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0^+$ (Proposizione 10.2), si ha $\frac{\sqrt{n}}{\ln^\beta n} \rightarrow +\infty$, cioè $\sqrt{n} = \omega(\ln^\beta n)$ e $\sqrt{n} \neq \mathcal{O}(\ln^\beta n)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ (Proposizione 10.6).
- $n = \Theta(n)$: un ordine di crescita lineare.
- $n \ln n = \omega(n)$, poiché $\frac{n \ln n}{n} = \ln n \rightarrow +\infty$: un ordine di crescita super-lineare. Ha

un ordine di crescita limitato polinomialmente, poiché $\frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0^+$, così che $n \ln n = o(n^2)$ e $n \ln n = \mathcal{O}(n^2)$.

- $n^2 = \omega(n)$, poiché $\frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$: un ordine di crescita super-lineare. Ha un ordine di crescita limitato polinomialmente, poiché $n^2 = \mathcal{O}(n^2)$.

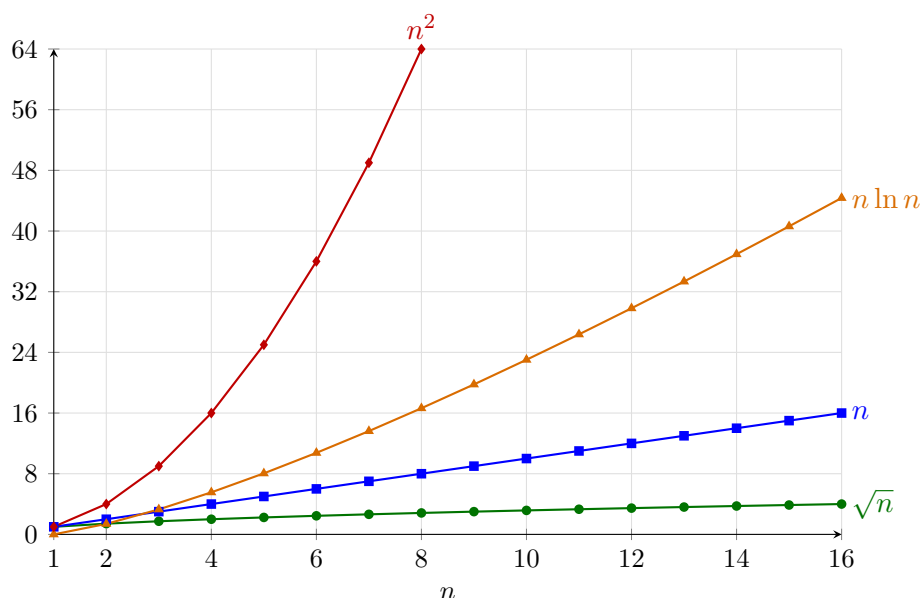


Figura 10.3: Una funzione sub-lineare ($\sqrt{n}$), la funzione lineare n e due funzioni super-lineari ($n \ln n$ e n^2) per $n \in \{1, 2, \dots, 16\}$ (n^2 solo fino a $n = 8$, dove raggiunge 64; i punti sono uniti da segmenti).

10.3.3 Proprietà delle funzioni logaritmiche

Nelle dimostrazioni di questa sottosezione e delle seguenti calcoliamo il limite del rapporto delle due funzioni e applichiamo la Proposizione 10.6.

- Due funzioni logaritmiche di variabile naturale con basi strettamente maggiori di uno sono ciascuna Θ dell'altra; anche moltiplicare l'argomento per una costante positiva non cambia l'ordine di crescita.

Osservazione 10.13: cambio di base

Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$, $c \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha $\log_a(\lambda n) = \Theta(\log_c n)$.

Dimostrazione. Per ogni $a, c \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, poiché $\log_a(\lambda n) = \log_a \lambda + \log_a n$ e

$\log_a n = \frac{\log_c n}{\log_c a}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(\lambda n)}{\log_c n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\log_a \lambda}{\log_c n}}_{\rightarrow 0} + \frac{\log_c n}{\log_c a} \right) = \frac{1}{\log_c a} \in \mathbb{R}_{>0}$$

□

- Per questo motivo, quando conta solo l'ordine di crescita, la base di un logaritmo si omette spesso. Per esempio, $\log_2 n = \Theta(\ln n)$, e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.44$.
- Sommare una costante positiva all'argomento di una funzione logaritmica di variabile naturale non ne cambia l'ordine di crescita.

Osservazione 10.14: traslazione dell'argomento

Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha $\log_a(n + \lambda) = \Theta(\log_a n)$.

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(n + \lambda)}{\log_a n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a \left(n \left(1 + \frac{\lambda}{n} \right) \right)}{\log_a n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n + \overbrace{\log_a \left(1 + \frac{\lambda}{n} \right)}^{\rightarrow 0}}{\log_a n} = 1$$

□

- La funzione **quasi-lineare** di variabile naturale $n \mapsto n \log_a n$ è o di ogni funzione potenza di variabile naturale con esponente strettamente maggiore di uno.

Osservazione 10.15: funzione quasi-lineare e potenze

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ e $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $n \log_a n = o(n^\alpha)$.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ e $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $\alpha - 1 \in \mathbb{R}_{>0}$ e, per la Proposizione 10.2:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log_a n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^{\alpha-1}} = 0^+$$

□

- La funzione quasi-lineare di variabile naturale $n \mapsto n \log_a n$ è ω della funzione lineare di variabile naturale: ha un ordine di crescita super-lineare.

Osservazione 10.16: funzione quasi-lineare e funzione lineare

Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha $n \log_a n = \omega(n)$.

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log_a n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = +\infty$$

□

10.3.4 Proprietà delle funzioni potenza

- Sommare una costante positiva all'argomento di una funzione potenza di variabile naturale non ne cambia l'ordine di crescita.

Osservazione 10.17: traslazione dell'argomento

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha $(n + \lambda)^\alpha = \Theta(n^\alpha)$.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \lambda)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\rightarrow 0} \right)^\alpha = 1$$

□

- Moltiplicare l'argomento di una funzione potenza di variabile naturale per una costante positiva non ne cambia l'ordine di crescita.

Osservazione 10.18: scalatura dell'argomento

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha $(\lambda n)^\alpha = \Theta(n^\alpha)$.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda n)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^\alpha n^\alpha}{n^\alpha} = \lambda^\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$$

□

- L'ordine di crescita di una funzione potenza di variabile naturale, confrontato con quello della funzione lineare di variabile naturale, dipende dal fatto che l'esponente sia maggiore o minore di uno.

Osservazione 10.19: potenze e funzione lineare

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

- $n^\alpha = \omega(n)$ (ordine di crescita super-lineare), se $\alpha > 1$;
- $n^\alpha = o(n)$ (ordine di crescita sub-lineare), se $\alpha < 1$.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0^+ & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

□

10.3.5 Proprietà delle funzioni polinomiali

- Ogni funzione polinomiale di variabile naturale di grado k con coefficiente direttivo positivo è $\Theta(n^k)$: ha lo stesso ordine di crescita del suo termine di grado massimo.

Osservazione 10.20: polinomi

Per ogni $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ e ogni $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ con $a_k \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha $\sum_{i=0}^k a_i n^i = \Theta(n^k)$.

Dimostrazione. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{n^k} = a_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\frac{a_i}{n^{k-i}}}_{\rightarrow 0} = a_k \in \mathbb{R}_{>0}$$

In particolare, il polinomio è asintoticamente positivo, quindi si applica la Proposizione 10.6. □

10.3.6 Proprietà delle funzioni esponenziali

- Ogni funzione esponenziale di variabile naturale con base strettamente maggiore di uno è ω delle funzioni esponenziali di variabile naturale con base minore, e o delle funzioni esponenziali di variabile naturale con base maggiore.

Osservazione 10.21: basi diverse

Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $c \in \mathbb{R}_{>1}$, si ha:

- $b^n = \omega(c^n)$, se $b > c$;
- $b^n = o(c^n)$, se $b < c$.

Dimostrazione. Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $c \in \mathbb{R}_{>1}$, poiché $b = c^{\log_c b}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c^{n \log_c b}}{c^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(c^{\log_c b - 1} \right)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > c \\ 0^+ & \text{se } b < c \end{cases}$$

poiché $c^{\log_c b - 1} = \frac{b}{c}$ è maggiore di uno se $b > c$ e appartiene a $(0, 1)$ se $b < c$ (limite della progressione geometrica). $\square$

- Moltiplicare l'esponente di una funzione esponenziale di variabile naturale per una costante positiva ne cambia l'ordine di crescita, a meno che la costante sia uguale a uno.

Osservazione 10.22: scalatura dell'esponente

Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

- $b^{\lambda n} = \omega(b^n)$, se $\lambda > 1$;
- $b^{\lambda n} = o(b^n)$, se $0 < \lambda < 1$.

Dimostrazione. Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{\lambda n}}{b^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^\lambda}{b} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(b^{\lambda - 1} \right)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \lambda > 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

$\square$

- Una dimostrazione alternativa si basa sul fatto che

$$b^{\lambda n} = (b^\lambda)^n \quad \text{e} \quad b^\lambda \begin{cases} > b & \text{se } \lambda > 1 \\ < b & \text{se } 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

Di conseguenza, per l'Osservazione 10.21 applicata alle basi b^λ e b , si ha $b^{\lambda n} = \omega(b^n)$ se $\lambda > 1$, e $b^{\lambda n} = o(b^n)$ se $0 < \lambda < 1$.

Esempio 10.6: scalatura dell'esponente

- Si ha $2^{n/2} = o(2^n)$, poiché

$$2^{n/2} = (2^{1/2})^n \quad \text{e} \quad 2^{1/2} = \sqrt{2} < 2.$$

- Si ha $2^{3n/2} = \omega(2^n)$, poiché

$$2^{3n/2} = (2^{3/2})^n \quad \text{e} \quad 2^{3/2} = 2\sqrt{2} > 2.$$

- Traslare l'esponente di una funzione esponenziale di variabile naturale di una costante non ne cambia l'ordine di crescita.

Osservazione 10.23: traslazione dell'esponente

Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $b^{n+\lambda} = \Theta(b^n)$.

Dimostrazione. Per ogni $b \in \mathbb{R}_{>1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{n+\lambda}}{b^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n b^\lambda}{b^n} = b^\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$$

□

- Per esempio, $2^{n+10} = 1024 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$, mentre $2^{2n} = 4^n = \omega(2^n)$: una costante sommata all'esponente è un fattore costante, un fattore costante nell'esponente cambia la base.

Punti chiave del capitolo

- Le funzioni di variabile naturale usate nell'analisi degli algoritmi sono le funzioni logaritmiche ($\log_a n$), potenza (n^α), esponenziali (b^n), fattoriale ($n!$) e autopotenza (n^n), insieme alle loro somme e ai loro prodotti.
- Gli ordini di crescita si confrontano con la notazione asintotica del capitolo 9 «Notazione asintotica». Quando il limite di $\frac{f(n)}{g(n)}$ esiste, decide il limite (criterio del limite): 0^+ dà $f(n) = o(g(n))$, un numero reale positivo dà $f(n) = \Theta(g(n))$, $+\infty$ dà $f(n) = \omega(g(n))$.
- Gerarchia (con $a, b > 1$ e $\alpha, \beta > 0$): $\log_a^\beta n = o(n^\alpha)$, $n^\alpha = o(b^n)$, $b^n = o(n!)$, $n! = o(n^n)$.

- La base di un logaritmo, una costante sommata all'argomento di un logaritmo o di una potenza, un fattore costante nell'argomento di una potenza e una costante sommata all'esponente di un esponenziale non cambiano l'ordine di crescita (le due funzioni sono ciascuna Θ dell'altra); un polinomio di grado k con coefficiente direttivo positivo è $\Theta(n^k)$.
- Un fattore costante nell'esponente di un esponenziale, e una base diversa di un esponenziale, cambiano invece l'ordine di crescita: per esempio $2^{n/2} = o(2^n)$ e $3^n = \omega(2^n)$.
- Una funzione ha un ordine di crescita sub-lineare, lineare o super-lineare se è $o(n)$, $\Theta(n)$ oppure $\omega(n)$; per esempio $\sqrt{n}$, $5n + 3$ e $n \ln n$ sono rispettivamente sub-lineare, lineare e super-lineare.