TSP: il caso generale e il caso metrico

Indice

Perché garanzie, e perché limiti?

Il TSP generale non è approssimabile

Un caso particolare: il TSP metrico

L'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides
- L'algoritmo del doppio albero
- L'algoritmo di Christofides

Proprietà strutturali

Garanzie di prestazione
- Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di DT
- Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di CH

Fonti

Errori tipici

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- dimostrare che per il TSP generale non esiste una garanzia costante, a meno che $P = NP$;
- spiegare perché è la disuguaglianza triangolare a rendere approssimabile il TSP;
- eseguire a mano l'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides su un'istanza metrica;
- dimostrare le garanzie 2 del doppio albero e $\frac{3}{2}$ dell'algoritmo di Christofides;
- costruire le famiglie di istanze che rendono tight queste garanzie.

Prerequisiti

- Da questo modulo, il capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione»: rapporto di prestazione, garanzia di prestazione relativa, garanzia tight e rapporto di prestazione nel caso peggiore.
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, il capitolo «Problemi di routing»: la definizione e l'istanza di riferimento del TSP.
- Dal modulo *Ottimizzazione su reti*, il capitolo «Alberi ricoprenti di costo minimo»: l'algoritmo di Kruskal
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, il capitolo «Ottimizzazione combinatoria: definizioni»: tempo polinomiale, le classi P e NP, NP-completezza.

Perché garanzie, e perché limiti?

Introduzione: Perché garanzie, e perché limiti?

- Un algoritmo euristico per il TSP restituisce un giro, ma quanto può essere lontano da quello più corto?
- In questo capitolo rispondiamo per *ogni* istanza, non solo per le istanze che proviamo
- La risposta ha due facce: le garanzie quando esistono, e i limiti quando non esistono

Garanzie e limiti per il TSP

- I **risultati positivi** di questo capitolo limitano la distanza fra il giro euristico e il giro ottimo su *ogni* istanza del TSP metrico.
- Per il **TSP generale** dimostriamo il contrario: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale può avere una buona garanzia.
- I **risultati negativi** ci dicono quando dobbiamo smettere di chiedere.

Riepilogo

Garanzie:

- Valgono su ogni istanza, e per il TSP esistono sulle istanze metriche

Limiti:

- Per il TSP generale nessun algoritmo polinomiale ha una buona garanzia, a meno che $P = NP$

Il TSP generale non è approssimabile

Introduzione: Il TSP generale non è approssimabile

- In questa sezione richiamiamo il TSP e il rapporto di prestazione di un algoritmo
- Poi dimostriamo che, a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale per il TSP generale ha una garanzia costante
- La dimostrazione mostra che cosa va storto: distanze enormi, che violano la disuguaglianza triangolare

Il problema di questo capitolo

- Il problema di questo capitolo è il problema del commesso viaggiatore (TSP)
- La sua definizione e le sue ipotesi sono nella sua pagina

Istanze e giri

- Come nella pagina del problema, un'istanza ha un insieme $\mathscr{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$ di città, $n \geq 3$, e distanze simmetriche

$$d_{ij} = d_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

- Un giro σ è una permutazione di $\mathscr{V}$, di lunghezza

$$L(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} d_{\sigma_k \sigma_{k+1}} + d_{\sigma_n \sigma_1}$$

- La lunghezza va minimizzata.

Richiamo: il rapporto di prestazione

- Come nel capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione», $z(I)$ è il valore ottimo dell'istanza I e $\mathscr{A}(I)$ il valore della soluzione restituita dall'algoritmo $\mathscr{A}$
- Il TSP è un problema di minimo, quindi per ogni istanza I

$$\mathscr{A}(I) \geq z(I) \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} \geq 1$$

- Il rapporto di prestazione nel caso peggiore è

$$r(\mathscr{A}) = \sup_I \frac{\mathscr{A}(I)}{z(I)}$$

Nessuna garanzia costante

- Per il TSP generale nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia costante, a meno che $P = NP$.
- La dimostrazione segue lo schema di tutti i risultati di questo tipo: un algoritmo di approssimazione con una garanzia troppo buona deciderebbe in tempo polinomiale un problema NP-completo.

Il TSP generale non è approssimabile

Proposizione 1

Sia $\alpha \geq 1$ una costante. Se $P \neq NP$, non esiste un algoritmo polinomiale $\mathscr{A}$ per il TSP tale che, per ogni istanza I del TSP,

$$\frac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} \leq \alpha.$$

Dimostrazione (1/3)

- Il **problema del ciclo hamiltoniano** chiede se un grafo $G = (V, E)$ ha un ciclo che passa per tutti i suoi vertici; è NP-completo.

- Supponiamo che $\mathscr{A}$ esista e, dato un grafo G con $n \geq 3$ vertici, costruiamo l'istanza I_G del TSP sulle città $\mathscr{V} = V$ con

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i, j\} \in E, \\ \lceil \alpha n \rceil + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione (2/3)

- Se G ha un ciclo hamiltoniano, quel ciclo è un giro di lunghezza n, quindi

$$z(I_G) = n \qquad \text{e} \qquad \mathscr{A}(I_G) \leq \alpha n$$

- Se G non ha un ciclo hamiltoniano, ogni giro usa almeno una coppia $\{i, j\} \notin E$, quindi

$$\mathscr{A}(I_G) \;\geq\; z(I_G) \;\geq\; (n-1) + \lceil \alpha n \rceil + 1 \;>\; \alpha n$$

Dimostrazione (3/3)

- Quindi

$$G \text{ è hamiltoniano} \iff \mathscr{A}(I_G) \leq \alpha n$$

- Costruire I_G ed eseguire $\mathscr{A}$ richiede tempo polinomiale, quindi il problema del ciclo hamiltoniano sarebbe in P, e $P = NP$.

□

Le istanze I_G non sono metriche

- L'istanza I_G viola la **disuguaglianza triangolare** $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ non appena G ha un cammino i, k, j con $\{i, j\} \notin E$:

$$d_{ij} = \lceil \alpha n \rceil + 1 > 2 = d_{ik} + d_{kj}$$

- La dimostrazione ha bisogno di distanze così grandi, e non dice nulla sulle istanze che soddisfano la disuguaglianza.

- Il risultato e la sua dimostrazione sono dovuti a Sahni e Gonzalez (1976), e la NP-completezza del problema del ciclo hamiltoniano a Karp (1972).

TSP generale e TSP metrico

- Il TSP generale non è approssimabile: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia di prestazione costante.
- Il TSP *metrico*, il caso particolare con la disuguaglianza triangolare, è approssimabile, e il resto del capitolo è dedicato a esso.

Riepilogo

Inapprossimabilità:

- Un algoritmo con una garanzia costante α deciderebbe il problema del ciclo hamiltoniano in tempo polinomiale
- Quindi per il TSP generale un tale algoritmo non esiste, a meno che $P = NP$

Che cosa serve alla dimostrazione:

- Distanze $\lceil \alpha n \rceil + 1$, che violano la disuguaglianza triangolare
- Sulle istanze metriche non dice nulla

Un caso particolare: il TSP metrico

Introduzione: Un caso particolare: il TSP metrico

- In questa sezione definiamo le istanze metriche del TSP: quelle con la disuguaglianza triangolare
- È la disuguaglianza triangolare a rendere approssimabile il TSP
- Richiamiamo anche l'istanza di riferimento, su cui eseguiamo gli algoritmi del capitolo

Il TSP metrico

Definizione 1: TSP metrico

Un'istanza del TSP, con città $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *e distanze simmetriche* $d_{ij} = d_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, *è* ***metrica*** *se le distanze soddisfano la disuguaglianza triangolare*

$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ *per ogni terna di città distinte* $i, j, k \in \mathcal{V}$.

La disuguaglianza triangolare

- Il **TSP metrico** è il TSP ristretto alle istanze metriche.
- Le istanze I_G della dimostrazione di inapprossimabilità non sono metriche.
- È proprio la disuguaglianza triangolare a rendere approssimabile il TSP, e ogni garanzia delle prossime sezioni la usa.

L'istanza di riferimento

L'istanza di riferimento ha 5 città, è metrica, e il suo unico giro ottimo è $(1, 3, 5, 2, 4)$, con $z(I) = 18$. Le sue distanze sono:

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	2	2	9
2	5	—	4	3	4
3	2	4	—	4	7
4	2	3	4	—	7
5	9	4	7	7	—

Riepilogo

Istanze metriche:

- Le distanze soddisfano $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ per ogni terna di città distinte i, j, k
- Le istanze I_G della dimostrazione di inapprossimabilità non sono metriche

Istanza di riferimento:

- 5 città, metrica, unico giro ottimo $(1, 3, 5, 2, 4)$ con $z(I) = 18$

L'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides

Introduzione: L'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides

- In questa sezione descriviamo due euristiche costruttive per il TSP metrico
- Entrambe partono da un albero ricoprente di costo minimo, costruiscono un cammino chiuso che passa per tutte le città e lo trasformano in un giro
- Le eseguiamo entrambe a mano sull'istanza di riferimento

Albero ricoprente di costo minimo

- I due algoritmi di questa sezione costruiscono un giro a partire da un **albero ricoprente di costo minimo** (MST) del grafo completo su $\mathscr{V}$, con pesi degli spigoli d_{ij}.
- Lo calcoliamo con l'algoritmo di Kruskal: gli spigoli si esaminano per distanza non decrescente (pareggi per coppia di indici) e uno spigolo si prende se non chiude un ciclo con gli spigoli già presi.
- Il peso di un albero T è

$$d(T) = \sum_{\{i,j\} \in T} d_{ij}$$

Le scorciatoie

- Entrambi gli algoritmi costruiscono prima un cammino chiuso che passa per ogni città, eventualmente più di una volta.
- Poi lo trasformano in un giro con le **scorciatoie** (shortcutting): si segue il cammino e si salta ogni città già visitata.
- In altre parole, una città si mantiene solo alla sua prima occorrenza.

Circuiti euleriani e regola di Fleury

- Un cammino chiuso che usa ogni spigolo di un (multi)grafo esattamente una volta è un **circuito euleriano**.

- Negli esempi lo costruiamo con la **regola di Fleury**:
  - si parte dalla città 1;
  - a ogni passo, si lascia la città corrente lungo uno spigolo non usato verso il vicino di indice minimo,
  - a meno che quello spigolo sia un *ponte* degli spigoli non usati (la sua rimozione li sconnette) e sia disponibile un altro spigolo.

L'algoritmo del doppio albero

- Il *Double Tree Algorithm* (algoritmo del doppio albero, indicato con DT) è un'euristica costruttiva per il TSP metrico.
- Calcola un albero ricoprente di costo minimo T, raddoppia ciascuno dei suoi spigoli, segue un circuito euleriano dell'albero raddoppiato, e lo trasforma in un giro con le scorciatoie.

Algorithm: Double Tree

Input : istanza del TSP metrico con n città e distanze $d[1..n][1..n]$

Output: un giro σ e la sua lunghezza $L(\sigma)$

```
1 function DoubleTree(n, d)
2 |   T := un albero ricoprente di costo minimo del grafo
  |    completo (Kruskal)
3 |   D := il multigrafo con due copie di ogni spigolo di T
4 |   W := un circuito euleriano di D dalla città 1 (Fleury)
5 |   σ := le città di W in ordine di prima occorrenza
  |    // scorciatoie
6 |   return σ, L(σ)
7 end
```

Come funziona l'algoritmo del doppio albero

- Nell'albero raddoppiato, la regola di Fleury non torna mai al padre finché resta da visitare un figlio, perché l'ultima copia dello spigolo verso il padre è un ponte.
- Il circuito euleriano è quindi una visita in profondità di T dalla città 1, con i figli in ordine crescente.
- Il giro σ è l'ordine in cui la visita incontra le città per la prima volta (il *preordine*).
- Con l'algoritmo di Kruskal e una visita in profondità, DT richiede tempo $O(n^2 \log n)$.

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (1/4)

L'algoritmo di Kruskal esamina:

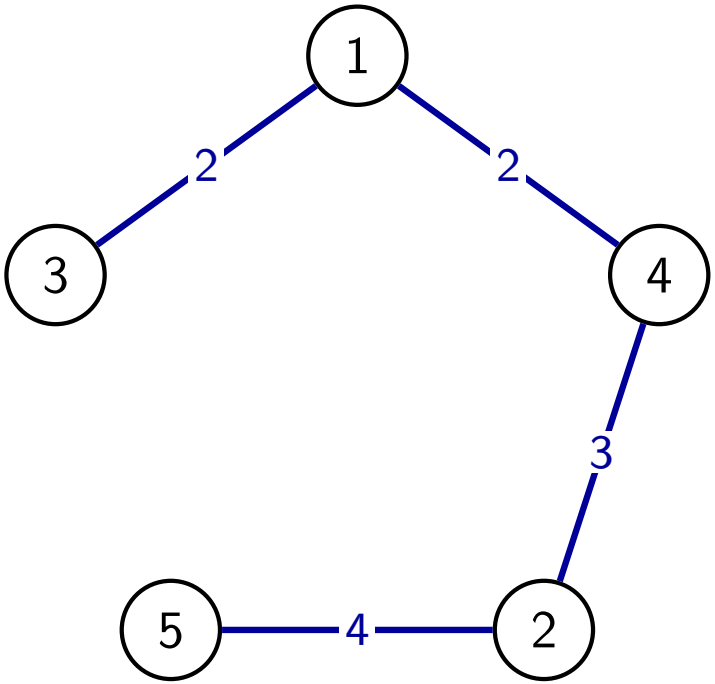
- $\{1,3\}$ (2, preso)
- $\{1,4\}$ (2, preso)
- $\{2,4\}$ (3, preso)
- $\{2,3\}$ (4, chiude il ciclo $2,3,1,4$: scartato)
- $\{2,5\}$ (4, preso)

L'albero è

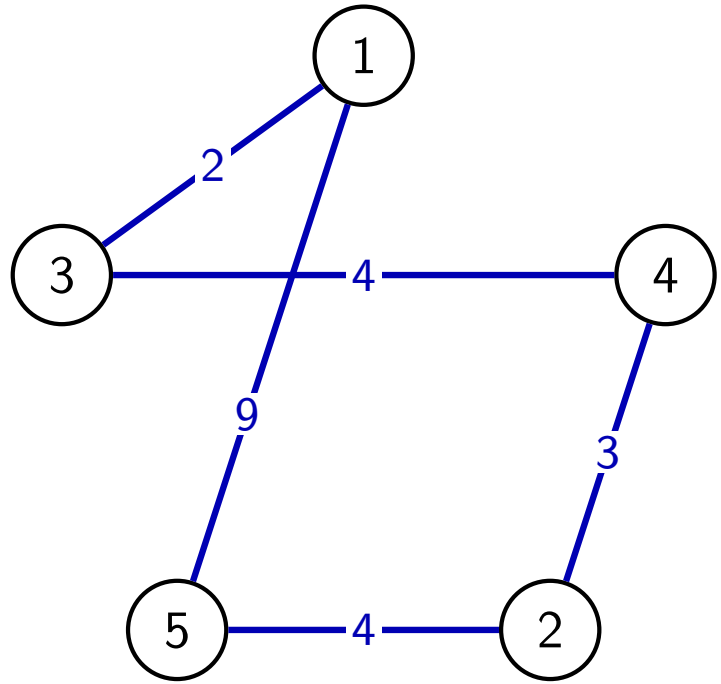
$$T = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{2,5\}\}, \qquad d(T) = 2+2+3+4 = 11,$$

ed è l'unico MST dell'istanza.

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (2/4)



MST T, $d(T) = 11$



giro di DT, $L(\sigma) = 22$

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (3/4)

- Il circuito euleriano dell'albero raddoppiato dalla città 1 è

$$W = (1, 3, 1, 4, 2, 5, 2, 4, 1),$$

di lunghezza

$$2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 22 = 2\,d(T)$$

- Mantenendo ogni città alla sua prima occorrenza otteniamo

$$\sigma = (1, 3, 4, 2, 5),$$

di lunghezza

$$L(\sigma) = d_{13} + d_{34} + d_{42} + d_{25} + d_{51} = 2 + 4 + 3 + 4 + 9 = 22$$

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (4/4)

- Le scorciatoie sostituiscono
  - $3 \to 1 \to 4$ $(2+2)$ con $3 \to 4$ (4),
  - $5 \to 2 \to 4 \to 1$ $(4+3+2)$ con $5 \to 1$ (9).

- Su questa istanza entrambe le disuguaglianze triangolari usate valgono all'uguaglianza, e le scorciatoie non fanno risparmiare nulla.

- Quindi

$$DT(I) = 22 \qquad \text{e} \qquad \frac{DT(I)}{z(I)} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$$

L'algoritmo di Christofides

- Il *Christofides Algorithm* (algoritmo di Christofides, indicato con *CH*) è un'euristica costruttiva per il TSP metrico.
- Calcola un albero ricoprente di costo minimo T e, invece di raddoppiarlo, aggiunge a T un abbinamento perfetto di peso minimo M sulle città di grado dispari in T.
- Poi segue un circuito euleriano di $T \cup M$ e lo trasforma in un giro con le scorciatoie.

Algorithm: Christofides

Input : istanza del TSP metrico con n città e distanze $d[1..n][1..n]$

Output : un giro σ e la sua lunghezza $L(\sigma)$

```
1 function Christofides(n, d)
2     T := un albero ricoprente di costo minimo del grafo completo (Kruskal)
3     O := { v ∈ V : v ha grado dispari in T }  // |O| è pari
4     M := un abbinamento perfetto di peso minimo delle città in O
5     D := T ∪ M      // multigrafo, tutti i gradi pari
6     W := un circuito euleriano di D dalla città 1 (Fleury)
7     σ := le città di W in ordine di prima occorrenza
          // scorciatoie
8     return σ, L(σ)
9 end
```

Perché l'algoritmo è ben definito

- **Perché $|O|$ è pari.** I gradi di un grafo sommano al doppio del numero di spigoli, un numero pari, quindi il numero di vertici di grado dispari è pari, e un abbinamento perfetto di O esiste (il grafo è completo).

- **Perché $T \cup M$ ha gradi pari.** Ogni città di O riceve da M esattamente uno spigolo in più, e le altre città nessuno. Se uno spigolo appartiene sia a T sia a M, D ne contiene due copie.

Calcolare l'abbinamento

- Un abbinamento perfetto di peso minimo si può calcolare in tempo polinomiale, $O(n^3)$, con l'algoritmo blossom di Edmonds.
- Negli esempi e negli esercizi $|O| \leq 4$ e gli abbinamenti si enumerano ($|O| = 4$ dà 3 abbinamenti perfetti).

Esempio: *CH* sull'istanza di riferimento (1/3)

- L'MST è quello dell'esempio di DT, con gradi

$$\deg(1) = 2, \quad \deg(2) = 2, \quad \deg(3) = 1,$$
$$\deg(4) = 2, \quad \deg(5) = 1$$

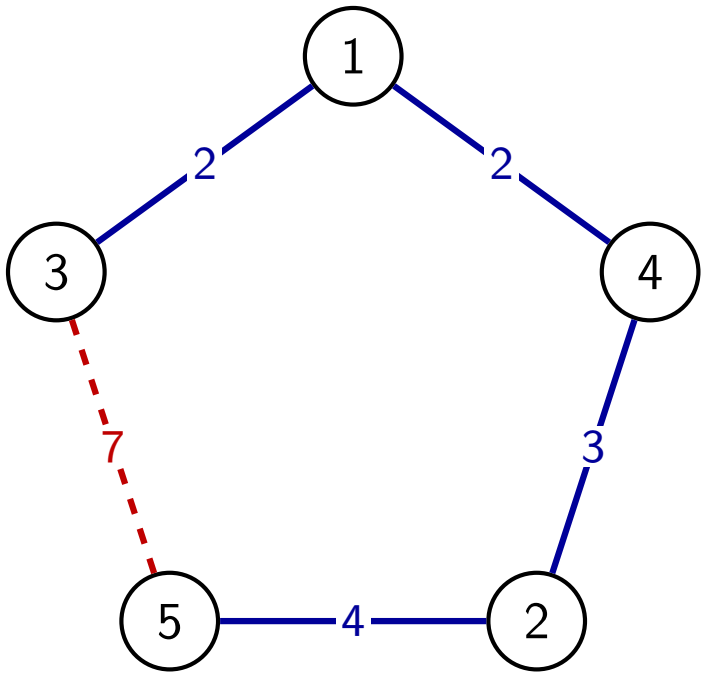
- Quindi

$$O = \{3, 5\},$$

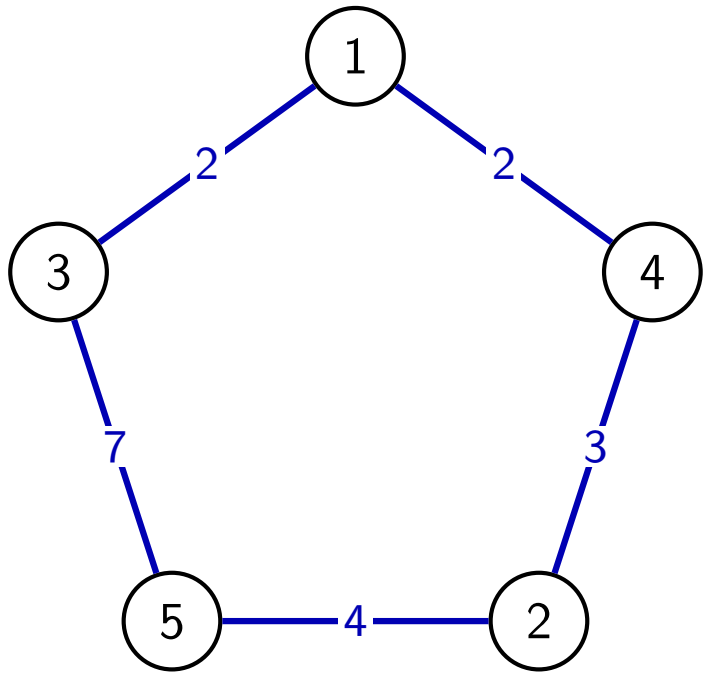
e l'unico abbinamento perfetto è

$$M = \{\{3, 5\}\}, \qquad d(M) = 7$$

Esempio: *CH* sull'istanza di riferimento (2/3)



T (continuo) e M (tratteggiato)



giro di CH, $L(\sigma) = 18$

Esempio: *CH* sull'istanza di riferimento (3/3)

- $T \cup M$ è un ciclo che passa per tutte le città.
- La regola di Fleury dalla città 1 (vicini 3 e 4) va in 3 e dà

$$W = (1, 3, 5, 2, 4, 1), \qquad d(T) + d(M) = 11 + 7 = 18,$$

in cui nessuna città si ripete: non serve alcuna scorciatoia e

$$\sigma = (1, 3, 5, 2, 4), \qquad CH(I) = 18 = z(I)$$

- Sull'istanza di riferimento *CH* trova il giro ottimo, mentre *DT* lo supera di 4 unità.

Riepilogo

Passi comuni:

- Un albero ricoprente di costo minimo T (Kruskal), un circuito euleriano (Fleury), le scorciatoie

Doppio albero DT:

- Raddoppia gli spigoli di T; sull'istanza di riferimento $DT(I) = 22$

Christofides CH:

- Aggiunge un abbinamento perfetto minimo M delle città di grado dispari; sull'istanza di riferimento $CH(I) = 18 = z(I)$

Proprietà strutturali

Introduzione: Proprietà strutturali

- Le garanzie della prossima sezione confrontano la lunghezza di un giro euristico con un lower bound su $z(I)$.

- Servono tre proprietà:
  - le scorciatoie non aumentano la lunghezza;
  - un MST è più corto di ogni giro;
  - lo stesso vale per (il doppio di) un abbinamento perfetto minimo di un insieme pari di città.

Le scorciatoie non aumentano la lunghezza

Osservazione 1

In un'istanza del TSP metrico, sia W un cammino chiuso che visita ogni città almeno una volta, e sia σ il giro ottenuto da W con le scorciatoie. Allora $L(\sigma) \leq$ lunghezza di W.

Dimostrazione

- Ogni spigolo $\{\sigma_k, \sigma_{k+1}\}$ del giro (e lo spigolo di chiusura $\{\sigma_n, \sigma_1\}$) sostituisce un tratto $\sigma_k = u_0, u_1, \ldots, u_q = \sigma_{k+1}$ di W le cui città interne vengono saltate.

- Applicando la disuguaglianza triangolare $q - 1$ volte,

$$d_{u_0 u_q} \leq d_{u_0 u_1} + d_{u_1 u_q} \leq \ldots \leq \sum_{p=0}^{q-1} d_{u_p u_{p+1}}$$

- I tratti sono parti disgiunte di W, quindi sommando su tutti gli spigoli di σ si ottiene

$$L(\sigma) \leq \text{lunghezza di } W$$

□

L'MST è un lower bound

Osservazione 2

Per ogni istanza del TSP (metrica o no) e ogni albero ricoprente di costo minimo T,

$$d(T) \leq z(I).$$

Dimostrazione

- Togliendo uno spigolo qualsiasi da un giro ottimo resta un cammino che passa per tutte le città, che è un albero ricoprente.
- Il suo peso è $z(I)$ meno la distanza tolta, al più $z(I)$ poiché le distanze sono positive.
- L'MST non pesa più di alcun albero ricoprente.

□

L'abbinamento è al più metà dell'ottimo

Osservazione 3

In un'istanza del TSP metrico, sia $O \subseteq \mathscr{V}$ con $|O|$ pari e $|O| \geq 2$, e sia M un abbinamento perfetto di peso minimo di O. Allora

$$d(M) \leq \frac{z(I)}{2}.$$

Dimostrazione (1/2)

- Sia $\tilde{\sigma}$ un giro ottimo e applichiamo le scorciatoie restringendolo alle città di O: otteniamo un ciclo

$$o_1, o_2, \ldots, o_{|O|}, o_1$$

sulle città di O che, per l'Osservazione 1, ha lunghezza al più $z(I)$.

- Poiché $|O|$ è pari, i suoi spigoli si dividono in due abbinamenti perfetti di O, prendendo alternativamente uno spigolo ciascuno:

$$M_1 = \{\{o_1, o_2\}, \{o_3, o_4\}, \ldots\}$$

$$M_2 = \{\{o_2, o_3\}, \{o_4, o_5\}, \ldots, \{o_{|O|}, o_1\}\}$$

Dimostrazione (2/2)

- Quindi
$$d(M_1) + d(M_2) \leq z(I),$$
e uno dei due pesa al più $\frac{z(I)}{2}$, quindi
$$d(M) \leq \min\{d(M_1), d(M_2)\} \leq \frac{z(I)}{2}$$
- Per $|O| = 2$ il ciclo è lo spigolo $\{o_1, o_2\}$ percorso due volte e $M_1 = M_2$.

□

Circuiti euleriani

- L'ultima proprietà che serve è classica: un multigrafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari ha un circuito euleriano (un risultato classico di Eulero), e la regola di Fleury ne trova uno.
- L'albero raddoppiato di DT e il multigrafo $T \cup M$ di CH sono connessi (contengono T) e hanno gradi pari.

Le proprietà sull'istanza di riferimento

- L'albero ricoprente di costo minimo:

$$d(T) = 11 \leq 18$$

- Con $O = \{3, 5\}$ il giro ottimo ristretto a O è $3, 5, 3$, di lunghezza $14 \leq 18$, quindi

$$d(M) = 7 \leq 9$$

Riepilogo

Scorciatoie:

- In un'istanza metrica non aumentano la lunghezza di un cammino chiuso

Lower bound su $z(I)$:

- $d(T) \leq z(I)$ per ogni albero ricoprente di costo minimo T
- $d(M) \leq \frac{z(I)}{2}$ per un abbinamento perfetto minimo M di un insieme pari di città

Circuiti euleriani:

- Esistono nei multigrafi connessi con gradi pari

Garanzie di prestazione

Introduzione: Garanzie di prestazione

- In questa sezione dimostriamo le garanzie 2 di DT e $\frac{3}{2}$ di CH, con le proprietà strutturali
- Poi costruiamo famiglie di istanze su cui i rapporti si avvicinano quanto vogliamo a 2 e a $\frac{3}{2}$
- Quindi entrambe le garanzie sono tight

La garanzia di *DT*

Proposizione 2

Per ogni istanza I del TSP metrico,

$$\frac{DT(I)}{z(I)} \leq 2.$$

Dimostrazione

- Il circuito euleriano W dell'albero raddoppiato usa ogni spigolo di T due volte, quindi la sua lunghezza è $2\,d(T)$.
- Visita ogni città perché T è ricoprente.
- Per l'Osservazione 1 e l'Osservazione 2,

$$DT(I) = L(\sigma) \;\leq\; 2\,d(T) \;\leq\; 2\,z(I).$$

□

La garanzia 2 è tight?

Il bound 2 vale su ogni istanza metrica.

Costruiamo ora una famiglia di istanze metriche su cui il rapporto di DT tende a 2.

La garanzia di DT è tight

Proposizione 3

Esistono istanze I_n del TSP metrico, con $n \geq 5$ dispari, tali che

$$\frac{DT(I_n)}{z(I_n)} = \frac{2n}{n+2} \rightarrow 2 \qquad \textit{per} \qquad n \rightarrow +\infty.$$

Dimostrazione (1/4)

- Siano $n = 2k + 1$ con $k \geq 2$, $a := n$ e $b := n + 1$.
- La città 1 è un centro e le città $2, \ldots, n$ sono foglie; le foglie sono unite dal cammino

$$P = (3, 5, \ldots, 2k + 1, 2, 4, \ldots, 2k),$$

in cui città consecutive non hanno mai indici consecutivi (le differenze valgono 2, e $2k - 1 \geq 3$ per lo spigolo $\{2k + 1, 2\}$).

Dimostrazione (2/4)

- Le distanze sono

$$d_{ij} = \begin{cases} a & \text{se } i = 1 \text{ o } j = 1, \\ b & \text{se } \{i, j\} \text{ è uno spigolo di } P, \\ 2a & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Tutte le distanze sono comprese fra a e $2a$, quindi

$$d_{ij} \leq 2a \leq d_{ik} + d_{kj} :$$

l'istanza è metrica.

Dimostrazione (3/4)

DT.

- Le sole distanze pari ad a sono quelle dal centro, e un albero ricoprente ha $n-1$ spigoli, ciascuno di peso almeno a: la stella di centro 1 è l'unico MST, con $d(T) = (n-1)a$.

- La visita in profondità dalla città 1 incontra le foglie in ordine crescente, $\sigma = (1, 2, 3, \ldots, n)$, e nessuna coppia di foglie consecutive è uno spigolo di P:

$$DT(I_n) = a + (n-2)\,2a + a = 2(n-1)a = 2n(n-1)$$

Dimostrazione (4/4)

Ottimo.

- Un giro ha esattamente due spigoli nella città 1 (di lunghezza a ciascuno) e $n-2$ spigoli fra foglie (di lunghezza almeno b ciascuno), quindi $z(I_n) \geq 2a + (n-2)b$.
- Il giro $(1, 3, 5, \ldots, 2k+1, 2, 4, \ldots, 2k)$ segue P e raggiunge questo valore, quindi

$$z(I_n) = 2a + (n-2)b = 2n + (n-2)(n+1) = (n+2)(n-1)$$

- Pertanto

$$\frac{DT(I_n)}{z(I_n)} = \frac{2n(n-1)}{(n+2)(n-1)} = \frac{2n}{n+2} = \frac{2}{1+\frac{2}{n}} \rightarrow 2$$

□

Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di DT

Dalla Proposizione 2 e dalla Proposizione 3 segue che DT è un algoritmo di 2-approssimazione per il TSP metrico, e che il suo rapporto di prestazione nel caso peggiore è

$$r(DT) = 2$$

Osservazioni su DT

- Per $n = 5$: $a = 5$, $b = 6$, $P = (3, 5, 2, 4)$, $DT(I_5) = 40$, $z(I_5) = 28$ e il rapporto è $\frac{10}{7}$.
- Per $n = 7$ e $n = 9$ i rapporti sono $\frac{14}{9}$ e $\frac{18}{11}$.
- Sull'istanza di riferimento $DT(I) = 22 = 2\,d(T)$: l'upper bound della dimostrazione è raggiunto, ma $z(I) = 18 > d(T) = 11$, e il rapporto è solo $\frac{11}{9}$.
- L'analisi di DT è dovuta a Rosenkrantz, Stearns e Lewis (1977).

La garanzia di *CH*

Proposizione 4

Per ogni istanza I del TSP metrico,

$$\frac{CH(I)}{z(I)} \leq \frac{3}{2}.$$

Dimostrazione

- Il circuito euleriano W di $T \cup M$ usa ogni spigolo una volta, quindi la sua lunghezza è $d(T) + d(M)$, e visita ogni città.

- Usiamo l'Osservazione 1, l'Osservazione 2 e l'Osservazione 3, con l'insieme O delle città di grado dispari ($|O| \geq 2$ perché un albero con almeno due vertici ha almeno due foglie):

$$CH(I) = L(\sigma) \leq d(T) + d(M) \leq z(I) + \frac{z(I)}{2} = \frac{3}{2} z(I).$$

□

La garanzia di *CH* è tight

Proposizione 5

Esistono istanze I_n del TSP metrico, con $n \geq 5$ dispari, tali che

$$\frac{CH(I_n)}{z(I_n)} \rightarrow \frac{3}{2} \qquad \text{per} \qquad n \rightarrow +\infty.$$

Dimostrazione (1/4)

- Siano $n \geq 5$ dispari, $a := n$ e $b := n + 1$, così che $a < b < 2a$.
- Consideriamo il grafo H sulle città $1, \ldots, n$ con gli spigoli $\{i, i + 1\}$ di lunghezza a e $\{i, i + 2\}$ di lunghezza b (una striscia di triangoli).
- Sia d_{ij} la lunghezza di un cammino minimo da i a j in H; le distanze di cammino minimo soddisfano sempre la disuguaglianza triangolare.

Dimostrazione (2/4)

- Un cammino da i a $j > i$ avanza di 1 (costo a) o di 2 (costo b) a ogni spigolo.
- Poiché $b < 2a$ conviene avanzare di 2 il più possibile:

$$d_{ij} = \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor b + \big(|i-j| \bmod 2\big)\, a$$

Dimostrazione (3/4)

CH.

- Le distanze pari ad a sono esattamente quelle fra città consecutive, quindi, come nella dimostrazione precedente, il cammino $T = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\}\}$ è l'unico MST, con $d(T) = (n-1)a$.
- Le sue città di grado dispari sono $O = \{1,n\}$, quindi $M = \{\{1,n\}\}$, con $d(M) = \frac{n-1}{2}b$.
- $T \cup M$ è il ciclo $1,2,\ldots,n,1$, la regola di Fleury lo segue dalla città 1 verso la città 2, e non serve alcuna scorciatoia:

$$CH(I_n) = (n-1)a + \frac{n-1}{2}\,b = (n-1)\,\frac{3n+1}{2}$$

Dimostrazione (4/4)

Un upper bound sull'ottimo.

- Il giro $(1, 3, 5, \ldots, n, n-1, n-3, \ldots, 2)$ usa $n-2$ spigoli di lunghezza b e i due spigoli $\{n, n-1\}$ e $\{2, 1\}$ di lunghezza a, quindi

$$z(I_n) \leq (n-2)b + 2a = (n-2)(n+1) + 2n = (n+2)(n-1)$$

- Insieme alla Proposizione 4,

$$\frac{3}{2} \geq \frac{CH(I_n)}{z(I_n)} \geq \frac{(n-1)(3n+1)}{2(n+2)(n-1)} = \frac{3n+1}{2n+4} = \frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

□

Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di *CH*

Dalla Proposizione 4 e dalla Proposizione 5 segue che *CH* è un algoritmo di $\frac{3}{2}$-approssimazione per il TSP metrico, e che il suo rapporto di prestazione nel caso peggiore è

$$r(CH) = \frac{3}{2}$$

Osservazioni su *CH*

- Per $n = 5, 7, 9$ l'enumerazione di tutti i giri mostra che l'upper bound su $z(I_n)$ è l'ottimo (28, 54, 88), e i rapporti sono

$$\frac{32}{28} = \frac{8}{7}, \qquad \frac{66}{54} = \frac{11}{9}, \qquad \frac{112}{88} = \frac{14}{11}$$

- L'algoritmo è stato trovato indipendentemente da Christofides (1976) e da Serdyukov (1978).

- Per più di quarant'anni non si è conosciuto per il TSP metrico alcun algoritmo polinomiale con una costante migliore; il primo miglioramento, di una costante piccolissima, è un algoritmo randomizzato di Karlin, Klein e Oveis Gharan (2021).

Riepilogo

Doppio albero:

- $DT(I) \leq 2\, d(T) \leq 2\, z(I)$, e le istanze a stella danno rapporti $\frac{2n}{n+2} \to 2$: $r(DT) = 2$

Christofides:

- $CH(I) \leq d(T) + d(M) \leq \frac{3}{2}\, z(I)$, e la striscia di triangoli dà rapporti $\frac{3n+1}{2n+4} \to \frac{3}{2}$: $r(CH) = \frac{3}{2}$

Fonti

Introduzione: Fonti

- I risultati di questo capitolo vengono da cinque articoli e rapporti di ricerca
- Sono i luoghi dove leggere le analisi originali di DT, di CH e del TSP generale

Fonti (1/2)

- D.J. Rosenkrantz, R.E. Stearns, P.M. Lewis II, An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem, *SIAM Journal on Computing* 6(3):563–581, 1977.
- N. Christofides, Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem, Report 388, Carnegie-Mellon University, 1976.
- A.I. Serdyukov, On some extremal walks in graphs, *Upravlyaemye Sistemy* 17:76–79, 1978.

Fonti (2/2)

- S. Sahni, T. Gonzalez, P-complete approximation problems, *Journal of the ACM* 23(3):555–565, 1976.
- R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, 85–103, 1972.

Riepilogo: Fonti

- Rosenkrantz, Stearns e Lewis (1977): l'analisi di *DT*
- Christofides (1976) e Serdyukov (1978): l'algoritmo *CH*
- Sahni e Gonzalez (1976): il TSP generale non è approssimabile
- Karp (1972): la NP-completezza del problema del ciclo hamiltoniano

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- Tre errori che capitano spesso quando si applicano gli algoritmi di questo capitolo
- Riguardano la disuguaglianza triangolare, il passo delle scorciatoie e l'abbinamento di *CH*
- Controllarli è un modo rapido per non perdere punti

Osservazione 4: errori tipici

- ***Applicare** DT **o** CH **a un'istanza non metrica.** Le garanzie 2 e $\frac{3}{2}$ usano la disuguaglianza triangolare, nel passo delle scorciatoie; senza di essa non esiste alcuna garanzia costante.*
- ***Saltare una città visitata per la prima volta.** Seguendo il circuito euleriano, una città si salta solo se è già stata visitata; la prima occorrenza si mantiene.*
- ***Abbinare le città sbagliate in** CH. L'abbinamento perfetto si calcola sulle città di grado dispari nell'albero ricoprente, il cui numero è pari, e ha peso minimo.*

Riepilogo: Errori tipici

- Le garanzie valgono solo sulle istanze metriche
- Le scorciatoie saltano solo le città già visitate
- L'abbinamento di CH è un abbinamento perfetto minimo delle città di grado dispari

Riepilogo (1/3)

- Il TSP generale non è approssimabile: un algoritmo con una garanzia costante deciderebbe il problema del ciclo hamiltoniano in tempo polinomiale.
- Il TSP metrico è il caso particolare approssimabile. Le garanzie di DT e CH si dimostrano con lower bound su $z(I)$: l'albero ricoprente di costo minimo e metà dell'abbinamento perfetto minimo; le scorciatoie, che usano la disuguaglianza triangolare, trasformano il circuito euleriano in un giro non più lungo.
- Entrambi i rapporti sono tight, con famiglie di istanze costruite in questo capitolo.

Riepilogo (2/3)

problema	algoritmo	rapporto nel caso peggiore
TSP generale	qualsiasi polinomiale	nessuna costante, a meno che $P = NP$
TSP metrico	DT	2 (tight)
TSP metrico	CH	$\frac{3}{2}$ (tight)

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento. I bound su $z(I)$ trovati finora:

Istanza	Lower bound	Valori euristici	Valore ottimo
TSP metrico, 5 città	11, albero ricoprente di costo minimo	*DT* 22, *CH* 18	18