Colorazione dei vertici: limiti dell'approssimazione

Sapienza Università di Roma

Indice

- Perché i limiti dell'approssimazione?
- Notazione
- Il VCP non è approssimabile
  - Nessun rapporto inferiore a quattro terzi
  - Risultati molto più forti
- Casi particolari
  - Grafi bipartiti
  - Grafi di grado massimo limitato
  - Grafi planari
  - Grafi di intervalli
- Esempi
- Fonti
- Errori tipici
- In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- dimostrare che nessun algoritmo polinomiale ha un rapporto di prestazione inferiore a $\frac{4}{3}$ per il VCP, a meno che $P = NP$;
- enunciare il risultato di Zuckerman e spiegare perché il VCP non ha una garanzia costante;
- colorare all'ottimo i grafi bipartiti e i grafi di intervalli, e limitare i colori della colorazione greedy con $\Delta(G) + 1$;
- dimostrare che i grafi planari si possono colorare con 5 colori in tempo polinomiale, e ricavarne una garanzia additiva.

Prerequisiti

- Da questo modulo, il capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione»: rapporto di prestazione, algoritmo di α-approssimazione, garanzia di prestazione additiva
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, il capitolo «Problemi di colorazione»: la definizione del VCP, il numero cromatico $\chi(G)$, il bound di clique $\omega(G) \leq \chi(G)$ e il grafo di Petersen
- Dal modulo *Ottimizzazione su reti*, il capitolo «Grafi»: la visita in ampiezza
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, il capitolo «Ottimizzazione combinatoria: definizioni»: tempo polinomiale, le classi P e NP, NP-completezza

Perché i limiti dell'approssimazione?

Introduzione: Perché i limiti dell'approssimazione?

- Un algoritmo di approssimazione ha una garanzia: il suo valore non è mai troppo lontano da quello ottimo
- Per alcuni problemi una garanzia di questo tipo non esiste, a meno che $P = NP$
- Il problema della colorazione dei vertici è uno di questi: in questo capitolo vediamo perché, e che cosa si può ancora fare

Il problema di questo capitolo

- Il problema di questo capitolo è il problema della colorazione dei vertici (VCP): la sua definizione e le sue ipotesi sono nella sua pagina
- Per il problema della colorazione dei vertici dimostriamo il contrario di una garanzia: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale può avere una buona garanzia
- I risultati negativi ci dicono quando dobbiamo smettere di chiedere

Riepilogo

Garanzie e limiti:

- I risultati positivi limitano lo scarto di un algoritmo su ogni istanza
- I risultati negativi dimostrano che, a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una buona garanzia

Il problema della colorazione dei vertici:

- È il problema di questo capitolo, e sta dalla parte dei risultati negativi

Notazione

Introduzione: Notazione

- Fissiamo la notazione sui grafi usata in tutto il capitolo: vicini, gradi, grado massimo
- Richiamiamo come si misura la qualità di un algoritmo di colorazione
- Osserviamo che esiste un rapporto banale, e ci chiediamo quanto meglio possa fare un algoritmo polinomiale

Grafi e gradi

- Come nella pagina del problema, $G = (V, E)$ è un grafo semplice con n vertici e m spigoli
- $N(v)$ è l'insieme dei vicini di v, e $\deg(v) = |N(v)|$ il suo grado
- Il **grado massimo** è

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$$

- Il valore ottimo del VCP è il numero cromatico, $z(I) = \chi(G)$

Richiamo: il rapporto di prestazione

- Come nel capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione», $\mathscr{A}(I)$ è il numero di colori della colorazione restituita dall'algoritmo $\mathscr{A}$
- Il VCP è un problema di minimo, quindi

$$\mathscr{A}(I) \geq \chi(G) \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathscr{A}(I)}{\chi(G)} \geq 1$$

per ogni istanza I

Il rapporto banale

- Dare a ogni vertice un colore diverso è sempre ammissibile, quindi

$$\chi(G) \leq n,$$

  e il rapporto n è banale

- Questo capitolo mostra che un algoritmo polinomiale non può fare molto meglio su tutti i grafi

- E poi le classi di grafi su cui invece può

Riepilogo

Notazione:

- $G = (V, E)$ con n vertici e m spigoli, grado $\deg(v)$, grado massimo $\Delta(G)$
- $z(I) = \chi(G)$, e $\mathscr{A}(I)$ è il numero di colori usati dall'algoritmo $\mathscr{A}$

Il rapporto di prestazione:

- $\frac{\mathscr{A}(I)}{\chi(G)} \geq 1$ per ogni istanza
- Il rapporto n è banale: un colore per vertice

Il VCP non è approssimabile

Introduzione: Il VCP non è approssimabile

- Dimostriamo che nessun algoritmo polinomiale può avere un rapporto di prestazione inferiore a $\frac{4}{3}$, a meno che $P = NP$
- Enunciamo poi risultati molto più forti: non è possibile nemmeno un rapporto della forma $n^{1-\varepsilon}$
- La conseguenza è che il VCP non ha una garanzia costante: per questo cercheremo classi particolari di grafi

Lo schema dei risultati negativi

- La dimostrazione segue lo schema di tutti i risultati negativi dell'approssimazione: un algoritmo con una garanzia troppo buona deciderebbe in tempo polinomiale un problema NP-completo

- Il problema NP-completo è la **3-colorabilità**: dato un grafo G, decidere se

$$\chi(G) \leq 3$$

- Resta NP-completo sui grafi planari di grado massimo 4 (Garey, Johnson e Stockmeyer, 1976)

Teorema 1

Sia $\mathscr{A}$ un algoritmo polinomiale per il VCP. Se $P \neq NP$, esiste un grafo G tale che

$$\frac{\mathscr{A}(I)}{\chi(G)} \geq \frac{4}{3}.$$

Dimostrazione (1/2)

Supponiamo che $\frac{\mathscr{A}(I)}{\chi(G)} < \frac{4}{3}$ per ogni grafo G, ed eseguiamo $\mathscr{A}$ su un grafo G.

1. Se $\chi(G) \leq 3$, allora

$$\mathscr{A}(I) < \frac{4}{3}\chi(G) \leq 4.$$

   Il numero di colori è un intero, quindi $\mathscr{A}(I) \leq 3$

2. Se $\chi(G) \geq 4$, allora

$$\mathscr{A}(I) \geq \chi(G) \geq 4,$$

   perché $\mathscr{A}$ restituisce una colorazione ammissibile

Dimostrazione (2/2)

- Quindi
$$\chi(G) \leq 3 \quad \text{se e solo se} \quad \mathscr{A}(I) \leq 3$$
- Eseguire $\mathscr{A}$ e contarne i colori richiede tempo polinomiale
- Quindi la 3-colorabilità sarebbe in P, e $P = NP$

□

Osservazioni sulla dimostrazione

- La dimostrazione usa solo l'interezza di $\chi(G)$: un rapporto inferiore a $\frac{4}{3}$ non può confondere 3 colori con 4
- Con 2 colori lo stesso argomento non dice nulla, perché decidere se $\chi(G) \leq 2$ è facile (lo vedremo con i grafi bipartiti)
- I grafi planari di grado massimo 4 sono un caso particolare del VCP: il teorema vale anche su di essi

Il teorema esclude solo i rapporti inferiori a $\frac{4}{3}$.

Si sa molto di più,
e lo enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 2: Zuckerman, 2007

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $P \neq NP$, nessun algoritmo polinomiale $\mathscr{A}$ per il VCP soddisfa, per ogni grafo G con n vertici,

$$\frac{\mathscr{A}(I)}{\chi(G)} \leq n^{1-\varepsilon}.$$

Che cosa dice il teorema

- Il rapporto n è banale, quindi il numero cromatico è sostanzialmente difficile da approssimare quanto più è possibile
- La dimostrazione usa le dimostrazioni verificabili in modo probabilistico (PCP) e gli estrattori
- In precedenza, Garey e Johnson (1976) avevano alzato il bound $\frac{4}{3}$ a 2
- Feige e Kilian (1998) avevano dimostrato il bound $n^{1-\varepsilon}$ sotto un'ipotesi più forte di $P \neq NP$

Corollario 1

Se $P \neq NP$, il VCP non ha alcun algoritmo di α-approssimazione, per nessuna costante $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione

- Sia $\mathscr{A}$ un algoritmo polinomiale di α-approssimazione, e prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$
- I grafi con $n > \alpha^2$ vertici soddisfano

$$\frac{\mathscr{A}(I)}{\chi(G)} \leq \alpha < n^{1/2}$$

- I grafi con $n \leq \alpha^2$ vertici si risolvono esattamente per enumerazione, in un tempo limitato da una costante che dipende solo da α, con rapporto $1 \leq n^{1/2}$
- L'algoritmo che si ottiene è polinomiale e ha rapporto al più $n^{1/2}$ su ogni grafo, contro il teorema di Zuckerman

□

Il VCP non è approssimabile

- Il VCP non è approssimabile: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia di prestazione costante
- E nemmeno una garanzia della forma $n^{1-\varepsilon}$
- I risultati positivi esistono solo su classi particolari di grafi

Riepilogo

Nessun rapporto inferiore a $\frac{4}{3}$:

- Altrimenti la 3-colorabilità si deciderebbe in tempo polinomiale
- La dimostrazione usa solo che il numero di colori è un intero

Risultati molto più forti:

- Zuckerman (2007): nemmeno il rapporto $n^{1-\varepsilon}$, a meno che $P = NP$
- Quindi nessun algoritmo di α-approssimazione, per nessuna costante $\alpha \geq 1$

Casi particolari

Introduzione: Casi particolari

- Sulle quattro classi di questa sezione il VCP si risolve esattamente, o con una garanzia, in tempo polinomiale
- Le classi si riconoscono dal grafo, o sono date con esso (gli intervalli di un grafo di intervalli)
- Vediamo, nell'ordine: grafi bipartiti, grafi di grado massimo limitato, grafi planari e grafi di intervalli
- Dove il problema generale si arrende, la struttura del grafo permette di colorare bene

Definizione 1: grafo bipartito

*Un grafo $G = (V, E)$ è **bipartito** se $\chi(G) \leq 2$, cioè se V si può dividere in due insiemi stabili.*

Proposizione 1

Decidere se $\chi(G) \leq 2$, e trovare una colorazione con 2 colori quando esiste, richiede tempo $O(n+m)$.

- L'idea della dimostrazione: una visita in ampiezza, e la parità dei livelli

Dimostrazione (1/2)

- Eseguiamo una visita in ampiezza da un vertice di ogni componente connessa
- Sia $\ell(v)$ il livello di v, la sua distanza dalla radice della sua componente
- Coloriamo v con il colore 1 se $\ell(v)$ è pari e con il colore 2 altrimenti

1. Se nessuno spigolo unisce due vertici di livelli con la stessa parità, la colorazione è ammissibile

Dimostrazione (2/2)

2. Altrimenti, sia $\{u, v\}$ uno spigolo di questo tipo
   - I cammini dell'albero di visita dalla radice a u e a v, con lo spigolo $\{u, v\}$, formano un cammino chiuso di lunghezza dispari
   $$\ell(u) + \ell(v) + 1$$
   - Un cammino chiuso di lunghezza dispari contiene un ciclo di lunghezza dispari, che richiede 3 colori: $\chi(G) \geq 3$

La visita e il controllo degli spigoli richiedono tempo $O(n + m)$.

□

I cicli dispari come certificati

- La dimostrazione mostra la caratterizzazione classica: un grafo è bipartito se e solo se non ha cicli di lunghezza dispari (Kőnig, 1936)
- Su un grafo con almeno uno spigolo, la visita dà $\chi(G) = 2$, oppure il certificato $\chi(G) \geq 3$ fornito da un ciclo dispari

La colorazione greedy

- La **colorazione greedy** GC esamina i vertici in un ordine dato
- Assegna a ogni vertice il colore minimo, fra $1, 2, 3, \ldots$, non usato dai suoi vicini già colorati
- Richiede tempo $O(n + m)$

Proposizione 2

Per ogni grafo G e ogni ordine dei vertici,

$$GC(I) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dimostrazione

- Quando il vertice v viene colorato, i suoi vicini già colorati usano al più

$$\deg(v) \leq \Delta(G)$$

colori

- Uno dei colori $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ è quindi libero

- Il colore libero minimo è al più $\Delta(G) + 1$

□

$\Delta(G) + 1$ è una garanzia di prestazione?

- Il bound confronta $GC(I)$ con $\Delta(G) + 1$, non con $\chi(G)$
- Su tutti i grafi non è una garanzia di prestazione, perché $\Delta(G)$ può valere $n - 1$ mentre $\chi(G) = 2$ (una stella)
- Sui grafi di grado massimo al più una costante *fissata* Δ, lo è
- Ogni grafo con uno spigolo ha $\chi(G) \geq 2$, quindi

$$\frac{GC(I)}{\chi(G)} \leq \frac{\Delta + 1}{2}.$$

Quando il bound è raggiunto

- Il bound $\Delta(G) + 1$ è raggiunto dai grafi completi e dai cicli di lunghezza dispari, qualunque sia l'ordine
- **Osservazione (Brooks, 1941).** Un grafo connesso che non è né completo né un ciclo di lunghezza dispari soddisfa

$$\chi(G) \leq \Delta(G),$$

e una colorazione di questo tipo si trova in tempo lineare

Grafi planari

- Un grafo è **planare** se si può disegnare nel piano senza spigoli che si incrociano
- Stabilire se un grafo è planare, e trovarne un disegno quando lo è, si fa in tempo lineare (Hopcroft e Tarjan, 1974)
- Mostriamo prima che un grafo planare ha sempre un vertice di grado piccolo, poi lo usiamo per colorare con 5 colori

Lemma 1

Ogni grafo planare con $n \geq 3$ vertici ha $m \leq 3n - 6$ spigoli, e un vertice di grado al più 5.

Dimostrazione (1/2)

- Aggiungere spigoli a un disegno senza creare incroci non diminuisce m
- Quindi possiamo supporre che non si possa aggiungere alcuno spigolo di questo tipo: il disegno è connesso e ogni faccia è un triangolo
- La formula di Eulero per un disegno planare connesso con f facce dà

$$n - m + f = 2$$

- Ogni faccia ha 3 spigoli e ogni spigolo delimita 2 facce, quindi

$$3f = 2m$$

Dimostrazione (2/2)

- Sostituendo $f = \frac{2m}{3}$ nella formula di Eulero:

$$2 = n - m + f \;=\; n - m + \frac{2m}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad m \leq 3n - 6$$

- I gradi sommano a

$$2m \leq 6n - 12 < 6n,$$

quindi qualche vertice ha grado al più 5

□

Teorema 3: Heawood, 1890

Ogni grafo planare si può colorare con 5 *colori, e una colorazione di questo tipo si trova in tempo polinomiale.*

- L'idea della dimostrazione: togliere un vertice di grado al più 5, colorare il resto, e liberare un colore per esso scambiando due colori

Dimostrazione (1/3)

- Per induzione su n; i grafi con $n \leq 5$ sono banali
- Sia v un vertice di grado al più 5 (per il lemma precedente)
- Coloriamo $G - v$, che è planare, con 5 colori

1. Se i vicini di v usano al più 4 colori, v prende il quinto
2. Altrimenti v ha 5 vicini $v_1, \ldots, v_5$, in quest'ordine intorno a v nel disegno, con colori $1, \ldots, 5$. Sia H_{13} il grafo indotto dai vertici di colore 1 e 3

Dimostrazione (2/3)

3. Se v_1 e v_3 stanno in componenti diverse di H_{13}, scambiamo i colori 1 e 3 nella componente di v_1: la colorazione resta ammissibile, e il colore 1 diventa libero per v

4. Altrimenti un cammino di colori 1 e 3 unisce v_1 a v_3
   - Con v, chiude un ciclo che separa v_2 da v_4 nel disegno
   - Un cammino da v_2 a v_4 deve attraversare quel ciclo, quindi v_2 e v_4 stanno in componenti diverse di H_{24}
   - Scambiando 2 e 4 nella componente di v_2 si libera il colore 2 per v

Dimostrazione (3/3)

- Ogni passo usa una visita in tempo

$$O(n+m) = O(n)$$

- I passi sono n: in totale tempo $O(n^2)$

□

Il teorema dei quattro colori

- **Osservazione (il teorema dei quattro colori).** Ogni grafo planare si può colorare con 4 colori (Appel e Haken, 1977)
- La dimostrazione usa un calcolatore
- Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1997) l'hanno semplificata e hanno dato un algoritmo che trova una colorazione di questo tipo in tempo $O(n^2)$

L'algoritmo *PL* per i grafi planari

L'algoritmo *PL* per i grafi planari combina i risultati precedenti:

- se G non ha spigoli, usa 1 colore;
- se G è bipartito, usa 2 colori (con la visita in ampiezza dei grafi bipartiti);
- altrimenti usa i 5 colori del teorema di Heawood.

Corollario 2

PL è un algoritmo polinomiale di approssimazione 2-additivo per il VCP sui grafi planari:

$$PL(I) - \chi(G) \leq 2.$$

Con l'algoritmo dei quattro colori al posto di quello dei cinque colori, l'errore additivo è al più 1.

Dimostrazione

- Nei primi due casi PL è esatto
- Nel terzo caso G ha un ciclo di lunghezza dispari, quindi $\chi(G) \geq 3$, mentre $PL(I) \leq 5$: l'errore additivo è al più

$$5 - 3 = 2$$

- Con 4 colori è al più

$$4 - 3 = 1$$

□

Il migliore possibile sui grafi planari

- L'errore additivo 1 non si può ridurre a 0: decidere se un grafo planare ha $\chi(G) \leq 3$ è NP-completo
- Per lo stesso motivo, il rapporto $\frac{4}{3}$ della versione con quattro colori è il migliore possibile sui grafi planari (per il teorema del $\frac{4}{3}$)

Definizione 2: grafo di intervalli

Un grafo $G = (V, E)$ è un ***grafo di intervalli*** *se a ogni vertice v è associato un intervallo chiuso $[a_v, b_v]$ della retta reale, e $\{u, v\} \in E$ se e solo se i due intervalli si intersecano.*

- I grafi di intervalli descrivono richieste nel tempo che sono in conflitto quando si sovrappongono: lezioni che richiedono un'aula, prenotazioni che richiedono una risorsa. Un colore è un'aula.

Proposizione 3

Su un grafo di intervalli, la colorazione greedy con i vertici in ordine di estremo sinistro a_v non decrescente usa $\omega(G)$ colori. È quindi ottima: $GC(I) = \omega(G) = \chi(G)$.

Dimostrazione (1/2)

- Sia v un vertice che riceve il colore k
- I colori $1, \ldots, k-1$ sono usati da vicini u di v colorati prima di v, quindi con

$$a_u \leq a_v$$

1. Poiché $[a_u, b_u]$ interseca $[a_v, b_v]$ e $a_u \leq a_v$, abbiamo

$$b_u \geq a_v :$$

il punto a_v sta nell'intervallo di ciascuno di questi vicini, e nell'intervallo di v

Dimostrazione (2/2)

2. I k intervalli che contengono a_v si intersecano a due a due, quindi i loro vertici formano una clique e

$$k \leq \omega(G)$$

Quindi, per il bound di clique,

$$GC(I) \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq GC(I).$$

□

L'ordine conta

- Ordinare gli intervalli richiede tempo $O(n \log n)$, e la colorazione $O(n + m)$
- L'ordine conta: con un altro ordine la colorazione greedy può usare più di $\omega(G)$ colori su un grafo di intervalli (si veda l'esempio con sei intervalli nella prossima sezione)

Riepilogo (1/2)

Grafi bipartiti:

- Una visita in ampiezza decide se $\chi(G) \leq 2$ in tempo $O(n+m)$
- Un conflitto dà un ciclo dispari, il certificato di $\chi(G) \geq 3$

Grafi di grado massimo limitato:

- La colorazione greedy usa al più $\Delta(G)+1$ colori, in qualunque ordine
- Con Δ fissato, il rapporto è al più $\frac{\Delta+1}{2}$

Riepilogo (2/2)

Grafi planari:

- Esiste sempre un vertice di grado al più 5, e bastano 5 colori (Heawood)
- PL ha errore additivo al più 2, o 1 con il teorema dei quattro colori

Grafi di intervalli:

- La colorazione greedy per estremo sinistro usa $\omega(G)$ colori, quindi è ottima
- L'ordine conta

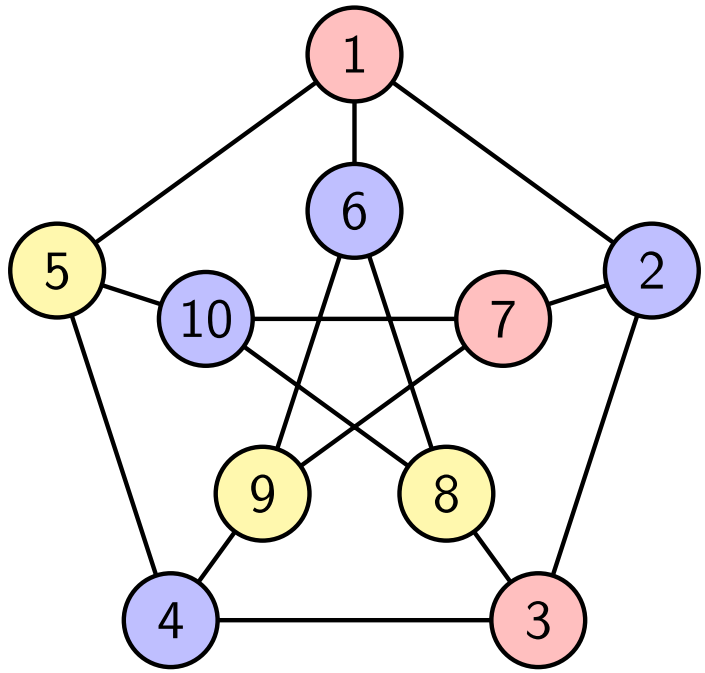
Esempi

Introduzione: Esempi

- Applichiamo i casi particolari a due grafi piccoli
- Prima il grafo di Petersen, l'istanza di riferimento del VCP: è bipartito, e quanto è buona la colorazione greedy?
- Poi un grafo di intervalli con sei intervalli, per vedere che l'ordine della colorazione greedy conta

Esempio: i casi particolari sul grafo di Petersen (1/3)

L'istanza di riferimento del VCP è il grafo di Petersen, con $n = 10$, $m = 15$ e $\Delta(G) = 3$.



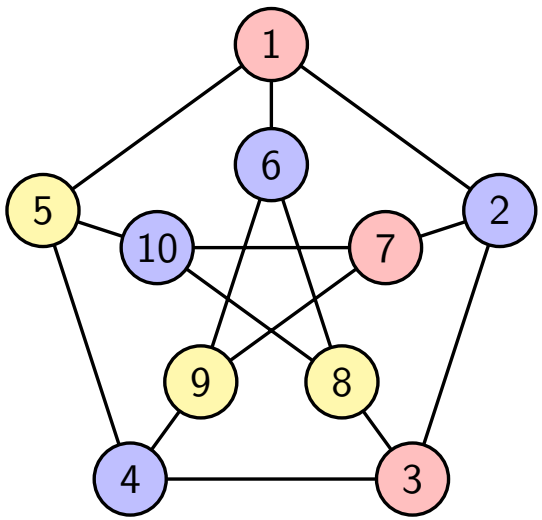
Esempio: i casi particolari sul grafo di Petersen (2/3)

È bipartito?

- La visita dal vertice 1 dà il livello 0 al vertice 1, 1 ai vertici $2, 5, 6$, e 2 agli altri sei
- Lo spigolo $\{3, 4\}$ unisce due vertici di livello 2
- Con i cammini $1, 2, 3$ e $1, 5, 4$ chiude il ciclo dispari $1, 2, 3, 4, 5$, quindi

$$\chi(G) \geq 3$$

Esempio: i casi particolari sul grafo di Petersen (3/3)



Colorazione greedy.

- Nell'ordine $1, 2, \ldots, 10$, GC assegna i colori

$$1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 3, 2$$

(rosso, blu, giallo nella figura)

- $GC(I) = 3 \leq \Delta(G) + 1 = 4$
- Insieme,

$$3 \leq \chi(G) \leq GC(I) = 3 :$$

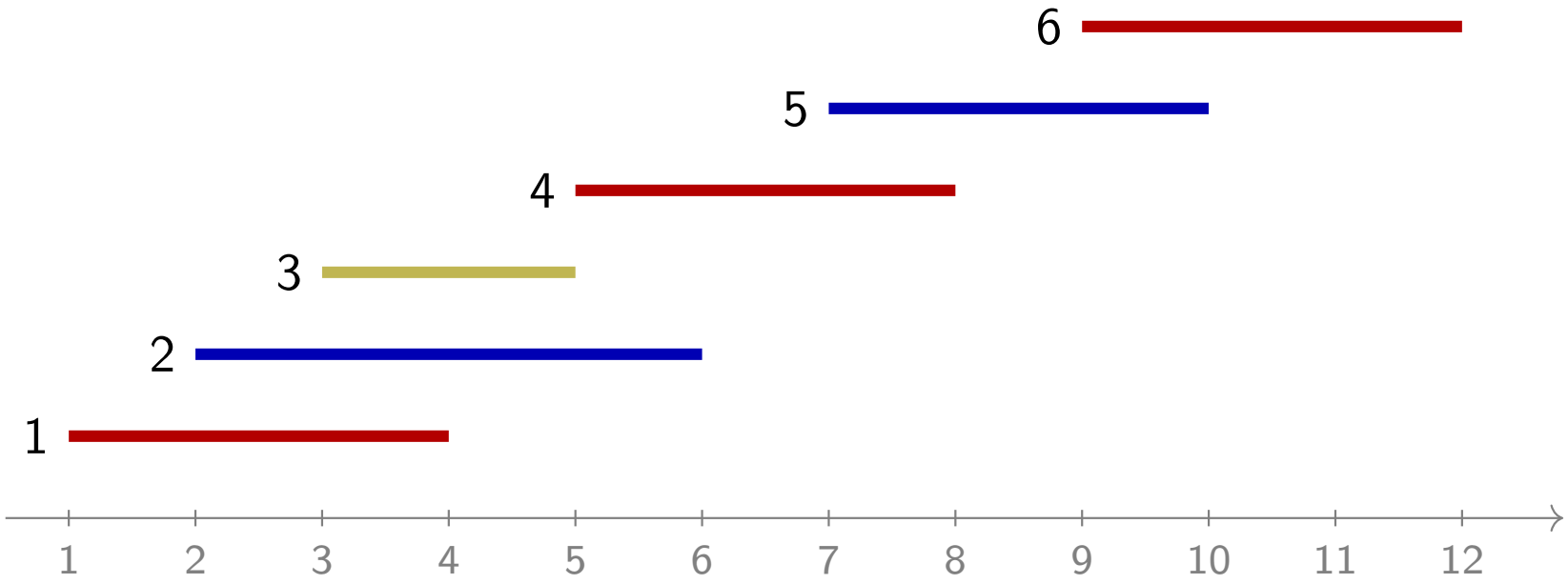
la colorazione greedy è ottima su questa istanza

Sul grafo di Petersen ogni ordine andrebbe bene.

Su un grafo di intervalli, invece,
l'ordine della colorazione greedy conta:
vediamolo su sei intervalli.

Esempio: la colorazione greedy su un grafo di intervalli (1/3)

Sei intervalli, con gli spigoli fra intervalli che si intersecano:



$$[a_v, b_v]: \ [1,4],\ [2,6],\ [3,5],\ [5,8],\ [7,10],\ [9,12],$$

$$E = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\big\}.$$

Esempio: la colorazione greedy su un grafo di intervalli (2/3)

- Gli estremi sinistri sono già in ordine crescente
- GC assegna i colori

  $$1, 2, 3, 1, 2, 1$$

  (rosso, blu, giallo nella figura): $GC(I) = 3$
- Gli intervalli $1, 2, 3$ contengono il punto 3, quindi $\{1, 2, 3\}$ è una clique e $\omega(G) = 3$
- La colorazione è ottima, come garantisce la proposizione sui grafi di intervalli

Esempio: la colorazione greedy su un grafo di intervalli (3/3)

Un altro ordine.

- Con l'ordine $1, 2, 3, 5, 4, 6$ i colori sono $1, 2, 3$, poi 1 al vertice 5
- Il vertice 4 riceve il colore 4: i suoi vicini $2, 3, 5$ usano i colori $1, 2, 3$
- 4 colori, uno in più di $\chi(G)$

Riepilogo

Il grafo di Petersen:

- La visita in ampiezza trova il ciclo dispari $1, 2, 3, 4, 5$: $\chi(G) \geq 3$
- La colorazione greedy nell'ordine $1, 2, \ldots, 10$ usa 3 colori: è ottima

Il grafo di intervalli:

- Per estremo sinistro, la colorazione greedy usa $\omega(G) = 3$ colori
- Con l'ordine $1, 2, 3, 5, 4, 6$ ne usa 4

Fonti

Introduzione: Fonti

- Elenchiamo gli articoli in cui sono stati dimostrati i risultati di questo capitolo
- Prima i risultati negativi sull'approssimazione del numero cromatico
- Poi i risultati positivi sulle classi particolari di grafi

Fonti (1/2)

- M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, *Theoretical Computer Science* 1(3):237–267, 1976.
- M.R. Garey, D.S. Johnson, The complexity of near-optimal graph coloring, *Journal of the ACM* 23(1):43–49, 1976.
- U. Feige, J. Kilian, Zero knowledge and the chromatic number, *Journal of Computer and System Sciences* 57(2):187–199, 1998.
- D. Zuckerman, Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number, *Theory of Computing* 3:103–128, 2007.

Fonti (2/2)

- R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 37(2):194–197, 1941.
- P.J. Heawood, Map-colour theorem, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 24, 1890.
- J. Hopcroft, R. Tarjan, Efficient planarity testing, *Journal of the ACM* 21(4):549–568, 1974.
- K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, *Illinois Journal of Mathematics* 21, 1977.
- N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, The four-colour theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70(1):2–44, 1997.

Riepilogo

Risultati negativi:

- Garey, Johnson e Stockmeyer; Garey e Johnson; Feige e Kilian; Zuckerman

Risultati positivi:

- Brooks; Heawood; Hopcroft e Tarjan; Appel e Haken; Robertson, Sanders, Seymour e Thomas

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- In questa sezione elenchiamo gli errori più comuni sull'approssimazione del VCP
- Riguardano il significato dei bound, il teorema dei quattro colori, l'ordine degli intervalli e il ciclo dispari
- Riconoscerli aiuta a enunciare correttamente i risultati

Osservazione 1: errori tipici (1/2)

- ***Chiamare il bound $\Delta(G)+1$ una garanzia di prestazione.*** *Confronta la colorazione greedy con $\Delta(G)+1$, non con $\chi(G)$; diventa un rapporto costante solo sui grafi di grado massimo limitato.*
- ***Leggere il teorema del $\frac{4}{3}$ come un upper bound.*** *Afferma che i rapporti inferiori a $\frac{4}{3}$ sono impossibili, non che un rapporto di $\frac{4}{3}$ sia raggiungibile: per il risultato di Zuckerman, nessun rapporto costante lo è.*
- ***Usare il teorema dei quattro colori come algoritmo esatto.*** *Colora ogni grafo planare con al più 4 colori, ma decidere se bastano 3 colori resta NP-completo sui grafi planari.*

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ***Ordinare gli intervalli per estremo destro, o per lunghezza.*** *La proposizione sui grafi di intervalli usa l'ordine degli estremi sinistri: gli intervalli dei colori usati prima di v contengono tutti il punto a_v.*
- ***Dimenticare il ciclo dispari.*** *Una visita in ampiezza che trova un conflitto dimostra $\chi(G) \geq 3$ solo attraverso il ciclo dispari che chiude; il ciclo è il certificato.*

Riepilogo

Il significato dei risultati:

- $\Delta(G)+1$ non è un rapporto con $\chi(G)$, tranne che sui grafi di grado limitato
- Il teorema del $\frac{4}{3}$ è un lower bound sul rapporto, non un rapporto raggiungibile
- Sui grafi planari bastano sempre quattro colori, ma decidere se ne bastano tre è difficile

I dettagli degli algoritmi:

- Grafi di intervalli: ordinare per estremo sinistro
- Test di bipartizione: il ciclo dispari è il certificato

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo in pochi punti le idee chiave del capitolo
- Chiudiamo con una tabella dei risultati sulle classi di grafi, e con il quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento

Riepilogo (1/3)

- A meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale colora ogni grafo con meno di $\frac{4}{3}\chi(G)$ colori: deciderebbe la 3-colorabilità
- Per il risultato di Zuckerman, non è possibile nemmeno il rapporto $n^{1-\varepsilon}$: il VCP non è approssimabile
- I grafi bipartiti e i grafi di intervalli si colorano all'ottimo in tempo polinomiale
- Sui grafi di grado limitato la colorazione greedy ha rapporto $\frac{\Delta+1}{2}$
- Sui grafi planari l'errore additivo è al più 2, o 1 con il teorema dei quattro colori

Riepilogo (2/3)

grafi	algoritmo	risultato
tutti i grafi	polinomiale	nessun rapporto costante, salvo $P = NP$
bipartiti	visita in ampiezza	esatto, $O(n + m)$
grado massimo $\leq \Delta$	colorazione greedy	al più $\Delta + 1$ colori
planari	*PL*	errore additivo ≤ 2 (o ≤ 1)
di intervalli	greedy per estremo sinistro	esatto, $\omega(G)$ colori

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento.

Istanza	Lower bound	Valore euristico	Valore ottimo
grafo di Petersen	3, ciclo dispari	*GC* 3	3