Clique massima: limiti dell'approssimazione

Indice

Notazione

Il MCP non è approssimabile

Casi particolari

Esempio

Fonti

Errori tipici

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- costruire il prodotto forte di due grafi e dimostrare $\omega(G \boxtimes H) = \omega(G)\,\omega(H)$;
- dimostrare che un algoritmo a rapporto costante per il MCP ne darebbe uno per ogni rapporto costante;
- enunciare i risultati di Håstad e Zuckerman, e concludere che il MCP e il MSSP non sono approssimabili;
- risolvere il MCP all'ottimo sui grafi planari e sui grafi di grado limitato, e approssimare il MSSP sui grafi di grado limitato.

Prerequisiti

- Da questo modulo, il capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione»: rapporto di prestazione per un problema di massimo, algoritmo di α-approssimazione, PTAS.
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, il capitolo «Problemi di clique»: le definizioni del MCP e del MSSP, il numero di clique $\omega(G)$, il grafo complementare e $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.
- Da questo modulo, il capitolo «Colorazione dei vertici: limiti dell'approssimazione»: i grafi planari e il bound $m \leq 3n - 6$.

Il problema di questo capitolo

- Il problema di questo capitolo è il problema della clique massima (MCP)
- La sua definizione e le sue ipotesi sono nella sua pagina
- La domanda del capitolo: quanto bene può un algoritmo **polinomiale** approssimare il numero di clique $\omega(G)$?

Notazione

Introduzione: Notazione

- In questa sezione fissiamo la notazione sui grafi e sui valori ottimi del MCP e del MSSP
- Richiamiamo come si misura il rapporto di prestazione per un problema di massimo
- Vediamo quale rapporto è banale: il resto del capitolo confronta tutto con esso

Grafi e valori ottimi

- Come nella pagina del problema, $G = (V, E)$ è un grafo semplice con n vertici e m spigoli
- $N(v)$ è l'insieme dei vicini di v, e $\Delta(G)$ il grado massimo
- Il valore ottimo del MCP è il **numero di clique**:

$$z(I) = \omega(G)$$

- Il valore ottimo del MSSP è il **numero di stabilità** $\alpha(G)$

Richiamo: il rapporto di prestazione

- Come nel capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione», $\mathscr{A}(I)$ è il numero di vertici della clique restituita dall'algoritmo $\mathscr{A}$

- Il MCP è un problema di massimo, quindi

$$\mathscr{A}(I) \leq \omega(G) \qquad \text{e} \qquad \frac{\omega(G)}{\mathscr{A}(I)} \geq 1$$

per ogni istanza I

Il rapporto banale

- Un singolo vertice è una clique, quindi il rapporto n è banale
- Questo capitolo mostra che un algoritmo polinomiale **non può fare molto meglio** su tutti i grafi
- e poi le **classi di grafi** su cui può

Riepilogo: Notazione

- $G = (V, E)$ con n vertici, m spigoli, vicini $N(v)$ e grado massimo $\Delta(G)$
- $z(I) = \omega(G)$ per il MCP, $\alpha(G)$ per il MSSP
- Per un problema di massimo il rapporto è $\frac{\omega(G)}{\mathscr{A}(I)} \geq 1$
- Un solo vertice dà già il rapporto n

Il MCP non è approssimabile

Introduzione: Il MCP non è approssimabile

- Definiamo il **prodotto forte** di due grafi: moltiplica i numeri di clique
- Con esso, un algoritmo a rapporto costante per il MCP darebbe **ogni** rapporto costante
- Poi enunciamo i risultati di Håstad e Zuckerman: a meno che $P = NP$, non è possibile nemmeno il rapporto $n^{1-\varepsilon}$
- Insieme dicono che il MCP **non è approssimabile**

Partiamo da una costruzione sui grafi:
il prodotto forte, che trasforma due grafi in uno.

Definizione 1: prodotto forte

Il ***prodotto forte*** *di due grafi* $G = (V, E)$ *e* $H = (W, F)$ *è il grafo* $G \boxtimes H$ *con insieme dei vertici* $V \times W$*, in cui due vertici distinti* (u, x) *e* (v, y) *sono adiacenti se e solo se*

$$\begin{aligned} &\big(u = v \quad \textit{oppure} \quad \{u, v\} \in E\big) \\ e \quad &\big(x = y \quad \textit{oppure} \quad \{x, y\} \in F\big). \end{aligned}$$

Dimensione del prodotto

- $G \boxtimes H$ ha $|V||W|$ vertici
- Si costruisce in tempo polinomiale nella dimensione di G e H
- In particolare $G \boxtimes G$ ha n^2 vertici

Proiezione e fibre

Per un insieme $K \subseteq V \times W$:

- la **proiezione** è

$$p(K) = \{u \in V : (u, x) \in K \text{ per qualche } x\}$$

- la **fibra** di $u \in p(K)$ è

$$K_u = \{x \in W : (u, x) \in K\}$$

- Proiezione e fibre scompongono un insieme del prodotto, una coordinata alla volta
- Vediamo ora che scompongono una clique del prodotto in clique dei due grafi
- È il fatto chiave di tutto il capitolo

Proposizione 1

Per ogni coppia di grafi G e H:

1. *se $K \subseteq V \times W$ è una clique di $G \boxtimes H$, allora $p(K)$ è una clique di G, ogni fibra K_u è una clique di H, e $|K| \leq |p(K)| \cdot \max_u |K_u|$;*
2. $\omega(G \boxtimes H) = \omega(G)\,\omega(H)$.

Dimostrazione (1/3)

Parte 1: la proiezione è una clique.

- Siano $u \neq v$ in $p(K)$, con $(u, x), (v, y) \in K$
- Questi due vertici sono adiacenti e $u \neq v$, quindi $\{u, v\} \in E$
- Quindi $p(K)$ è una clique

Parte 1: ogni fibra è una clique.

- Siano $x \neq y$ in K_u: (u, x) e (u, y) sono adiacenti, quindi $\{x, y\} \in F$
- Quindi K_u è una clique

Dimostrazione (2/3)

Parte 1: il bound su $|K|$.

- Le fibre partizionano K, quindi

$$|K| \;=\; \sum_{u \in p(K)} |K_u| \;\leq\; |p(K)| \cdot \max_u |K_u|.$$

Dimostrazione (3/3)

Parte 2.

- Se K_G e K_H sono clique massime di G e H, ogni coppia di vertici distinti di $K_G \times K_H$ soddisfa la definizione, quindi

$$\omega(G \boxtimes H) \geq \omega(G)\,\omega(H)$$

- Viceversa, per la Parte 1 ogni clique K di $G \boxtimes H$ ha

$$|K| \leq |p(K)| \cdot \max_u |K_u| \leq \omega(G)\,\omega(H)$$

□

Prodotto forte o lessicografico

- Anche il prodotto *lessicografico* soddisfa

$$\omega(G[H]) = \omega(G)\,\omega(H)$$

- Usiamo il prodotto forte, la cui definizione è **simmetrica** nei due grafi

Ora usiamo il prodotto forte di G con sé stesso
per migliorare il rapporto di un algoritmo di approssimazione.

Da una clique di $G \boxtimes G$ di nuovo a G

- La Parte 1 della Proposizione 1 è **costruttiva**
- Da una clique K di $G \boxtimes G$, $p(K)$ oppure la fibra più grande è una clique di G con almeno $\sqrt{|K|}$ vertici
- Infatti, il prodotto delle loro dimensioni è almeno $|K|$
- Entrambe si calcolano in tempo polinomiale

Teorema 1

Se il MCP ha un algoritmo polinomiale di α-approssimazione per qualche costante $\alpha \geq 1$, allora ha un algoritmo polinomiale di β-approssimazione per ogni costante $\beta > 1$.

- L'idea della dimostrazione: eseguire l'algoritmo su $G \boxtimes G$, dove l'ottimo è $\omega(G)^2$
- Tornare a G con la radice quadrata: il rapporto diventa $\sqrt{\alpha}$
- Ripetere un numero costante di volte

Dimostrazione (1/3)

Sia $\mathscr{A}$ un algoritmo polinomiale di α-approssimazione, e definiamo l'algoritmo $\mathscr{B}$:

1. costruire $G \boxtimes G$ ed eseguire $\mathscr{A}$ su di esso, ottenendo una clique K;
2. restituire la più grande fra $p(K)$ e la fibra più grande di K, una clique di G con almeno $\sqrt{|K|}$ vertici.

Dimostrazione (2/3)

- Per la Proposizione 1, $\omega(G \boxtimes G) = \omega(G)^2$, quindi

$$|K| \geq \frac{\omega(G)^2}{\alpha}$$

- e

$$\mathscr{B}(I) \;\geq\; \sqrt{|K|} \;\geq\; \frac{\omega(G)}{\sqrt{\alpha}}$$

- $\mathscr{B}$ è un algoritmo polinomiale di $\sqrt{\alpha}$-approssimazione

Dimostrazione (3/3)

- Applicando la costruzione t volte si ottiene il rapporto $\alpha^{1/2^t}$
- $\mathscr{A}$ è eseguito su un grafo con n^{2^t} vertici
- Scegliamo la costante t con

$$2^t \geq \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$$

- Allora $\alpha^{1/2^t} \leq \beta$, e n^{2^t} è un polinomio

□

Il prodotto amplifica il rapporto

- In altre parole, il MCP ha un algoritmo a rapporto costante **se e solo se** ha un PTAS
- Il prodotto forte *amplifica* qualunque rapporto costante
- Il tempo di esecuzione cresce come una potenza n^{2^t}, che è polinomiale solo perché t è una costante

Questo è il lato positivo dell'amplificazione.
Il lato negativo viene dalla teoria della complessità.

I risultati di Håstad e Zuckerman

- Il lato negativo è noto, e lo enunciamo **senza dimostrazione**
- Usa le dimostrazioni verificabili probabilisticamente

Teorema 2: Håstad, 1999; Zuckerman, 2007

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $P \neq NP$, nessun algoritmo polinomiale $\mathscr{A}$ per il MCP soddisfa, per ogni grafo G con n vertici,

$$\frac{\omega(G)}{\mathscr{A}(I)} \leq n^{1-\varepsilon}.$$

Due ipotesi

- **Håstad (1999)** ha dimostrato il teorema nell'ipotesi che i problemi NP non si possano risolvere in tempo polinomiale randomizzato ($NP \neq ZPP$)
- **Zuckerman (2007)** lo ha dimostrato nell'ipotesi $P \neq NP$

Nessun rapporto costante e nessun PTAS

- Come per il VCP, il teorema esclude ogni rapporto costante
- Un algoritmo di α-approssimazione ha rapporto al più $\alpha < n^{1/2}$ sui grafi con $n > \alpha^2$ vertici
- I grafi più piccoli si risolvono per enumerazione in tempo costante
- Insieme al Teorema 1: a meno che $P = NP$, il MCP non ha **né** un rapporto costante **né** un PTAS

Il MCP non è approssimabile

- Il MCP non è approssimabile: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia di prestazione costante
- e nemmeno una garanzia della forma $n^{1-\varepsilon}$
- Esistono risultati positivi solo su **classi particolari di grafi**

Riepilogo: Il MCP non è approssimabile (1/2)

Prodotto forte:

- $G \boxtimes H$ ha $|V|\,|W|$ vertici e $\omega(G \boxtimes H) = \omega(G)\,\omega(H)$
- Una clique del prodotto si scompone nella sua proiezione e nelle sue fibre, clique dei due grafi

Amplificazione:

- Da una clique K di $G \boxtimes G$ otteniamo una clique di G con almeno $\sqrt{|K|}$ vertici
- Un rapporto costante α dà $\sqrt{\alpha}$, poi ogni costante $\beta > 1$

Riepilogo: Il MCP non è approssimabile (2/2)

Håstad e Zuckerman:

- A meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha rapporto $n^{1-\varepsilon}$ su ogni grafo
- Quindi il MCP non ha né un rapporto costante né un PTAS

Prossimo passo:

- Risultati positivi solo su classi particolari di grafi

Casi particolari

Introduzione: Casi particolari

- Su tutti i grafi il MCP non è approssimabile, ma alcune classi di grafi sono facili
- Sui **grafi planari** e sui grafi di **grado massimo limitato** il MCP si risolve all'ottimo per enumerazione
- Attraverso il grafo complementare, il risultato negativo passa al **MSSP**, ma i casi particolari no
- Sui grafi di grado limitato il MSSP ha un rapporto costante

Prima classe: i grafi planari,
che non hanno clique grandi.

Proposizione 2

Ogni grafo planare ha $\omega(G) \leq 4$, e sui grafi planari il MCP si risolve all'ottimo in tempo $O(n^4)$.

Dimostrazione

- Un sottografo di un grafo planare è planare
- Il grafo completo con 5 vertici ha 10 spigoli, più di $3 \cdot 5 - 6 = 9$, quindi non è planare
- Quindi un grafo planare non ha clique con 5 vertici
- I sottoinsiemi di al più 4 vertici sono $O(n^4)$, e ciascuno si verifica in tempo costante

□

Seconda classe: i grafi di grado massimo limitato, dove ogni clique sta dentro un solo vicinato.

Proposizione 3

Ogni grafo ha $\omega(G) \leq \Delta(G)+1$, *e il MCP si risolve all'ottimo in tempo* $O(n\,2^{\Delta}\,\Delta^2)$, *con* $\Delta = \Delta(G)$.

Dimostrazione

- Una clique che contiene il vertice v è contenuta in $\{v\} \cup N(v)$, che ha al più $\Delta + 1$ vertici
- Per ogni vertice v, enumeriamo i $2^{\deg(v)} \leq 2^{\Delta}$ sottoinsiemi $S \subseteq N(v)$
- Teniamo il più grande $\{v\} \cup S$ che sia una clique
- Verificare le coppie di S richiede tempo $O(\Delta^2)$
- Ogni clique massima si trova a partire da uno qualsiasi dei suoi vertici

□

Quando il tempo è polinomiale?

- Il tempo $O(n\,2^{\Delta}\,\Delta^2)$ è polinomiale per ogni Δ fissato
- e anche quando $\Delta \leq \log_2 n$, perché allora

$$2^{\Delta} \leq n$$

Che cosa succede agli insiemi stabili?
Il grafo complementare trasforma un problema nell'altro.

Il problema dell'insieme stabile massimo

- Per $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ (capitolo «Problemi di clique» del modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*), un insieme stabile di G è una clique di $\overline{G}$
- $\overline{G}$ si costruisce in tempo $O(n^2)$ e ha lo stesso n
- Un algoritmo con rapporto $\rho(n)$ per uno dei due problemi, applicato al grafo complementare, ha lo stesso rapporto $\rho(n)$ per l'altro

Corollario 1

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $P \neq NP$, nessun algoritmo polinomiale per il MSSP ha rapporto $\frac{\alpha(G)}{\mathscr{A}(I)} \leq n^{1-\varepsilon}$ su ogni grafo. In particolare, il MSSP non ha un rapporto costante.

I casi particolari non si trasferiscono

- I casi particolari *non* si trasferiscono al MSSP
- Il complementare di un grafo planare, o di un grafo di grado limitato, è **denso**
- Su quelle classi il MSSP resta NP-difficile, ma è **approssimabile**

Proposizione 4

Su ogni grafo, un insieme stabile ***massimale*** *S (a cui non si può aggiungere nessun vertice) ha $|S| \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$. Quindi l'algoritmo greedy che aggiunge vertici finché è possibile soddisfa*

$$\frac{\alpha(G)}{|S|} \leq \Delta(G) + 1.$$

Dimostrazione

- Ogni vertice fuori da S ha un vicino in S, altrimenti si potrebbe aggiungere
- Quindi

$$V = \bigcup_{v \in S} \left(\{v\} \cup N(v) \right) \qquad \text{e} \qquad n \leq |S| \left(\Delta(G) + 1 \right)$$

- Poiché $\alpha(G) \leq n$, il rapporto è al più

$$\frac{\alpha(G)}{|S|} \leq \frac{n}{|S|} \leq \Delta(G) + 1$$

□

Grado limitato e grafi planari per il MSSP

- Sui grafi di grado massimo al più un Δ fissato questo è un **rapporto costante**
- Sui grafi planari il MSSP ha addirittura un **PTAS** (Baker, 1994)

Riepilogo: Casi particolari (1/2)

Grafi planari:

- K_5 non è planare, quindi $\omega(G) \leq 4$, e il MCP si risolve all'ottimo in tempo $O(n^4)$

Grado massimo limitato:

- $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$: ogni clique sta in $\{v\} \cup N(v)$
- Enumerazione in tempo $O(n\, 2^{\Delta}\, \Delta^2)$, polinomiale per Δ fissato o $\Delta \leq \log_2 n$

Riepilogo: Casi particolari (2/2)

Il MSSP:

- Attraverso $\overline{G}$, il MSSP non ha rapporto $n^{1-\varepsilon}$, a meno che $P = NP$
- I casi particolari non si trasferiscono: i complementari sono densi
- Un insieme stabile massimale ha rapporto al più $\Delta(G) + 1$; sui grafi planari esiste un PTAS

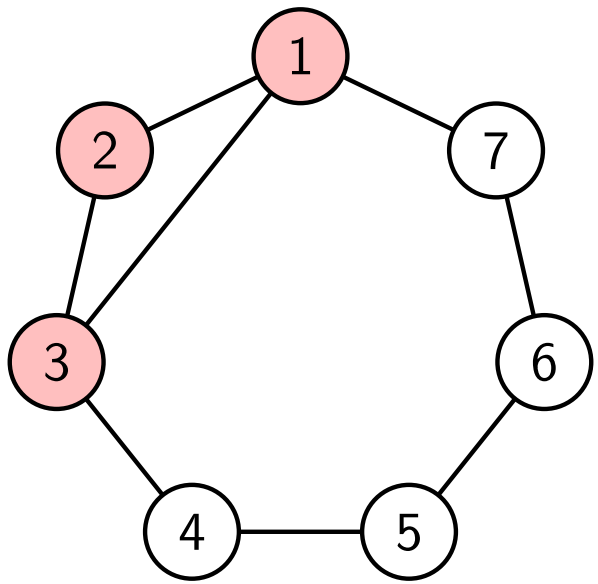
Esempio

Introduzione: Esempio

- Applichiamo i risultati del capitolo all'istanza di riferimento del MCP
- Vediamo il prodotto forte, una clique del prodotto scomposta, l'enumerazione per il grado limitato e il bound per i grafi planari
- Tutti i numeri sono abbastanza piccoli da verificarli a mano

Esempio (1/4)

- L'istanza di riferimento del MCP è il ciclo $1, 2, \ldots, 7, 1$ con la corda $\{1, 3\}$
- $n = 7$, $m = 8$, $\Delta(G) = 3$ e $\omega(G) = 3$, con l'unica clique massima $\{1, 2, 3\}$ (in rosso)



Esempio (2/4)

Prodotto forte.

- $G \boxtimes G$ ha $7^2 = 49$ vertici e 240 spigoli
- Il suo numero di clique è

$$\omega(G \boxtimes G) = 3^2 = 9$$

raggiunto da $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

Esempio (3/4)

- Supponiamo che un algoritmo restituisca su $G \boxtimes G$ la clique

$$K = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}, \qquad |K| = 6$$

- La sua proiezione $p(K) = \{1, 2, 3\}$ e le sue fibre $K_u = \{4, 5\}$ sono clique di G
- La più grande ha $3 \geq \sqrt{6}$ vertici

Esempio (4/4)

Grado limitato.

- L'enumerazione della Proposizione 3 esamina

$$\sum_{v} 2^{\deg(v)} = 2^3 + 2^2 + 2^3 + 4 \cdot 2^2 = 36$$

  sottoinsiemi
- Trova $\{1, 2, 3\}$ dai vertici 1, 2 e 3

Planarità.

- Il grafo è planare, come mostra la figura, e $\omega(G) = 3 \leq 4$

Riepilogo: Esempio

- Sul ciclo con una corda, $\omega(G) = 3$ e $\omega(G \boxtimes G) = 9$
- Una clique di 6 vertici del prodotto restituisce una clique di G con $3 \geq \sqrt{6}$ vertici
- L'enumerazione per il grado limitato esamina 36 sottoinsiemi e trova $\{1, 2, 3\}$
- Il grafo è planare, e $\omega(G) = 3 \leq 4$

Fonti

Introduzione: Fonti

- I risultati di questo capitolo vengono da un libro di testo e da tre articoli di ricerca
- Sono i luoghi dove leggere le dimostrazioni complete, in particolare quella del teorema di Håstad e Zuckerman

Fonti (1/2)

- M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, 1979 (l'auto-miglioramento del MCP con i prodotti di grafi).
- J. Håstad, Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$, *Acta Mathematica* 182(1):105–142, 1999.

Fonti (2/2)

- D. Zuckerman, Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number, *Theory of Computing* 3:103–128, 2007.
- B.S. Baker, Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs, *Journal of the ACM* 41(1):153–180, 1994.

Riepilogo: Fonti

- Garey e Johnson (1979): l'auto-miglioramento del MCP con i prodotti di grafi
- Håstad (1999) e Zuckerman (2007): il rapporto $n^{1-\varepsilon}$ è impossibile
- Baker (1994): un PTAS per il MSSP sui grafi planari

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- Quattro errori frequenti sull'approssimazione di clique e insiemi stabili
- Riguardano il verso del rapporto, il numero di prodotti e il passaggio dal MCP al MSSP
- Controllarli è un modo rapido per non perdere punti

Osservazione 1: errori tipici (1/2)

- ***Invertire il rapporto.*** *Il MCP è un problema di massimo: il rapporto è* $\frac{\omega(G)}{\mathscr{A}(I)}$*, almeno* 1*.*
- ***Iterare il prodotto un numero di volte che cresce con*** n***.*** *Il grafo dopo* t *prodotti ha* n^{2^t} *vertici: è polinomiale solo per* t *costante, quindi l'amplificazione dà ogni rapporto costante, non il rapporto* 1*.*

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ***Trasferire i casi particolari al MSSP.*** *Il complementare di un grafo planare non è planare: il MCP è facile sui grafi planari, il MSSP lì è NP-difficile.*
- ***Confondere il bound $\Delta(G)+1$ del MCP con quello del MSSP.*** *Per il MCP, $\omega(G) \leq \Delta(G)+1$ limita l'ottimo e rende veloce l'enumerazione; per il MSSP, $\Delta(G)+1$ limita il rapporto di un insieme stabile massimale.*

Riepilogo: Errori tipici

- Il rapporto del MCP è $\frac{\omega(G)}{\mathscr{A}(I)} \geq 1$
- Il numero t di prodotti deve essere una costante
- I grafi planari sono facili per il MCP, non per il MSSP
- $\Delta(G) + 1$ limita l'ottimo del MCP, e il rapporto di un insieme stabile massimale per il MSSP

Riepilogo (1/3)

- Il prodotto forte eleva al quadrato il numero di clique, e una clique del prodotto restituisce una clique di G di dimensione almeno pari alla radice quadrata della sua: un rapporto costante per il MCP darebbe ogni rapporto costante.
- Per i risultati di Håstad e Zuckerman, a meno che $P = NP$ non è possibile nemmeno il rapporto $n^{1-\varepsilon}$: il MCP non è approssimabile, e nemmeno il MSSP, attraverso il grafo complementare.
- Sui grafi planari e sui grafi di grado limitato il MCP si risolve all'ottimo per enumerazione; sui grafi di grado limitato un insieme stabile massimale ha rapporto al più $\Delta(G) + 1$ per il MSSP.

Riepilogo (2/3)

problema e grafi	algoritmo	risultato
MCP, tutti i grafi	polinomiale	nessun rapporto costante, salvo $P = NP$
MCP, planari	enumerazione	esatto, $\omega(G) \leq 4$
MCP, grado $\leq \Delta$	enumerazione	esatto, $O(n\,2^{\Delta}\Delta^2)$
MSSP, tutti i grafi	polinomiale	nessun rapporto costante, salvo $P = NP$
MSSP, grado $\leq \Delta$	stabile massimale	rapporto $\leq \Delta + 1$

Riepilogo (3/3)

Cruscotto dell'istanza di riferimento.

Istanza	Upper bound	Valore trovato	Valore ottimo
ciclo con una corda	$\Delta(G) + 1 = 4$	3, enumerazione	3