Principi degli algoritmi di approssimazione

Indice

Perché una garanzia di prestazione?

Algoritmi di approssimazione
- Garanzia di prestazione relativa
- Garanzia di prestazione additiva

Schemi di approssimazione

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- calcolare il rapporto di prestazione, l'errore additivo e l'errore relativo di un algoritmo euristico su un'istanza, per problemi di minimo e di massimo;
- stabilire quando un numero è una garanzia di prestazione relativa o additiva, e quando è tight;
- dimostrare che una garanzia è tight esibendo un'istanza, o una successione di istanze;
- definire uno schema di approssimazione, un PTAS e un FPTAS, e tradurre l'accuratezza ε in una garanzia di prestazione.

Prerequisiti

- Dal modulo *Algoritmi euristici*, il capitolo «Algoritmi euristici: definizioni»: algoritmi euristici, soluzioni ammissibili e valore della soluzione restituita da un algoritmo euristico.
- Dal modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, i capitoli sui problemi di ottimizzazione combinatoria: istanze, soluzioni ottime e valore ottimo $z(I)$ di un'istanza I.

Perché una garanzia di prestazione?

Introduzione: Perché una garanzia di prestazione?

- Un algoritmo euristico restituisce una soluzione ammissibile, ma quanto è buona?
- Provarlo su alcune istanze dice poco sull'istanza successiva
- Cerchiamo affermazioni che valgano per *ogni* istanza: le garanzie di prestazione

Prove e garanzie

- Di solito un algoritmo euristico si prova su poche istanze, e può comportarsi in modo molto diverso sulla successiva.
- Una **garanzia di prestazione** è un'affermazione che vale per *ogni* istanza.

Una sfida

Un algoritmo euristico per un problema di massimo restituisce il valore 40 su un'istanza il cui valore ottimo è 50.

Quanto dista dall'ottimo?

Provate a dare **tre risposte diverse** prima di andare avanti.

Tre risposte

La stessa distanza si può misurare in tre modi:

- il **rapporto**
$$\frac{50}{40} = \frac{5}{4};$$
- l'errore **additivo**
$$50 - 40 = 10;$$
- l'errore **relativo**
$$\frac{50 - 40}{50} = \frac{1}{5}.$$

Questo capitolo definisce le tre misure; più avanti nel corso calcoleremo la peggiore di esse su tutte le istanze.

Riepilogo

Perché una garanzia:

- poche prove dicono poco sull'istanza successiva
- una garanzia di prestazione vale per ogni istanza

Tre misure della stessa distanza:

- il rapporto, l'errore additivo e l'errore relativo
- per la sfida: $\frac{5}{4}$, 10 e $\frac{1}{5}$

Algoritmi di approssimazione

Introduzione: Algoritmi di approssimazione

- In questa sezione confrontiamo il valore euristico $\mathscr{A}(I)$ con il valore ottimo $z(I)$, nel caso peggiore su tutte le istanze
- Definiamo due tipi di garanzie: **relative** (con i rapporti) e **additive** (con le differenze)
- Per ciascuna vediamo quando una garanzia è **tight**, e qual è la migliore possibile

Valore euristico

Definizione 1: Valore euristico

*Sia $\mathscr{A}$ un **algoritmo euristico** per un **problema di ottimizzazione** $\mathscr{P}$. Per ogni **istanza** I di $\mathscr{P}$:*

1. *$z(I)$ è il **valore ottimo** di $\mathscr{P}$ su I (supposto positivo);*
2. *$\mathscr{A}(I)$ è il **valore euristico**, cioè il valore obiettivo della soluzione ammissibile restituita da $\mathscr{A}$ su I (supposto positivo).*

L'ipotesi di ammissibilità

- Supponiamo che $\mathscr{A}$ restituisca sempre una **soluzione ammissibile**.
- Quindi, per ogni istanza I,

$$\begin{cases} \mathscr{A}(I) \geq z(I) \text{ e } \dfrac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} \geq 1 & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ \mathscr{A}(I) \leq z(I) \text{ e } \dfrac{z(I)}{\mathscr{A}(I)} \geq 1 & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

Misurare la qualità

In generale, un algoritmo euristico può a volte generare soluzioni di valore quasi ottimo, ma in altri casi può produrre soluzioni sensibilmente peggiori.

Di conseguenza, ci interessa "misurare" (quando possibile) la qualità delle soluzioni fornite da un algoritmo euristico.

Comportamento nel caso peggiore

- Adottiamo il punto di vista del **comportamento nel caso peggiore**.
- Valutiamo un algoritmo euristico guardando il massimo scostamento possibile, su tutte le istanze, fra il valore euristico e il valore ottimo.

Due modi di misurare lo scostamento

1. **Garanzia di prestazione relativa** (garanzia moltiplicativa): misuriamo la qualità della soluzione euristica guardando l'*errore relativo*, cioè quanto il valore euristico dista dall'ottimo *in termini relativi*, usando rapporti.

2. **Garanzia di prestazione assoluta** (garanzia additiva): misuriamo la qualità della soluzione euristica guardando l'*errore assoluto*, cioè la differenza fra il valore euristico e il valore ottimo.

Garanzia di prestazione relativa

Cominciamo dalla garanzia **relativa**:
il valore euristico e il valore ottimo si confrontano attraverso il loro **rapporto**.

Rapporto di prestazione

Definizione 2: Rapporto di prestazione

Il ***rapporto di prestazione*** *di* $\mathscr{A}$ *su un'istanza* I *è*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ \dfrac{z(I)}{\mathscr{A}(I)} & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

- Nell'ipotesi di ammissibilità, il rapporto di prestazione è almeno 1 per ogni istanza I.

Algoritmo di α-approssimazione

Definizione 3: Algoritmo di α-approssimazione

Un algoritmo euristico $\mathscr{A}$ per un problema di ottimizzazione $\mathscr{P}$ è un ***algoritmo di α-approssimazione*** *se esiste una costante $\alpha \in [1, +\infty)$ tale che, per ogni istanza I di $\mathscr{P}$,*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} \leq \alpha & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ \dfrac{z(I)}{\mathscr{A}(I)} \leq \alpha & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

Ogni costante α di questo tipo si chiama ***garanzia di prestazione relativa*** *di $\mathscr{A}$.*

Garanzia relativa tight

- Una garanzia di prestazione relativa α per $\mathscr{A}$ è **tight** se nessuna costante minore $\alpha' < \alpha$ è anch'essa una garanzia di prestazione relativa per $\mathscr{A}$.

- Cioè, le stesse disuguaglianze non valgono per tutte le istanze con α' al posto di α.

Come si dimostra che una garanzia è tight

- Che una garanzia sia tight si dimostra di solito esibendo un'istanza I per cui il rapporto di prestazione raggiunge α, cioè

$$\frac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} = \alpha \quad \text{(minimo)} \qquad \text{oppure}$$

$$\frac{z(I)}{\mathscr{A}(I)} = \alpha \quad \text{(massimo)},$$

- oppure una successione di istanze $\{I_n\}$ i cui rapporti di prestazione si avvicinano arbitrariamente ad α.

Molte costanti possono essere garanzie relative dello stesso algoritmo.

Qual è la **più piccola**?

Rapporto di prestazione nel caso peggiore

Definizione 4: Rapporto di prestazione nel caso peggiore

Il ***rapporto di prestazione nel caso peggiore*** *di* $\mathscr{A}$ *è, se* $\mathscr{P}$ *è un problema di minimo,*

$$r(\mathscr{A}) = \sup\left\{ \frac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} : I \text{ è un'istanza di } \mathscr{P} \right\},$$

e, se $\mathscr{P}$ *è un problema di massimo,*

$$r(\mathscr{A}) = \sup\left\{ \frac{z(I)}{\mathscr{A}(I)} : I \text{ è un'istanza di } \mathscr{P} \right\}.$$

Proprietà di $r(\mathscr{A})$

- Il valore $r(\mathscr{A})$ è la costante minima α per cui $\mathscr{A}$ è un algoritmo di α-approssimazione.
- La garanzia di prestazione relativa α è tight se e solo se $\alpha = r(\mathscr{A})$.
- Se $r(\mathscr{A}) < \infty$, allora $\mathscr{A}$ ammette una garanzia di prestazione relativa finita (equivalentemente, ha un rapporto di prestazione limitato).
- Se $r(\mathscr{A}) = \infty$, allora $\mathscr{A}$ non ha alcuna garanzia relativa nel caso peggiore.

Terminologia usata in letteratura

- Una garanzia di prestazione relativa finita α si chiama anche **fattore di approssimazione** (o **garanzia di approssimazione**).
- Un **algoritmo di α-approssimazione** si chiama anche **algoritmo di approssimazione a fattore costante**.
- $r(\mathscr{A})$ si chiama anche **rapporto di approssimazione (nel caso peggiore)** di $\mathscr{A}$.

Garanzia di prestazione additiva

Ora ripetiamo lo stesso percorso con le **differenze** al posto dei rapporti:
errore additivo, garanzia additiva, garanzia tight e garanzia migliore.

Errore additivo

- L'**errore additivo** (o **errore assoluto**) di $\mathscr{A}$ su un'istanza I è

$$\begin{cases} \mathscr{A}(I) - z(I) & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ z(I) - \mathscr{A}(I) & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

- Nell'ipotesi di ammissibilità, questa quantità è non negativa per ogni istanza I.

Algoritmo di approssimazione β-additivo

Definizione 5: Algoritmo di approssimazione β-additivo

Un algoritmo euristico $\mathscr{A}$ per un problema di ottimizzazione $\mathscr{P}$ è un ***algoritmo di approssimazione β-additivo*** *se esiste una costante $\beta \in [0, +\infty)$ tale che, per ogni istanza I di $\mathscr{P}$,*

$$\begin{cases} \mathscr{A}(I) - z(I) \leq \beta & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ z(I) - \mathscr{A}(I) \leq \beta & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

Ogni costante β di questo tipo si chiama ***garanzia di prestazione additiva*** *di $\mathscr{A}$.*

Garanzia additiva tight

- Una garanzia di prestazione additiva β per $\mathscr{A}$ è **tight** se nessuna costante minore $\beta' < \beta$ è anch'essa una garanzia di prestazione additiva per $\mathscr{A}$.

- Che una garanzia sia tight si dimostra di solito esibendo un'istanza I per cui l'errore additivo raggiunge β, cioè

$$\mathscr{A}(I) - z(I) = \beta \quad \text{(minimo)} \qquad \text{oppure}$$

$$z(I) - \mathscr{A}(I) = \beta \quad \text{(massimo)},$$

- oppure una successione di istanze $\{I_n\}$ i cui errori additivi si avvicinano arbitrariamente a β.

Errore additivo nel caso peggiore

Definizione 6: Errore additivo nel caso peggiore

*L'**errore additivo nel caso peggiore** di $\mathscr{A}$ è, se $\mathscr{P}$ è un problema di minimo,*

$$e(\mathscr{A}) = \sup\{\mathscr{A}(I) - z(I) : I \text{ istanza di } \mathscr{P}\},$$

e, se $\mathscr{P}$ è un problema di massimo,

$$e(\mathscr{A}) = \sup\{z(I) - \mathscr{A}(I) : I \text{ istanza di } \mathscr{P}\}.$$

Proprietà di $e(\mathscr{A})$

- Il valore $e(\mathscr{A})$ è la costante minima β per cui $\mathscr{A}$ è un algoritmo di approssimazione β-additivo.
- La garanzia di prestazione additiva β è tight se e solo se $\beta = e(\mathscr{A})$.
- Se $e(\mathscr{A}) < \infty$, allora $\mathscr{A}$ ammette una garanzia di prestazione additiva finita (equivalentemente, ha errore additivo limitato).
- Se $e(\mathscr{A}) = \infty$, allora $\mathscr{A}$ non ha alcuna garanzia additiva (assoluta) nel caso peggiore.

Terminologia usata in letteratura

- Una garanzia di prestazione additiva finita β si chiama anche **garanzia di prestazione assoluta** o **garanzia di approssimazione additiva**.
- $e(\mathscr{A})$ si chiama anche **errore assoluto (additivo) nel caso peggiore** di $\mathscr{A}$.

Riepilogo (1/2)

Valore euristico:

- $\mathscr{A}(I)$ è il valore della soluzione ammissibile restituita da $\mathscr{A}$ su I
- non è mai migliore di $z(I)$; giudichiamo $\mathscr{A}$ nel caso peggiore su tutte le istanze

Garanzia relativa:

- rapporto di prestazione $\mathscr{A}(I)/z(I)$ (minimo) o $z(I)/\mathscr{A}(I)$ (massimo), sempre almeno 1
- algoritmo di α-approssimazione: rapporto al più α su ogni istanza
- la minima α è $r(\mathscr{A})$, e α è tight se e solo se $\alpha = r(\mathscr{A})$

Riepilogo (2/2)

Garanzia additiva:

- errore additivo $\mathscr{A}(I) - z(I)$ (minimo) o $z(I) - \mathscr{A}(I)$ (massimo), sempre non negativo
- algoritmo di approssimazione β-additivo: errore additivo al più β su ogni istanza
- la minima β è $e(\mathscr{A})$, e β è tight se e solo se $\beta = e(\mathscr{A})$

Garanzie tight:

- si mostrano con un'istanza che raggiunge la garanzia, o con una successione di istanze che le si avvicina arbitrariamente

Schemi di approssimazione

Introduzione: Schemi di approssimazione

- In questa sezione misuriamo la qualità di una soluzione euristica con l'**errore relativo**
- Uno schema di approssimazione è una famiglia di algoritmi: uno per ogni errore ammesso ε
- Traduciamo ε in una garanzia di prestazione α, e classifichiamo gli schemi in base al tempo di esecuzione: **PTAS** e **FPTAS**

Errore relativo

- L'**errore relativo** (detto anche **errore percentuale**) di $\mathscr{A}$ su un'istanza I è

$$\begin{cases} \dfrac{\mathscr{A}(I) - z(I)}{z(I)} & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ \dfrac{z(I) - \mathscr{A}(I)}{z(I)} & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

- Nell'ipotesi di ammissibilità, questa quantità è non negativa per ogni istanza I, ed è uguale a 0 se e solo se $\mathscr{A}(I) = z(I)$.

Errore relativo e gap

- L'errore relativo divide per il valore ottimo $z(I)$.
- Non va confuso con il **gap** del capitolo «Ottimizzazione combinatoria: definizioni» del modulo *Problemi di ottimizzazione combinatoria*, che divide per il lower bound.
- Il gap non è mai minore dell'errore relativo (capitolo «Algoritmi euristici: definizioni» del modulo *Algoritmi euristici*).

Schema di approssimazione

Definizione 7: Schema di approssimazione

Uno ***schema di approssimazione*** *per un problema di ottimizzazione* $\mathscr{P}$ *è una famiglia di algoritmi euristici* $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ *tale che, per ogni* $\varepsilon \in (0,1)$ *e per ogni istanza* I *di* $\mathscr{P}$*,*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathscr{A}_\varepsilon(I) - z(I)}{z(I)} \leq \varepsilon & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di minimo,} \\ \dfrac{z(I) - \mathscr{A}_\varepsilon(I)}{z(I)} \leq \varepsilon & \text{se } \mathscr{P} \text{ è un problema di massimo.} \end{cases}$$

Ogni algoritmo $\mathscr{A}_\varepsilon$ di uno schema ha errore relativo al più ε.

Quale **garanzia di prestazione** α ne segue?

La risposta dipende dal verso dell'ottimizzazione.

Da ε ad α: problemi di minimo

- Per i problemi di minimo,

$$\frac{\mathscr{A}_\varepsilon(I) - z(I)}{z(I)} \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni istanza } I \text{ di } \mathscr{P}$$

implica

$$\mathscr{A}_\varepsilon(I) - z(I) \leq \varepsilon\, z(I) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon)\, z(I).$$

- Dividendo per $z(I) > 0$,

$$\frac{\mathscr{A}_\varepsilon(I)}{z(I)} \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{per ogni istanza } I \text{ di } \mathscr{P}.$$

- Quindi $\mathscr{A}_\varepsilon$ è un algoritmo di $(1+\varepsilon)$-approssimazione.

Da ε ad α: problemi di massimo

- Per i problemi di massimo,

$$\frac{z(I) - \mathscr{A}_\varepsilon(I)}{z(I)} \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni istanza } I \text{ di } \mathscr{P}$$

implica

$$z(I) - \mathscr{A}_\varepsilon(I) \leq \varepsilon\, z(I) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{A}_\varepsilon(I) \geq (1-\varepsilon)\, z(I).$$

- Poiché $0 < \varepsilon < 1$ e $z(I) > 0$, dividendo per $(1-\varepsilon)z(I)$ si ottiene

$$\frac{z(I)}{\mathscr{A}_\varepsilon(I)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \qquad \text{per ogni istanza } I \text{ di } \mathscr{P}.$$

- Quindi $\mathscr{A}_\varepsilon$ è un algoritmo di $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$-approssimazione.

Errore e tempo di esecuzione

È naturale che il tempo di esecuzione di uno schema di approssimazione cresca al diminuire di ε:

più piccolo è l'errore ammesso, più alto è il tempo di esecuzione richiesto.

Accuratezza (1/2)

- La quantità $\frac{1}{\varepsilon}$ si chiama spesso **accuratezza**.
- Infatti, dalle disuguaglianze che definiscono uno schema di approssimazione otteniamo, per un problema di **minimo**,

$$\frac{\mathscr{A}_\varepsilon(I) - z(I)}{z(I)} \leq \varepsilon \implies \mathscr{A}_\varepsilon(I) - z(I) \leq \varepsilon\, z(I)$$

$$\implies \frac{z(I)}{\mathscr{A}_\varepsilon(I) - z(I)} \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Accuratezza (2/2)

- Per un problema di **massimo**,

$$\frac{z(I) - \mathscr{A}_\varepsilon(I)}{z(I)} \leq \varepsilon \implies z(I) - \mathscr{A}_\varepsilon(I) \leq \varepsilon\, z(I)$$

$$\implies \frac{z(I)}{z(I) - \mathscr{A}_\varepsilon(I)} \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Nel caso particolare in cui $\mathscr{A}_\varepsilon(I) = z(I)$, i denominatori sopra sono nulli; in questo caso interpretiamo le frazioni corrispondenti come $+\infty$, e le disuguaglianze valgono banalmente.

Non tutti gli schemi di approssimazione sono ugualmente utili in pratica.

Li distinguiamo in base a come il tempo di esecuzione dipende dalla **dimensione dell'input** e dall'**accuratezza** $\frac{1}{\varepsilon}$.

PTAS

Definizione 8: Schema di approssimazione polinomiale (PTAS)

Uno schema di approssimazione $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ *è uno* ***schema di approssimazione polinomiale*** *se, per ogni* $\varepsilon \in (0,1)$ *fissato, il tempo di esecuzione di* $\mathscr{A}_\varepsilon$ *è polinomiale nella dimensione dell'istanza.*

- Quindi il tempo di esecuzione è polinomiale nella dimensione dell'input, ma può crescere molto rapidamente al diminuire di ε (cioè al crescere dell'accuratezza richiesta).

FPTAS

Definizione 9: Schema di approssimazione completamente polinomiale (FPTAS)

Uno schema di approssimazione $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ *è uno* ***schema di approssimazione completamente polinomiale*** *se il tempo di esecuzione di* $\mathscr{A}_\varepsilon$ *è polinomiale sia nella dimensione dell'istanza sia nell'accuratezza* $\frac{1}{\varepsilon}$.

Riepilogo

Errore relativo:

- $(\mathscr{A}(I) - z(I))/z(I)$ (minimo) o $(z(I) - \mathscr{A}(I))/z(I)$ (massimo)
- divide per $z(I)$: il gap non è mai minore

Schemi di approssimazione:

- errore relativo al più ε per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$
- un'$(1 + \varepsilon)$-approssimazione (minimo), una $\frac{1}{1-\varepsilon}$-approssimazione (massimo)
- PTAS: polinomiale nella dimensione per ogni ε fissato; FPTAS: polinomiale anche in $\frac{1}{\varepsilon}$

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- Raccogliamo gli errori che si commettono più spesso con le garanzie di prestazione e gli schemi di approssimazione
- Ciascuno nasce da una definizione di questo capitolo
- Controllateli prima di risolvere gli esercizi

Errori tipici (1/3)

Osservazione 1: Invertire il rapporto

Il rapporto di prestazione è

$$\frac{\mathscr{A}(I)}{z(I)} \quad \textit{per un problema di minimo e}$$

$$\frac{z(I)}{\mathscr{A}(I)} \quad \textit{per un problema di massimo:}$$

in entrambi i casi è almeno 1.

Errori tipici (2/3)

Osservazione 2: Dimostrare una garanzia con esempi

Un'istanza su cui il rapporto vale α mostra che nessuna costante minore di α è una garanzia, ma non dimostra che α lo sia: per questo serve una dimostrazione per ogni istanza.

Osservazione 3: Dire tight una garanzia senza un'istanza

Una garanzia α è tight solo se qualche istanza, o una successione di istanze, raggiunge α al limite.

Errori tipici (3/3)

Osservazione 4: Confondere ε e α

Uno schema di approssimazione con errore relativo ε è un algoritmo di $(1+\varepsilon)$-approssimazione per un problema di minimo, ma un algoritmo di $\frac{1}{1-\varepsilon}$-approssimazione per un problema di massimo.

Osservazione 5: PTAS e FPTAS

Il tempo di esecuzione di un PTAS può crescere come $n^{1/\varepsilon}$; solo per un FPTAS è polinomiale anche in $\frac{1}{\varepsilon}$.

Riepilogo

Garanzie:

- il rapporto di prestazione è sempre almeno 1: non va invertito
- una garanzia richiede una dimostrazione per ogni istanza; dire che è tight richiede un'istanza, o una successione di istanze

Schemi di approssimazione:

- ε dà $1+\varepsilon$ (minimo) ma $\frac{1}{1-\varepsilon}$ (massimo)
- solo un FPTAS è polinomiale anche in $\frac{1}{\varepsilon}$

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo le idee chiave del capitolo sugli algoritmi di approssimazione
- Il quadro riassuntivo collega le garanzie ai valori euristici sulle istanze di riferimento

Riepilogo (1/2)

- Una garanzia di prestazione relativa limita il rapporto $\mathscr{A}(I)/z(I)$ (minimo) o $z(I)/\mathscr{A}(I)$ (massimo) su tutte le istanze; una garanzia additiva limita la differenza.
- Una garanzia è tight se è raggiunta da un'istanza, o avvicinata da una successione di istanze; la garanzia minima è il rapporto nel caso peggiore $r(\mathscr{A})$, o l'errore additivo nel caso peggiore $e(\mathscr{A})$.
- Uno schema di approssimazione ha errore relativo al più ε per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$; è un PTAS se il tempo di esecuzione è polinomiale nella dimensione dell'istanza per ogni ε fissato, e un FPTAS se è polinomiale anche in $\frac{1}{\varepsilon}$.

Riepilogo (2/2)

Quadro riassuntivo.

- Una garanzia limita, su ogni istanza, la distanza fra una soluzione euristica (un lower bound su $z(I)$ per un problema di massimo, un upper bound per un problema di minimo) e il valore ottimo.
- I quadri riassuntivi dei capitoli di questa parte del corso raccolgono, per le istanze di riferimento, i valori degli algoritmi euristici e le loro garanzie.
- Per il VCP, il MCP e il TSP generale non esiste alcuna garanzia costante, a meno che $P = NP$.